

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ
ΙΔΡΥΜΑ

ΛΑΡΙΣΑΣ

ΣΧΟΛΗ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ
ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ-ΕΡΓΩΝ ΥΠΟΔΟΜΗΣ

Αρχές και Μέθοδοι
ΣΤΗ **ΜΗΧΑΝΙΚΗ-ΙΙ**
(Αντοχή των Υλικών)

Φιλοθέου Γ. Λόκκα
Διπλωματούχου Πολ. Μηχ/κού Ε.Μ.Π.
M.Sc. UMIST Αγγλίας
Ph.D UCL -"-
Καθηγητή Σ.Τ.Ε.Φ. / Τ.Ε.Ι. / Λάριδας

Λάρισα, Οκτώβριος 2000 |

Αγιερώνεται
στη λατρευτή μνήμη του πατέρα μου
Γεωργίου.

Οι σημειώσεις αυτές γράφθηκαν για να καλύγουν το κενό που υπάρχει στο Τ.Ε.Ι. Λαρίσης για το μάθημα της Αντοχής των Υλικών, απ' την έλλειψη αντίστοιχου διδακτικού συγγράμματος.

Καταβλήθηκε ξεχωριστή προσπάθεια, ώστε να καλύγουν την από το Υ.Π.Ε.Π.Θ. προβλεπόμενη διδακτέα ύλη, χωρίς να επεκτείνονται σε εξεζητημένα θέματα, μιάς και το περιεχόμενο του μαθήματος είναι αχανές.

Σε ειδικές μόνο περιπτώσεις, όπου κρίθηκε απαραίτητο, έγινε ανάπτυξη ειδικών εννοιών ή αποδείξεων, είτε στο κυρίως κείμενο είτε στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, ώστε να γεφυρωθούν τα κενά των εννοιών ή σχέσεων που ήδη χρησιμοποιήθηκαν σαν απαραίτητες.

Για την καλύτερη κατανόηση σχετικά πολύπλοκων θεωρητικών κεφαλαίων, δόθηκαν εκλεκτικά αντίστοιχα παραδείγματα. Γενικότερη όμως επιδίωξή μου ήταν, τόσο η ανάπτυξη του θεωρητικού μέρους όσο και η παράθεση των αντίστοιχων σχημάτων να γίνουν με απλότητα και σαφήνεια, ώστε να βοηθήσουν στην καλύτερη αφομοίωση του μαθήματος απ' τους σπουδαστές.

Με την ελπίδα ότι οι παραπάνω στόχοι μου έχουν κατά ένα μεγάλο μέρος επιτευχθεί, παραδίδω τις σημειώσεις αυτές στους σπουδαστές αντίστοιχων τμημάτων του Τ.Ε.Ι. Λαρίσης, δεχόμενος κάθε καλόπιστη κριτική που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μελλοντικά.

Φιλόθεος Γ. Λόκκας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Σελίδα

Αντί Προλόγου	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ	
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ - ΟΡΙΣΜΟΙ	
1. Σκοπός της Αντοχής των Υλικών	5
2. Η έννοια του φορέα	6
3. Οι απλές καταπονήσεις	7
α. Εφελκυσμός ή θλίψη	7
β. Διατμηση	8
γ. Στρέψη	9
δ. Κάμψη	9
ε. Λυγισμός	10
4. Οι σύνθετες καταπονήσεις	10
5. Εσωτερικές δυνάμεις	11
6. Τάσεις	12
7. Εντατική κατάσταση	13
8. Επίπεδη ή διαξονική εντατική κατάσταση	15
α. Διερεύνηση της συνάρτησης $\sigma(\epsilon)$	17
β. "- "- "- $\tau(\epsilon)$	19
γ. Συμπεράσματα	21
9. Ο κύκλος του Mohr	22
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ	
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ	
1. Ο Νόμος του Hooke	29
2. Το πείραμα του Εφελκυσμού	31
3. Τύποι διαγραμμάτων εφελκυσμού	37
4. Το πείραμα της θλίψης	39
5. Εγκάρσια παραμόρφωση	41

6. Γενίκευση του νόμου του Hooke	42
7. Γωνιακή παραμόρφωση	43
8. Συντελεστής ασφαλείας	44
9. Επίδραση της θερμοκρασίας	47

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ - ΘΛΙΨΗ

1. Εφέλκυσμός - θλίψη σαν καταπονήσεις	55
2. Οι εσωτερικές δυνάμεις και οι τάσεις	56
3. Παραμορφώσεις	57
4. Έλεγχος αντοχής	58
5. Οι τάσεις σε πλάγιες τομές	59
6. Ο κύκλος του Mohr στη μονοαξονική εντατική κατάσταση	60
7. Κυλινδρικά δοχεία με λεπτά τοιχώματα	61
8. Στατικά αόριστα προβλήματα	64

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΔΙΑΤΜΗΣΗ

1. Οι εσωτερικές δυνάμεις και οι τάσεις	103
2. Σύνθλιψη άντυγας οπών	105
3. Έλεγχος αντοχής	106

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΣΤΡΕΨΗ

1. Οι εσωτερικές δυνάμεις και οι τάσεις γενικά	113
2. Τάσεις - παραμορφώσεις σε κυλινδρικούς φορείς	115
α. Προβλεπόμενος της διατμητικής τάσης τ	116
β. Προβλεπόμενος της γωνίας στρέψης ϕ	119
3. Έλεγχος αντοχής	125
4. Στρεπτική καταπόνηση σε περιστρεφόμενους άξονες (ατράκτους)	126

	Σελίδα
5. Στρέψη ράβδων μὴ κυκλικῆς διατομῆς	128
α. Ορθογωνικὴ διατομή	129
β. Τριγωνικὴ -II-	130
6. Στρέψη ράβδων με κλειστὴ διατομὴ λεπτοῦ πάχους	131
α. Υπολογισμός των διατμητικῶν τάσεων	132
β. Ἐκφραση τῆς γωνίας στρεφῆς	133
γ. Παράδειγμα	133
7. Στρέψη ράβδων με λεπτὴ εὐληνωτὴ διατομὴ	134
8. Το πείραμα τῆς στρέψεως	135
9. Ανελαστικὴ δράση	136
Παράδειγμα	138
10. Στατικά αόριστα προβλήματα	139

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΚΑΜΨΗ

1. Γενικά	140
α. Ἡ δοκὸς ὡς φορέας	140
β. Οἱ στήριξεις	144
γ. Εξωτερικά φορτία καὶ αντιδράσεις	145
δ. Τα φορτία διατομῆς	148
ε. Σήμανση καὶ υπολογισμός των N , Q , M	150
Παράδειγμα	152
στ. Βασικὲς σχέσεις ἀνάμεσα στα μεγέθη q , Q καὶ M	153
2. Κατασκευὴ των διαγραμμάτων Q καὶ M	156
α. Παραδείγματα	160
β. Γενικὲς παρατηρήσεις	171
γ. Δυσμενεῖς φορτίσεις	172
3. Ἡ κάμψη καὶ οἱ ἐσωτερικὲς δυνάμεις	175

4. Οι τάξεις	178
α. Οι ορθές τάξεις	178
β. Οι διατμητικές τάξεις	182
5. Έλεγχος αντοχής	185
α. Έλεγχος σε κάμψη	187
β. -II- -II- διάτμηση	189
γ. Παρατηρήσεις	190
δ. Παραδείγματα	191
6. Οι παραμορφώσεις	196
Παραδείγματα	200
7. Οι παραμορφώσεις με τη μέθοδο της	
επιφανειακής ροπής	202
Παράδειγμα	206
8. Στατικά αόριστα προβλήματα	209
α. Η μέθοδος της επαλληλίας	211
β. Η μέθοδος της επιφανειακής ροπής	213
9. Η κάμψη όταν δεν ισχύει ο νόμος του	
Hooke (ανελαστική)	217
10. Σύνθετες δοκοί (δύο υλικών)	221
Παράδειγμα	225
11. Διατμητική παραμόρφωση	227

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΛΥΓΙΣΜΟΣ

1. Η έννοια του λυγισμού στα υποτυλώ- ματα	229
2. Η θεωρία και ο τύπος του Euler	231
Συμπεράσματα	236
3. Επίδραση των συνθηκών στα άκρα του ετύλου	237

Σελίδα

4. Βέλτιστοι τύποι υποκυλινδρικών	239
5. Ελαστικός και πλαστικός λυγισμός	241
6. Ο τύπος του Tetmayer	243
7. Διερεύνηση - έλεγχος αντοχής	244
Παράδειγμα	246
8. Η μέθοδος ω	252
9. Ράβδοι σύνθετης και πολυμελούς διατομής	257

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1. Η περίπτωση της καθαρής διάτμησης	Π1
2. Σχέση μεταξύ των δύο μέτρων ελαστικότητας	Π2
3. Η ορθή τάση σε ειδικές θέσεις διατομών	Π3
4. Η σταθερά του Poisson μ	Π5
5. Υπολογισμός της καμπυλότητας $1/\rho$ σε τυχόν σημείο καμπύλης	Π8
6. Σύντομη ιστορική αναδρομή λυγισμού	Π9

ΠΙΝΑΚΕΣ

Πίνακες ιδιοτήτων υλικών, χαρακτηριστικών διατομών κ.λ.π.	Π13 - Π32
--	-----------

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Π33

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

Η Αντοχή των Υλικών, που εμφανίστηκε σε υποτυπώδη μορφή μόλις πριν από ενάμιση περίπου αιώνα και εξελίχθηκε ραγδαία κάτω από την πίεση των αναγκών που δημιουργήσε η βιομηχανική επανάσταση και η υλική πρόοδος, πρόσφερε στον μηχανικό την δυνατότητα να συμβιβάζει κατά τον πιο αρμονικό τρόπο τους αντιμαχόμενους παράγοντες της ασφάλειας και της οικονομίας, ανάμεσα στους οποίους για πολλούς αιώνες ριγοκινδύνευε η διαίεση των κατασκευαζών.

Εκείνο όμως που ουδαισθητικά πέτυχε η Αντοχή των Υλικών είναι ότι έκανε την έννοια της ασφάλειας μέγεθος μετρήσιμο, μεταφέροντας έτσι τα θέματα της αντοχής και ευστάθειας των κατασκευών απ' την διαίεση και εμπειρία στην μαθηματική Ανάλυση και την Γεωμετρία. Έτσι οι διαστάσεις των κατασκευών και οι απαιτούμενες ποσότητες των υλικών προσδιορίζονται όχι με βάση τους εμπειρικούς κανόνες, αλλά μαθηματικά κριτήρια, έτσι ώστε να είναι ακριβώς ή περίπου όσες χρειάζονται για να επιτευχθεί ο προορισμός τους, χωρίς επικίνδυνη έλλειψη ή αδικαιολόγητη σπατάλη. Με τον τρόπο αυτό ο μηχανικός ξεφεύγει από την θέση ενός εμπειρικού κατασκευαστή και έρχεται στο ύψος του επιστήμονα που εναρμονίζεται συνειδητά στην ουδαία αρχή της οικονομίας της ύλης, η οποία αρχή φαίνεται να κυριαρχεί σ' ολόκληρη τη δημιουργία.

Επιχειρώντας μία σύντομη ιστορική ανασκόπηση της νέας επιστήμης αξίζει να αναφερθούμε για λίγο στους κυριώτερους σταθμούς που επισημαίνουν την πρόοδο που συντελέστηκε. Μετά τις πρώτες αναζητήσεις του δαιμόνιου μηχανικού και καλλιτέχνη Leonardo da Vinci (1452-1519) πάνω στον τρόπο που

αντιδρούν οι δοκοί στις φορτίσεις, ο πρώτος σημαντικός συγγραφέας πάνω στο θέμα αυτό υπήρξε ο Galileo Galilei (1564-1642) διατυπώνοντας μία θεωρία στις δοκούς που αν και ανακριβής προσδιορίζει την σχέση φορτίου και διατομής σε δοκό ίσης αντοχής.

Μεγάλο βήμα προόδου έγινε το 1678, όταν ανακοινώθηκε από τον Robert Hooke (1635-1702) ο νόμος της αναλογίας ανάμεσα στην παραμόρφωση και την δύναμη με την επιγραμματική του διατύπωση *ut tensio, sic vis*. Ο νόμος αυτός είναι το σπουδαιότερο έρεσμα στο οποίο θεμελιώθηκε η μαθηματική θεωρία του ελαστικού σώματος και ολόκληρη η τεχνική θεωρία του υπολογισμού των κατασκευών. Άλλη αξιόλογη συμβολή έγινε το 1744 από τον J. Bernoulli (1667-1748) που διατύπωσε την αναλογία ανάμεσα στην καμπυλότητα της ελαστικής γραμμής και την καμπτική ροπή. Μετά ο L. Euler (1707-1783) εξετάζει την ελαστική ισορροπία των θλιβόμενων ράβδων βγάζοντας τους νόμους του ελαστικού λυγισμού που απασχόλησαν επίσης και τον Lagrange (1736-1813).

Το 1776 ο Coulomb (1736-1806) εξετάζει πάλι το πρόβλημα της κάμψης καθορίζοντας τη θέση της ουδέτερης γραμμής στις δοκούς και βγάζοντας θετικά συμπεράσματα απ' την μελέτη στρέψης κυλινδρικών ράβδων. Είναι ο πρώτος που διατύπωσε την έννοια της επιτρεπόμενης τάσης για κάθε υλικό και καθόρισε τα κριτήρια ασφαλείας ή αετοχίας τους. Το έργο του Coulomb συνέχισε και βελτίωσε ο L. Navier (1785-1836) που βρήκε τους νόμους της κάμψης των δοκών και κατέγραψε τις γενικές εξισώσεις ελαστικότητας των στερεών χάρις στην έννοια του μέτρου ελαστικότητας που πρώτος έδωσε ο T. Young (1773-1829). Έτσι προετοιμάστηκε το έδαφος για τους ερευνητές του 19ου αιώνα.

Πολλά είναι τα ονόματα των ερευνητών που διετύπωσαν εργασίες μαθηματικού χαρακτήρα στο πρώτο μισό του αιώνα αυτού.

Στό δεύτερο μισό του 19ου αιώνα έγιναν νέες βοβαρές εργαβίες μαθηματικού χαρακτήρα, που συναρμολογούνται τελικά με τον γενικό τίτλο "Μαθηματική θεωρία της ελαστικότητας". Οι εργαβίες τόσον της θεωρίας αυτής όσον και της εύχχρονης εποχής ήσαν πάρα πολλοί.

Είναι όμως άξιο προσοχής ότι ανάμεσα β' όλα αυτά τα ονόματα, τρία ήταν εκείνα που έδωσαν τη μεγάλη ώθηση και χάραξαν το βωστό δρόμο· Hooke, Young, Navier. Ο πρώτος ανακάλυψε τον θεμελιώδη νόμο της ελαστικότητας πειραματιζόμενος βε ελατήρια. Ο δεύτερος παρατήρησε με προσοχή τα γεγονότα και προσπάθηκε να τα συμπεριλάβει βε έναν εμπειρικό νόμο όπου εμφανίζονταν ένας συντελεστής, το μέτρο ελαστικότητας ή σταθερά του Young. Έτσι διατυπώθηκε ο νόμος του Hooke με τον τύπο $\Delta l = P \cdot l / FE$, ο οποίος όταν ήρθε βτά χέρια του μηχανικού Navier, έδωσε τις βάσεις μίας ολόκληρης επιστήμης. Η συνέχεια δεν ήταν τίποτ' άλλο, παρά μία καθαρά διανοητική εργαβία βτό γραβείο που περιλάμβανε λύσεις διαφόρων εξισώσεων.

Γιά τους μηχανικούς δεν αρκεί να γνωρίζουν περιγραφικά πώς κατασκευάζεται ένα έργο, πώς υπολογίζονται οι διαστάσεις του, πώς εξασφαλίζεται η αντοχή του, πώς προϋπολογίζεται η δαπάνη του κ.λ.π. Πρέπει οι ίδιοι να μπορούν να κάνουν με βιγυριά, δεξιότητα και ταχύτητα όλες τις σχετικές μελέτες και υπολογισμούς, πράγμα που προϋποθέτει αρκετή άσκηση και πείρα.

Η κατασκευή με την πάροδο του χρόνου γίνεται επιχείρηση ολοένα και πιο πολύπλοκη. Πολλά προβλήματα από όλους τους τομείς των Θετικών Επιστημών, αλλά και των Οικονομικών και της Φιλοσοφίας συγκλίνουν βε οποιοδήποτε τεχνικό θέμα και απαιτούν συνδυασμένη λύση, γρήγορη και εύστοχη, έτσι ώστε τελικά να προκύψει ένα τεχνικό έργο ασφαλές, χρήσιμο, ωραίο

και οικονομικό.

Ο ρόλος της Αντοχής των Υλικών στην πολυδύναμη αυτή προσπάθεια είναι αποφασιστικός και θεμελιώδης, αφού αυτή είναι βασικά υπεύθυνη και αρμόδια για τη στατική και δυναμική επάρκεια του έργου, που είναι ο πρώτος και κυριώτατος όρος της ύπαρξής του.

Γι' αυτό δίκαια ο κλάδος αυτός της Εφαρμοσμένης Μηχανικής κατέχει την πρώτη θέση στις πνευματικές αποσκευές των Μηχανικών, προσδιορίζοντας κατά μεγάλο μέρος την επιτημονική τους βαρύτητα και το βαθμό της επαγγελματικής τους φερεγγυότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ - ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Σκοπός της Αντοχής των υλικών.

Όπως είναι γνωστό, τα διάφορα υλικά που χρησιμοποιούμε σήμερα στις κατασκευές, δηλαδή μέταλλα, ξύλα, πέτρες κ.λ.π. τότε μόνο είναι πρακτικά χρήσιμα και εξυπηρετούν τον προορισμό τους, όταν δεν απειλούνται με θραύση κάτω από την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων που καλούνται να αναλάβουν, αλλά αντιστέκονται αποτελεσματικά και μάλιστα κατά τέτοιον τρόπο, ώστε οι αναπόφευκτες παραμορφώσεις να μην υπερβαίνουν ορισμένα όρια, που είτε για αισθητικούς είτε για κατασκευαστικούς λόγους θα ήταν απαράδεκτα στην πράξη.

Μιά δοκός π.χ. που το βέλος κάμψης της θα ήταν τόσο μεγάλο ώστε να φαίνεται χωρίς ιδιαίτερη προσοχή, δεν είναι γενικά παραδεκτή στις κατασκευές. Το ίδιο και ένας άξονας μηχανής που έπαθε μικρή έστω παραμόρφωση από κάμψη, είναι απαράδεκτος για την λειτουργία της.

Για τους παραπάνω λόγους είναι απαραίτητο να ξέρουμε μέχρι ποιο όριο μπορούμε να φορτίζουμε ακίνδυνα τα διάφορα υλικά στις διάφορες καταπονήσεις που είναι δυνατόν να υποβληθούν.

Η Αντοχή των υλικών, από πρακτική άποψη έχει κύρια σκοπό:

1. Να προσδιορίζει τα επικίνδυνα όρια φόρτισης των διαφόρων υλικών σε όλες τις δυνατές καταπονήσεις και με βάση αυτά να καθορίζει παραδεκτά όρια φόρτισης σε κάθε περίπτωση.

2. Να υπολογίζει τις διαστάσεις των μελών μίας κατασκευής κατά τέτοιον τρόπο που να μπορούν με ασφάλεια - χωρίς δηλαδή κίνδυνο θραύσης ή υπερβολικών παραμορφώσεων - να αναλάβουν

τα εξωτερικά φορτία

3. Να υπολογίσει το μέγιστο φορτίο που είναι δυνατό να επιβάλουμε με ασφάλεια σε μία δομένη κατασκευή, ή ακόμη να ελέγξει κατά πόσο αυτή είναι ασφαλής κάτω απ' την ενέργεια δομένης φόρτισης (στατικός έλεγχος), ή τέλος να ελέγξει κατά πόσο οι παραμορφώσεις που θα εκδηλωθούν κάτω απ' την ενέργεια αυτής της φόρτισης, βρίσκονται μέσα στα ανεκτά όρια.

Το πρώτο πετυχαίνεται με πειράματα σε ειδικά Εργαστήρια Αντοχής Υλικών, ενώ το δεύτερο και το τρίτο πετυχαίνονται γενικά με υπολογισμούς άλλοτε απλούς και άλλοτε πολύπλοκους και δύσκολους ανάλογα με τη μορφή των φορτιζομένων σωμάτων και το είδος της καταπόνησης που υποβάλλονται.

Στα επόμενα κεφάλαια θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά των απλών στερεών σωμάτων που συναντάμε σε διάφορες κατασκευές, απέναντι στις διάφορες καταπονήσεις που είναι δυνατόν να υποβληθούν.

2. Η έννοια του φορέα

Καλούμε φορέα κάθε κατασκευή που μπορεί να αναλάβει με ασφάλεια εξωτερικές δυνάμεις και να τις μεταφέρει στις στηρίξεις της.

Στην αντοχή των υλικών φορείς είναι όλα τα στερεά σώματα, που βρίσκονται σε ισορροπία κάτω από την επίδραση φορτίων. Τα σώματα αυτά είναι ομοιογενή, δηλαδή έχουν τις ίδιες φυσικές ιδιότητες σε όλα τα σημεία τους και επί πλέον είναι ισότροπα, δηλαδή δείχνουν τα ίδια χαρακτηριστικά ελαστικότητας προς κάθε διεύθυνση.

Σε αντίθεση τώρα με την ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (Στατική) που θεωρεί τα σώματα εντελώς απαραμόρφωτα, η ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ (Αντοχή των Υλικών) θεωρεί τα σώματα παραμορφώσιμα, όπως

άλλωστε είναι στην πραγματικότητα. Αυτό σημαίνει ότι κάτω από την ενέργεια φορτίων παθαίνουν μεταβολές μηκών και γωνιών. Φυσικά ο προσδιορισμός του μεγέθους των μεταβολών αυτών, δηλαδή των παραμορφώσεων είναι μία από τις δυνατότητες της αντοχής των υλικών, όπως προαναφέρθηκε.

3. Οι απλές καταπονήσεις.

Όταν σε ένα φορέα που ισορροπεί ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, λέμε ότι αυτός καταπονείται ή ότι βρίσκεται σε εντατική κατάσταση.

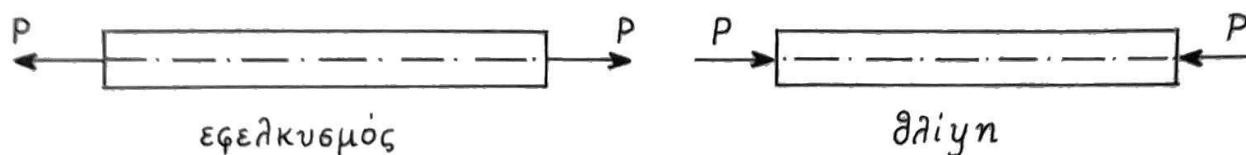
Όπως γνωρίζουμε από την Στατική, σε κάθε στοιχείο ή μόριο του φορέα στον οποίο ενεργούν φορτία, αναπτύσσονται εσωτερικές δυνάμεις. Στην πραγματικότητα, λόγω της συνοχής του υλικού, σε κάθε ιδεατή τομή ενός στοιχείου του φορέα, τα γειτονικά μόρια του υλικού ασκούν μεταξύ τους στοιχειώδεις δυνάμεις. Οι συνισταμένες αυτών των στοιχειωδών δυνάμεων είναι οι παραπάνω εσωτερικές δυνάμεις που στην Στατική γνωρίσαμε σαν αξονικές, τέμνουσες κ.λ.π. και προσδιορίζονται με βάση τις συνθήκες ισορροπίας.

Ο προσδιορισμός του μεγέθους τόσο των εσωτερικών δυνάμεων όσο και των παραμορφώσεων που προκαλούν, εξαρτάται απ' τον τρόπο με τον οποίο οι εξωτερικές δυνάμεις ασκούνται πάνω στον φορέα. Ορισμένοι τρόποι ενέργειας των δυνάμεων είναι χαρακτηριστικοί και αποτελούν τις λεγόμενες απλές καταπονήσεις, που είναι:

α. Εφελκυσμός ή θλίψη.

Τέτοια καταπόνηση δημιουργείται από δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις που δρούν στον ευθύγραμμο άξονα του σώματος.

Κατά τον εφέλκυσμό, δύο εγκάρσιες διαδοχικές διατομές του σώματος τείνουν να απομακρυνθούν μεταξύ τους ενώ κατά την θλίψη τείνουν να πλησιάσουν.



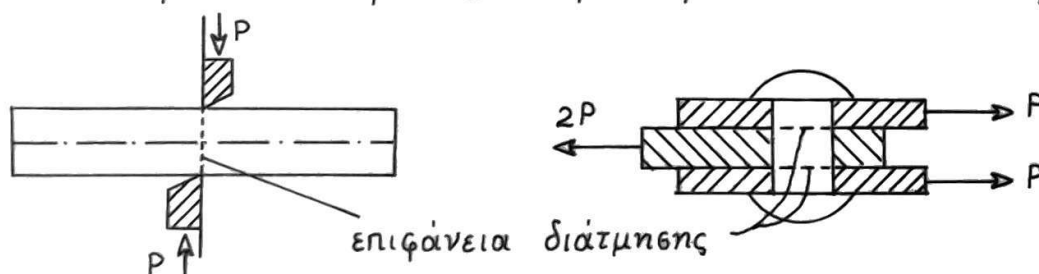
Σχ. 1

Αν οι δυνάμεις P δεν δρουν στον ενδύγραμμο κεντροβαρικό άξονα του σώματος, τότε έχουμε τον έκκεντρο εφέλκυσμό σε διάκριση από τον κεντρικό ή αξονικό.

Παραδείγματα εφέλκυσμού είναι τα συρματόδεχσινα των γερανών, οι βίδες, οι αλυσίδες, οι γρύλοι, τα υποστρώματα κ.λ.π.

β. Διάτμηση

Όταν δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις ενεργούν κάθετα στον άξονα του σώματος σε απειροστή μεταξύ τους απόσταση τότε έχουμε την καθαρή διάτμηση ή γαλλιτισμό. Η επίπεδη διατομή που βρίσκεται ανάμεσα στα φορτία (ή τα περιέχει) ονομάζεται επιφάνεια διάτμησης. Χαρακτηριστικό στην διάτμηση



Σχ. 2

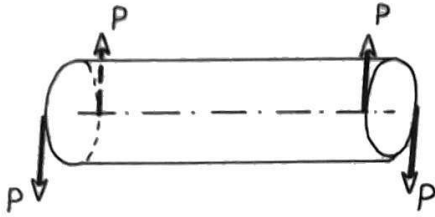
είναι ότι δύο εγκάρσιες διαδοχικές διατομές του σώματος τείνουν να ολισθήσουν η μία πάνω στην άλλη.

Γενικώτερα παρουσιάζεται το φαινόμενο της διάτμησης όταν οι δυνάμεις P απέχουν ικανή απόσταση μεταξύ τους.

Παραδείγματα καθαρής διάτμησης είναι το γαλίδι, οι ήλοι (καρφιά) κ.λ.π.

γ. Στρέψη.

Στη στρέψη τα φορτία αποτελούνται από δύο ζεύγη δυνάμεων, ίσα και αντίθετα, που ενεργούν σε επίπεδα κάθετα προς τον άξονα του σώματος. (βλ. 3).



Σχ. 3

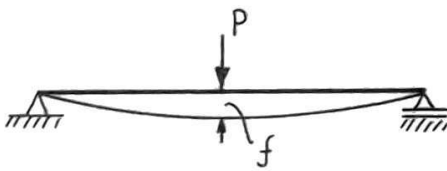
Χαρακτηριστικό στη στρέψη είναι ότι δύο εγκάρσιες διαδοχικές διατομές του σώματος τείνουν να περιστραφούν η μία ως προς την άλλη. Αυτό έχει σαν αποτέ-

λεσμα, οι αρχικά ευθύγραμμες γενέστερες κυλινδρικού σώματος να μετασχηματίζονται σε ελικοειδείς γραμμές.

Παραδείγματα στρέψης έχουμε συχνά στη Μηχανολογία (άξονες, τρυπάνια, άτρακτοι κ.λ.π.) και σπανιότερα σε τεχνικά έργα.

δ. Κάμψη.

Σ' αυτή τα φορτία (συγκεντρωμένα ή συνεχή) περιλαμβάνονται σε ένα μόνον επίπεδο που περιέχει και τον ευθύγραμμο άξονα του σώματος.



Σχ. 4

Η κάμψη σε ένα τμήμα του φορέα χαρακτηρίζεται σαν καθαρή ή γενική αν στο τμήμα αυτό εμφανίζονται μόνον καμπτικές ροπές

ή καμπτικές ροπές και τέμνουσες δυνάμεις αντίστοιχα.

Χαρακτηριστικό στην κάμψη είναι ότι ο αρχικά ευθύγραμμος π.χ. άξονας του φορέα παίρνει καμπύλη μορφή με αποτέλεσμα να εμφανίζεται ταυτόχρονα εφελκυσμός και θλίψη στις κατώτερες και ανώτερες ίνες του φορέα αντίστοιχα.

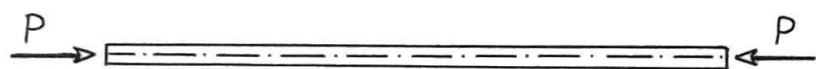
Η μέγιστη βύθιση του φορέα ονομάζεται βέλος κάμψης.

Παραδείγματα κάμψης έχουμε στις πλάκες των οικοδομών,

στα δοκάρια, στους προβόλους, στα δόντια των οδοντωτών τρο-
χών, στους μοχλούς κ.λ.π.

ε. Λυγιμός

Ο λυγιμός είναι ειδική περίπτωση θλίψης και εμφα-
νίζεται όταν η ελάχιστη διάσταση της εγκάρσιας διατομής του
ευθύγραμμου σώματος είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μή-
κος του. Στην περίπτωση αυτή, αν η αυξανόμενη θλιπτική



Σχ. 5

δύναμη φθάνει καί-
ποια τμήν, τότε το
σώμα παίρνει από-

τομα καμπύλη μορφή. Η θράυση γίνεται μετά από παραμόρφω-
ση που είναι τόσο μεγαλύτερη, όσο λεπτότερο είναι το σώμα.

Ενώ λοιπόν ο λυγιμός μοιάζει σε παραμόρφωση με την
κάμψη και σε τρόπο επιβολής φορτίων με την θλίψη, διαφέρει
ριζικά και από τις δύο αυτές καταπονήσεις, αποτελώντας μια
ξεχωριστή κατάσταση έντασης πολύ επικίνδυνη στις κατασκευές.

Παραδείγματα λυγιμού έχουμε στις θλιβόμενες ράβδους των
δικτυωμάτων, στους διωδτήρες (μπιέλες) μηχανών κ.λ.π.

4. Οι σύνθετες καταπονήσεις.

Ένας φορέας μπορεί να καταπονείται ταυτόχρονα κατά διά-
φορους τρόπους. Πολύ συχνά συναντάμε π.χ. δοκούς που καταπο-
νούνται σε κάμψη και διάτμηση, κάμψη και εφελκυσμό (ελ-
κυστήρες), κάμψη και θλίψη (προεντεταμένοι φορείς), εφελκυσμό
και διάτμηση (κοχλιοφόροι ήλοι) κ.λ.π.

Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι ο φορέας εργάζεται σε
σύνθετη καταπόνηση.

Οι απλές καταπονήσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω ικχύουν

γιά ομαλή επιβολή των δυνάμεων πάνω στον φορέα. Όταν όμως η δύναμη ενεργεί βίαια πάνω στο σώμα - πράγμα που επιβαρύνει τα αποτελέσματα της δύναμης στο υλικό ανάλογα με την ορμή που δρά πάνω του - τότε μιλάμε για κρουστική καταπόνηση. Η δράση μπορεί τότε να εκδηλωθεί στο σώμα με οποιαδήποτε απ' τις απλές καταπονήσεις που αναφέρθηκαν.

Τα φορτία που ενεργούν στις διάφορες κατασκευές, με εξαίρεση το νεκρό βάρος της κατασκευής, επανιότατα είναι μόνιμα και σταθερά. Έτσι τα οφέλιμα ή κινητά φορτία αλλάζουν θέεις και τιμές προκαλώντας έτσι εναλλασσόμενες επιβαρύνσεις από μία ελάχιστη μέχρι μία μέγιστη τιμή (δυναμική καταπόνηση).

5. Εσωτερικές δυνάμεις

Οι εξωτερικές δυνάμεις που δρούν σε έναν φορέα που ισορροπεί δεν συνεπάγονται μόνον την ύπαρξη αντιδράσων του στις θέεις στήριξης· συνεπάγονται ταυτόχρονα και την ύπαρξη εσωτερικών δυνάμεων που στην πιο απλή τους μορφή είναι μοριακές γιατί οφείλονται στη δράση των μορίων μεταξύ τους.

Φυσικά οι εσωτερικές αυτές δυνάμεις δεν φαίνονται, εκτός αν χρησιμοποιηθεί η λεγόμενη μέθοδος των τομών.

Πραγματικά, αν σε ένα σώμα που ισορροπεί κάτω από ένα σύστημα δυνάμεων, προκαλέσουμε μία επίπεδη τομή (χωρίζοντάς το σε αριστερό και δεξιό), τότε το αριστερό π.χ. τμήμα δεν θα ισορροπεί πιά, γιατί οι δυνάμεις που ενεργούν πάνω σ' αυτό και που γενικά δεν ισορροπούν, θα το θέουν σε κίνηση.

Για την αποκατάσταση της ισορροπίας του θα πρέπει να εφαρμόσουμε στα μόρια της τομής κατάλληλες, σε τεράστιο αριθμό απειροελάχιστες δυνάμεις, που η συνισταμένη τους να είναι ίση και αντίθετη με τη συνισταμένη των δυνάμεων του αριστ. τμήματος.

Οι μοριακές αυτές δυνάμεις είναι οι καλούμενες εσωτερικές δυνάμεις του σώματος που γενικά είναι συνεχείς και ανομοιόμορφες. Όμως, για λόγους σκοπιμότητας, δεχόμαστε την κατανομή των παραπάνω δυνάμεων ομοιόμορφη σ' όλη την επιφάνεια της τομής.

6. Τάσεις.

Οι μοριακές δυνάμεις που αναφέραμε πιο πάνω σαν εσωτερικές, όταν υπολογίζονται στη μονάδα επιφάνειας που ασκούνται ονομάζονται **τάσεις**.

Αν θεωρήσουμε μια συγκεκριμένη επιφάνεια F και την συνισταμένη P όλων των στοιχειωδών δυνάμεων που ασκούνται από όλα τα μόρια της F πάνω στα γειτονικά τους, τότε θα ονομάζουμε **τάση** το μέγεθος:

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

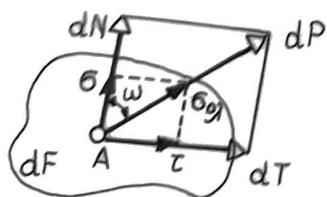
Η σχέση αυτή, που δείχνει ότι η τάση είναι μέγεθος αντίστοιχο της πίεσης, προϋποθέτει όλες τις παραπάνω στοιχειώδεις δυνάμεις ίσες μεταξύ τους· αν όμως αυτό δεν συμβαίνει, ορίζουμε σαν **τάση**, την έκφραση:

$$\sigma = \frac{dP}{dF}$$

όπου dF είναι απεριοστή επιφάνεια και dP απεριοστή δύναμη, συνισταμένη όλων των ίσων στοιχειωδών δυνάμεων που ασκούνται από τα μόρια της επιφάνειας dF .

Θεωρούμε λοιπόν ότι η παραπάνω δύναμη dP ασκείται λοζά στο σημείο A της απεριοστής επιφάνειας dF σχηματίζοντας γωνία ω με την κάθετη στην επιφάνεια.

Αναλύοντας την dP σε μία δύναμη



Σχ. 6

dN κάθετη στην dF και μια dT κείμενη στην dF , θα ονομάζουμε τις εκφράσεις:

$$\theta_{ολ} = \frac{dP}{dF} \quad \text{ολική τάση της επιφάνειας } dF$$

$$\theta = \frac{dN}{dF} \quad \text{ορθή} \quad \text{--''--} \quad \text{--''--}$$

$$\tau = \frac{dT}{dF} \quad \text{διατμητική} \quad \text{--''--} \quad \text{--''--}$$

Απ' τη γεωμετρία του σχ. 6 προκύπτει ότι:

$$\theta = \theta_{ολ} \cdot \sin \alpha \quad \text{και} \quad \tau = \theta_{ολ} \cdot \eta \mu \alpha.$$

Είναι φανερό ότι, γενικά, η $\theta_{ολ}$ και επομένως και οι συνιστώσες της θ και τ θα αλλάζουν τιμή, αν η στοιχειώδης επιφάνεια αλλάξει διεύθυνση.

Πραγματικά, αν F_0 είναι η προβολή της F σε επίπεδο κάθετο της P , είναι φανερό ότι η P δημιουργεί μία σταθερή ορθή τάση θ_0 ($P = F_0 \cdot \theta_0$). Αν επομένως η F στραφεί ώστε η προβολή της να γίνει $F' < F_0$, τότε η F παραλαμβάνει νέα δύναμη $P' = F' \cdot \theta_0 < F_0 \cdot \theta_0 = P$. Άρα η νέα ολική τάση, θα είναι:

$$\theta_{ολ}' = \frac{P'}{F} < \frac{P}{F} = \theta_{ολ}$$

7. Εντατική κατάσταση.

Ονομάζουμε εντατική κατάσταση σε κάποιο σημείο ενός σώματος την εικόνα που παρουσιάζουν οι τάσεις σε όλα τα επίπεδα που περνάνε απ το σημείο αυτό. Θεωρούμε δηλαδή κάποια μοναδιαία επιφάνεια που μπορεί να περιβρέφεται γύρω από το σημείο Σ π.χ. του σώματος, οπότε για κάθε προανατολισμό αυτής της επιφάνειας εξετάζουμε την εικόνα που εμφανίζει το διάνυσμα της ολικής τάσης $\theta_{ολ}$, απ' την οποία εξαρτάται η ορθή και διατμητική της τάση.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις εντατικής κατάστασης:

- α. την αξονική ή μονοαξονική εντατική κατάσταση,
- β. την επίπεδη ή διαξονική -||- -||- και
- γ. την χωρική ή τριαξονική -||- -||- .

Μονοαξονική εντατική κατάσταση έχουμε όταν για κάθε προανατολισμό της μοναδιαίας επιφάνειας γύρω απ' το σημείο Σ, το διάνυσμα της ολικής τάσης $\sigma_{\sigma\lambda}$ βρίσκεται πάνω στην ίδια σταθερή ευθεία. Στην περίπτωση π.χ. πρισματικής ράβδου που καταπονείται αξονικά από δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις (θλίψη ή εφελκυσμός), η παραπάνω σταθερή ευθεία ταυτίζεται με τον άξονα της ράβδου.

Επίπεδη ή διαξονική εντατική κατάσταση έχουμε όταν για κάθε προανατολισμό της μοναδιαίας επιφάνειας γύρω απ' το σημείο Σ, το διάνυσμα της ολικής τάσης $\sigma_{\sigma\lambda}$ βρίσκεται σταθερά πάνω στο ίδιο επίπεδο που ονομάζεται επίπεδο τάσεων. Τέτοια καταπόνηση συναντάμε στην πράξη, όταν το υλικό μιας κατασκευής υπόκειται στη σύγχρονη επίδραση αξονικών δυνάμεων εφελκυσμού ή θλίψης, σε δύο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις, όπως το κέλυφος ενός κυλινδρικού λέβητα λόγω των εσωτερικών πιέσεων.

Χωρική ή τριαξονική εντατική κατάσταση έχουμε όταν για κάθε προανατολισμό της μοναδιαίας επιφάνειας γύρω απ' το σημείο Σ, το διάνυσμα της ολικής τάσης $\sigma_{\sigma\lambda}$ βρίσκεται σε οποιαδήποτε διεύθυνση στο χώρο, σχηματίζοντας μία κεντρική δέσμη ευθειών με κέντρο το Σ. Τέτοια καταπόνηση συναντάμε στο πείραμα του εφελκυσμού όταν εμφανίζεται ο λαιμός θραύσης, στη σκληρομετρούμενη επιφάνεια ενός δοκιμίου ακριβώς κάτω απ' τον διεισδυτή, στις εργοστασιακές πρέσες χυτών αντικειμένων, ή υλικών - όπως το αλουμίνιο - που υφίστανται ειδική διεργασία εξέλασης κ.λ.π.

Στα πλάγια του γνωστικού μας επίπεδου, θα μελετήσουμε την αξονική και την επίπεδη εντατική κατάσταση, αρχίζοντας, για λόγους κατάταξης της ύλης, με την επίπεδη.

8. Επίπεδη ή διαξονική εντατική κατάσταση.

Θα περιορίσουμε τη μελέτη μεταβολής των τάσεων μόνο στα επίπεδα που είναι κάθετα στο επίπεδο των τάσεων.

Δηλαδή οι στοιχειώδεις επιφάνειες που περνούν απ' το σημείο Σ του σώματος ανήκουν σε μία αξονική δέσμη επιπέδων, όπου το σημείο Σ ανήκει στον άξονα, ο δε άξονας είναι κάθετος στο επίπεδο των τάσεων, το επίπεδο δηλαδή που ορίζουν οι εξωτερικές αξονικές δυνάμεις εφελκυμού η θλίψης σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις.

Για να γίνει δυνατή η περιγραφή της επίπεδης εντατικής κατάστασης θα πρέπει να είναι γνωστές οι ορθές και διατμητικές γενικά τάσεις σε δύο επίπεδα κάθετα μεταξύ τους. Ύστερα απ' αυτό σαν προϋπόθεση είναι δυνατό να προσδιοριστεί η ορθή και διατμητική τάση που αντιστοιχούν σε κάθε άλλο επίπεδο της δέσμης που θεωρήσαμε παραπάνω.

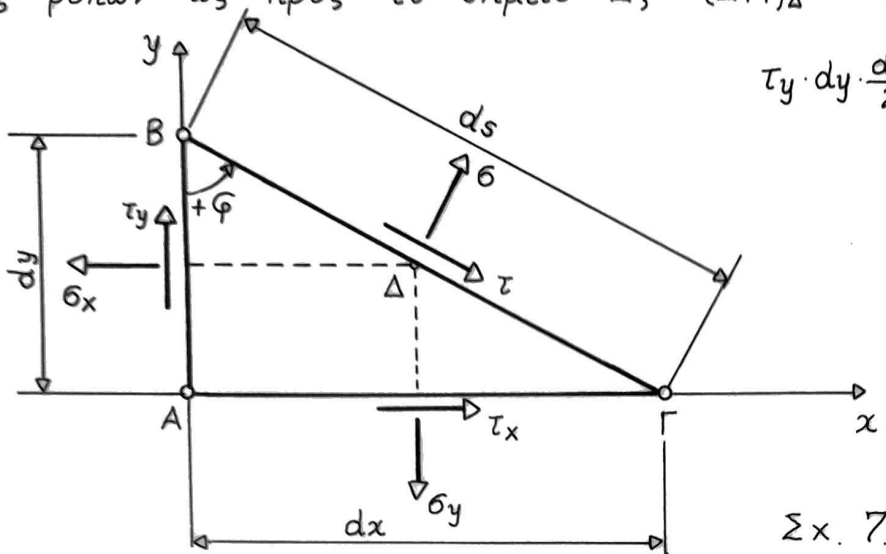
Έστω λοιπόν A το σημείο του άξονα της δέσμης (βλ. 7) και δύο επίπεδα Ax και Ay , κάθετα μεταξύ τους αλλά και στο επίπεδο των τάσεων xAy . Των επιπέδων αυτών, που θεωρούμε μοναδιαίο το ύψος τους, έστω δy , τx και δx , τy οι ορθές και διατμητικές τάσεις αντίστοιχα (ο δείκτης παρ/λος του άξονα).

Σε απειροστή απόσταση από το A θεωρούμε επίπεδο $B\Gamma$, πάλι μοναδιαίου ύψους, που σχηματίζει γωνία ϕ με το επίπεδο Ay .

Τον επιπέδου αυτού ζητάμε τον προσδιορισμό της ορθής του τάσης σ και της διατμητικής του τ .

Στο στοιχειώδες τριγωνικό πρίσμα $AB\Gamma$ που έχει δημιουργηθεί,

μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε τις συνθήκες ισορροπίας της Στατικής, ξεκινώντας απ' τον μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος ροπών ως προς το σημείο Δ, $(\Sigma M)_\Delta^{\uparrow+} = 0$. Άρα:



$$\tau_y \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} - \tau_x \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \tau_x = \tau_y$$

Έστω λοιπόν:

$$\tau_x = \tau_y = \tau_{xy} \quad (1)$$

Σχ. 7.

Η σχέση (1) που είναι γνωστή σαν πρόταση του Cauchy, λέει ότι: οι διατμητικές τάσεις σε δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα είναι ίσες μεταξύ τους, και, ή κατευθύνονται και οι δύο προς την κοινή ακμή των επιπέδων, ή απομακρύνονται απ' αυτήν.

Οι δύο άλλες εξισώσεις ισορροπίας της Στατικής, δίνουν:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{x}^{\uparrow+} = 0 &\Rightarrow \sigma \cdot ds \cdot \sin \phi + \tau \cdot ds \cdot \cos \phi - \sigma_x \cdot dy + \tau_{xy} \cdot dx = 0 \\ \Sigma \vec{y}^{\uparrow+} = 0 &\Rightarrow \sigma \cdot ds \cdot \cos \phi - \tau \cdot ds \cdot \sin \phi - \sigma_y \cdot dx + \tau_{xy} \cdot dy = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Εκφράζοντας τα dx και dy συναρτήσει των ds και ϕ

$$dx = ds \cdot \cos \phi \quad \text{και} \quad dy = ds \cdot \sin \phi \quad (3)$$

και αντικαθιστώντας τις (3) στις (2), βρίσκουμε μετά την απλοποίηση του ds :

$$\left. \begin{aligned} \sigma \cdot \sin \phi + \tau \cdot \cos \phi &= \sigma_x \cdot \sin \phi - \tau_{xy} \cdot \cos \phi \\ \sigma \cdot \cos \phi - \tau \cdot \sin \phi &= \sigma_y \cdot \cos \phi - \tau_{xy} \cdot \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (4) \quad \left\| \begin{array}{c|c} \sin \phi & \cos \phi \\ + & - \\ \hline \cos \phi & \sin \phi \end{array} \right\}$$

Πολ/ζοντας την πρώτη επί $\sin \phi$ και τη δεύτερη επί $\cos \phi$ και

προσθέτοντας κατά μέλη, βρίσκουμε :

$$\sigma = \sigma_x \cdot \sigma \omega^2 \varphi + \sigma_y \cdot \eta \mu^2 \varphi - 2\tau_{xy} \cdot \eta \mu \varphi \cdot \sigma \omega \varphi \quad (5)$$

Πολ/ζοντας τώρα την πρώτη επί $\eta \mu \varphi$ και τη δεύτερη επί $\sigma \omega \varphi$ και αφαιρώντας κατά μέλη, βρίσκουμε :

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \eta \mu \varphi \cdot \sigma \omega \varphi + \tau_{xy} (\sigma \omega^2 \varphi - \eta \mu^2 \varphi) \quad (6)$$

Χρησιμοποιώντας τις γνωστές τριγωνομετρικές σχέσεις :

$$2 \cdot \eta \mu \varphi \cdot \sigma \omega \varphi = \eta \mu 2\varphi \quad \text{και} \quad \sigma \omega^2 \varphi - \eta \mu^2 \varphi = \sigma \omega 2\varphi$$

απ την οποία προκύπτουν οι :

$$\sigma \omega^2 \varphi = \frac{1 + \sigma \omega 2\varphi}{2} \quad \text{και} \quad \eta \mu^2 \varphi = \frac{1 - \sigma \omega 2\varphi}{2},$$

οι σχέσεις (5) και (6) γίνονται μετά τις πράξεις :

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sigma \omega 2\varphi - \tau_{xy} \eta \mu 2\varphi \quad (7)$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \eta \mu 2\varphi + \tau_{xy} \sigma \omega 2\varphi \quad (8)$$

Οι σχέσεις (7) και (8) είναι η τελική μορφή των τάσεων σ και τ συναρτήσει των γνωστών τάσεων $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ και της μεταβλητής γωνίας φ .

Ας ζητήσουμε τώρα τις διευθύνσεις των επιπέδων στα οποία η ορθή και διατμητική τάση παίρνουν ακρότατες τιμές.

α. Διερεύνηση της συνάρτησης $\sigma(\varphi)$.

Οι ακρότατες τιμές της σχέσης (7) αντιστοιχούν, όπως είναι γνωστό στις ρίζες της πρώτης παραγώγου της: δηλαδή :

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0 \Rightarrow -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot 2\eta \mu 2\varphi - \tau_{xy} \cdot 2 \cdot \sigma \omega 2\varphi = 0 \quad (9)$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος της (9) είναι το δεύτερο μέλος της (8) που εκφράζει την τάση τ . Άρα $\tau = 0$ και συνεπώς :

Στα επίπεδα που η ορθή τάση σ παίρνει ακραία τιμή, η αντίστοιχη διατμητική τάση μηδενίζεται.

Απ' την (9) προκύπτει:

$$\varepsilon \varphi 2\varphi = - \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (10)$$

Αν φ_0 είναι η μικρότερη γωνία του επιπέδου που η σ παίρνει ακραία τιμή, ικανοποιώντας τη σχέση (10), τότε παρατηρούμε ότι και το επίπεδο που είναι κάθετο στο προηγούμενο, σχηματίζοντας γωνία $\varphi_0 + \pi/2$, είναι και αυτό επίπεδο όπου η σ παίρνει ακραία τιμή, διότι:

$$\varepsilon \varphi 2\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \varepsilon \varphi (2\varphi_0 + \pi) = \varepsilon \varphi 2\varphi_0 = - \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (11)$$

Όστε λοιπόν στην αξονική δέσμη των επιπέδων που θεωρήσαμε, υπάρχουν δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα, που σχηματίζουν γωνίες φ_0 και $\varphi_0 + \pi/2$, πάνω στα οποία η ορθή τάση σ παίρνει ακραίες τιμές, έστω σ_1 και σ_2 . Υποθέτουμε ότι $\sigma_1 > \sigma_2$.

Τα επίπεδα αυτά ονομάζονται κύρια, και οι αντίστοιχες πάνω σ' αυτά ορθές τάσεις σ_1 και σ_2 κύριες. Η σ_1 μέγιστη κύρια τάση, η σ_2 ελάχιστη κύρια τάση.

Οι τιμές τώρα των σ_1 και σ_2 βρίσκονται από την σχέση (7), αν θέσουμε σ' αυτή $\varphi = \varphi_0$ και $\varphi = \varphi_0 + \pi/2$, αντίστοιχα:

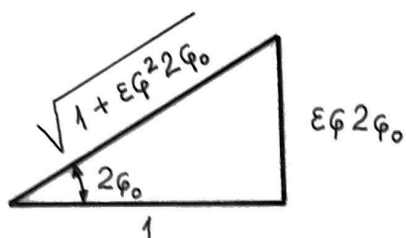
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi_0 - \tau_{xy} \sin 2\varphi_0 \quad (12)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi_0 + \tau_{xy} \sin 2\varphi_0 \quad (13)$$

Στις σχέσεις (12) και (13) μπορούμε να απαλείψουμε τη γωνία φ_0 . Πραγματικά, αν στις σχέσεις:

$$\cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon \varphi^2 2\varphi_0}} \quad \text{και} \quad \sin 2\varphi_0 = \frac{\varepsilon \varphi 2\varphi_0}{\sqrt{1 + \varepsilon \varphi^2 2\varphi_0}} \quad (14)$$

που προκύπτουν από το τρίγωνο του σχήματος 8 (όπου η βάση θεωρείται μοναδιαία), αντικαταστήσουμε την τιμή της $\varepsilon\varphi 2\varphi_0$ που παίρνουμε από τη σχέση (11), θα έχουμε:



Σχ. 8

$$\cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\tau_{xy}^2}{(6x-6y)^2}}} = \frac{6x-6y}{\sqrt{(6x-6y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad (15)$$

$$\text{και } \eta\mu 2\varphi_0 = - \frac{\frac{2\tau_{xy}}{6x-6y}}{\sqrt{1 + \frac{4\tau_{xy}^2}{(6x-6y)^2}}} = - \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(6x-6y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad (16)$$

Ήδη, θέτοντας τις τιμές των $\cos 2\varphi_0$ και $\eta\mu 2\varphi_0$ που προκύπτουν από τις σχέσεις (15) και (16) στις σχέσεις (12) και (13), μετά την εκτέλεση των πράξεων, βρίσκουμε:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{6x+6y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(6x-6y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (17)$$

που είναι και οι ζητούμενες τιμές (ακραίες) των ορθών τάσεων.

β. Διερεύνηση της συνάρτησης $\tau(\varphi)$.

Οι ακρότατες τιμές της σχέσης (8), αντιστοιχούν προφανώς στις ρίζες της πρώτης της παραγώγου, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\varphi} = 0 &\Rightarrow \frac{6x-6y}{2} 2\cos 2\varphi - \tau_{xy} 2\eta\mu 2\varphi = 0 \\ &\Rightarrow \varepsilon\varphi 2\varphi = \frac{6x-6y}{2\tau_{xy}} \end{aligned} \quad (18)$$

Αν φ_1 είναι η μικρότερη γωνία ενός επιπέδου που η τ παίρνει ακραία τιμή, ικανοποιώντας τη σχέση (18), τότε και το κάθετο στο προηγούμενο επίπεδο που σχηματίζει γωνία $\varphi_1 + \pi/2$, είναι και αυτό επίπεδο όπου η τ παίρνει ακραία τιμή, αφού:

$$\varepsilon\varphi 2\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \varepsilon\varphi(2\varphi_1 + \pi) = \varepsilon\varphi 2\varphi_1 = \frac{6x - 6y}{2\tau_{xy}} \quad (19)$$

Όστε λοιπόν στην ίδια αξονική δέσμη των επιπέδων που θεωρήσαμε, υπάρχουν επίσης δύο άλλα κάθετα μεταξύ τους επίπεδα, που σχηματίζουν γωνίες φ_1 και $\varphi_1 + \pi/2$, πάνω στα οποία η διατμητική τάση τ παίρνει ακραίες τιμές, έστω $\tau_{\max}$ και $\tau_{\min}$.

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (11) και (19), παρατηρούμε ότι:

$$\varepsilon\varphi 2\varphi_0 \cdot \varepsilon\varphi 2\varphi_1 = -1, \quad (20)$$

που είναι η συνθήκη καθετότητας μεταξύ των διευθύνσεων $2\varphi_0$ και $2\varphi_1$. Επομένως θα είναι:

$$2\varphi_0 - 2\varphi_1 = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \varphi_0 - \varphi_1 = \pm \frac{\pi}{4} \quad (21)$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι τα επίπεδα όπου η τ παίρνει ακραίες τιμές, διχοτομούν τα κύρια επίπεδα.

Οι τιμές των $\tau_{\max}$ και $\tau_{\min}$ θα βρεθούν απ' τη σχέση (8), αν όπου φ θέσουμε αντίστοιχα τις τιμές φ_1 και $\varphi_1 + \pi/2$:

$$\tau_{\max} = \frac{6x - 6y}{2} \eta\mu 2\varphi_1 + \tau_{xy} \sigma\upsilon\nu 2\varphi_1 \quad (22)$$

$$\tau_{\min} = - \frac{6x - 6y}{2} \eta\mu 2\varphi_1 - \tau_{xy} \sigma\upsilon\nu 2\varphi_1 \quad (23)$$

Κάνοντας τώρα χρήση των σχέσεων (14), (θέτοντας όπου φ_0 το φ_1), και αντικαθιστώντας την τιμή της $\varepsilon\varphi 2\varphi_1$ απ' τη σχέση (19), έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu 2\varphi_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(6x - 6y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad \text{και} \quad \eta\mu 2\varphi_1 = \frac{6x - 6y}{\sqrt{(6x - 6y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad (24)$$

Θέτοντας ήδη τις τιμές των $\sigma\upsilon\nu 2\varphi_1$ και $\eta\mu 2\varphi_1$ απ' τις σχέσεις (24) στις σχέσεις (22) και (23), μετά την εκτέλεση των πράξεων, βρίσκουμε τις ζητούμενες ακραίες τιμές της διατμητικής τάσης:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (25)$$

$$\tau_{\min} = -\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (26)$$

Οι σχέσεις τώρα (17) που εκφράζουν τις κύριες τάσεις σ_1 και σ_2 , γίνονται:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \tau_{\max}. \quad (27)$$

Επίσης η σχέση (7) που εκφράζει την ορθή τάση, για την περίπτωση ακρότατης διατμητικής τάσης, γίνεται, σε συνδυασμό με τις σχέσεις (24):

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (28)$$

Είναι πάντως αξιοσημείωτο ότι στα επίπεδα που η διατμητική τάση παίρνει ακραίες τιμές η αντίστοιχη ορθή τάση δεν μ η δ ε ν ί ζ ε τ α ι, αλλά έχει την τιμή $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ που δίνεται απ' τη σχέση (28).

γ. Συμπεράσματα

Ανακεφαλαιώνοντας την έρευνα που έγινε στην επίπεδη εντατική κατάσταση, βγάζουμε τα παρακάτω συμπεράσματα:

1. Σε οποιοδήποτε σώμα που καταπονείται διαζονικά, υπάρχουν πάντοτε γύρω από κάθε σημείο δύο επίπεδα κάθετα μεταξύ τους, που ονομάζονται κύρια, πάνω στα οποία οι ορθές τάσεις παίρνουν ακραίες τιμές. Η μία απ' αυτές είναι η μεγαλύτερη, ενώ η άλλη η μικρότερη από όλες τις ορθές τάσεις που είναι δυνατόν να εμφανισθούν στα επίπεδα που περνούν απ' το σημείο αυτό.

2. Οι διατμητικές τάσεις στα κύρια επίπεδα είναι μηδενικές.

3. Οι διατμητικές τάσεις παίρνουν τις ακραίες τιμές τους σε επίπεδα που διχοτομούν τα κύρια.

4. Σε δύο οποιαδήποτε κάθετα μεταξύ τους επίπεδα, οι δια-

Σημειώνεται ότι μόνο για την κατασκευή του κύκλου Mohr η διατμητική τάση είναι θετική όταν τείνει να περιστραφεί δεξιόστροφα ως προς εσωτερικό σημείο του στοιχειώδους πρίσματος.

Κατασκευή

Στον άξονα σ παίρνω τμήμα $OM = \sigma_x$ και $ON = \sigma_y$. Άρα το μέσο K του τμήματος NM είναι το κέντρο του κύκλου Mohr επειδή έχει συντεταγμένες $(\sigma_x + \sigma_y)/2, 0$.

Στο άκρο M του τμήματος $OM = \sigma_x$ παίρνω κάθετα προς τα πάνω, τμήμα MS_0 ίσο με τη διατμητική τάση τ_y , που είναι θετική ως δεξιόστροφη προς εσωτερικό σημείο του πρίσματος (σ_x, σ_y) .

Το τμήμα KS_0 είναι η ακτίνα του κύκλου Mohr, διότι:

$$KS_0 = \sqrt{(KM)^2 + (MS_0)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_y^2} = R$$

Με κέντρο το K και ακτίνα KS_0 γράφω την περιφέρεια του κύκλου Mohr που τέμνει τον άξονα σ στα σημεία $A \equiv \sigma_1$ και $B \equiv \sigma_2$.

Η ακτίνα KS_0 , της οποίας το άκρο έχει συντεταγμένες που αντιστοιχούν στις τάσεις σ_x, τ_y του επιπέδου Oy , απ' όπου μετριέται η γωνία ϕ στο πρίσμα, είναι η αφετηρία ομόφορης μέτρησης της επίκεντρης γωνίας 2ϕ στον κύκλο. Έτσι προκύπτει το σημείο S , οι συντεταγμένες του οποίου εκφράζουν την ορθή και διατμητική τάση που εμφανίζονται στο τυχόν επίπεδο του πρίσματος (σ_x, σ_y) .

Απόδειξη

Αν σ και τ οι συντεταγμένες του S , θα είναι:

$$\sigma = OL = OK + KL = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \sin(\theta + 2\phi) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \sin\theta \cdot \sin 2\phi -$$

$$R \eta\mu\theta\eta\mu 2\phi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \sin 2\phi - R \frac{\tau_y}{R} \eta\mu 2\phi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi - \tau_y \eta\mu 2\phi.$$

που είναι η σχέση (7) της παραγρ. 8. Επίσης, θα είναι:

$$\begin{aligned} \tau = AS &= R \eta\mu(\theta + 2\phi) = R \eta\mu\theta \sin 2\phi + R \sin\theta \eta\mu 2\phi = R \frac{\tau_y}{R} \sin 2\phi + \\ &+ R \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \eta\mu 2\phi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \eta\mu 2\phi + \tau_y \sin 2\phi \quad (\text{σχέση (8) παραγρ. 8}). \end{aligned}$$

Αν $2\omega_1$ ή $2\omega_2$ είναι η επίκεντρη ομόφορη γωνία που αντιστοιχεί στο καθένα από τα δύο κύρια επίπεδα με τάξεις σ_1 ή σ_2 όπως ορίστηκε πριν, με τη βοήθεια του κύκλου του Mohr μπορούμε εύκολα να λύσουμε οποιοδήποτε πρόβλημα επίπεδης εντατικής κατάστασης.

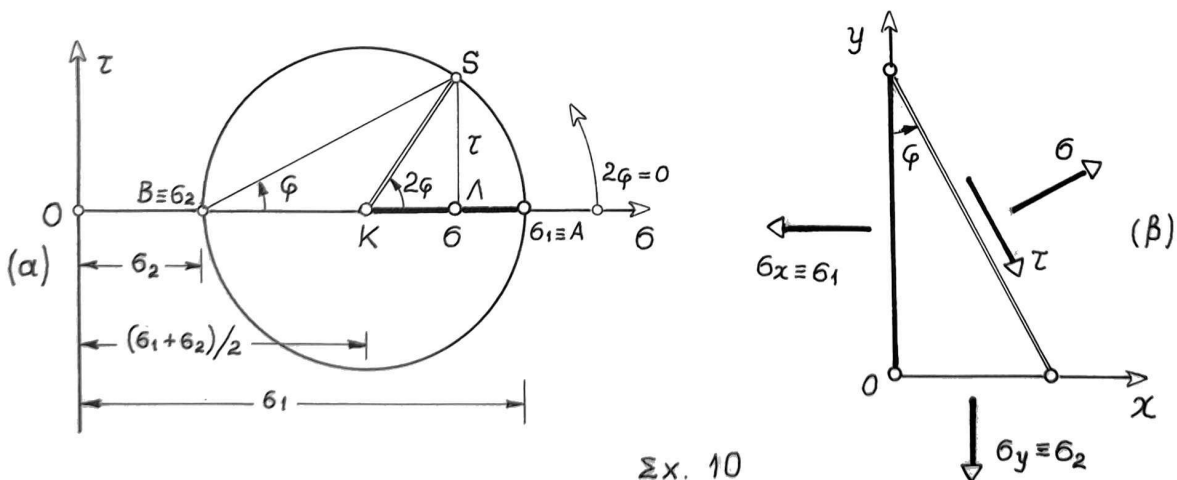
Συγκεκριμένα, αν δοθούν τρία απ' τα μεγέθη σ_x , σ_y , τ_{xy} , σ_1 , σ_2 , ω_1 , ω_2 μπορούμε εύκολα να καθορίσουμε τα υπόλοιπα τέσσερα με τη βοήθεια καταλλήλων γεωμετρικών κατασκευών.

Αν οι δεδομένες τάξεις σ_x , σ_y είναι οι κύριες τάξεις σ_1 και σ_2 , τότε $\tau_{xy} = 0$, οι σχέσεις (7) και (8) απλοποιούνται γτις

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi \quad (7'')$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi, \quad (8'')$$

οπότε η αντίστοιχη κατασκευή του κύκλου του Mohr, με δέξι-γεις ανάλογες με την προηγούμενη, απλουστεύεται σημαντικά.



Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι η αφετηρία μέτρησης της επίκεντρης ομόφορης γωνίας 2φ είναι ο άξονας $K\sigma_1$, γιατί το τυχόν επίπεδο του πρίσματος στρέφεται αριστερόστροφα κατά γωνία φ απ' το κύριο επίπεδο Oy (που δέχεται την κύρια τάση σ_1).

Παράδειγμα.

Σε στοιχείο που καταπονείται διαξονικά (βλ. 11), οι τάσεις που εμφανίζονται είναι:

$$\sigma_x = -50 \text{ κρ/εκ}^2, \quad \sigma_y = 10 \text{ κρ/εκ}^2 \quad \text{και} \quad \tau_{xy} = 40 \text{ κρ/εκ}^2.$$

Ζητούνται

α) Να κατασκευαστεί ο κύκλος του Mohr που περιγράφει την παραπάνω εντατική κατάσταση. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας παράλληλα και αναλυτικές σχέσεις να προσδιοριστούν:

β) Οι κύριες τάσεις σ_1 και σ_2 καθώς και η απαιτούμενη στροφή του στοιχείου που αντιστοιχεί σ' αυτές.

γ) Οι τάσεις σ και τ , που εμφανίζονται σε στοιχείο που στρέφεται αριστερόστροφα κατά γωνία $\theta = 45^\circ$ και

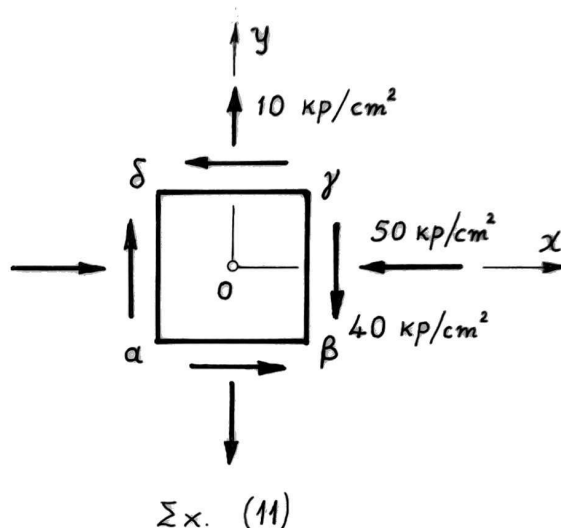
δ) Οι ακρότατες τιμές της διατμητικής τάσης $\tau_{\max}$ και $\tau_{\min}$, η προς τούτο απαιτούμενη στροφή του στοιχείου και οι αντίστοιχες ορθές τάσεις στις έδρες του.

Όλες οι απαντήσεις να δοθούν με σκαριφήματα.

Λύση.

α) Αν $\sigma - \tau$ είναι το σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων των τάσεων της δοθείσας εντατικής κατάστασης (βλ. 12α), το κέντρο K του κύκλου του Mohr θα βρίσκεται προφανώς στον άξονα σ , με τετμημένη

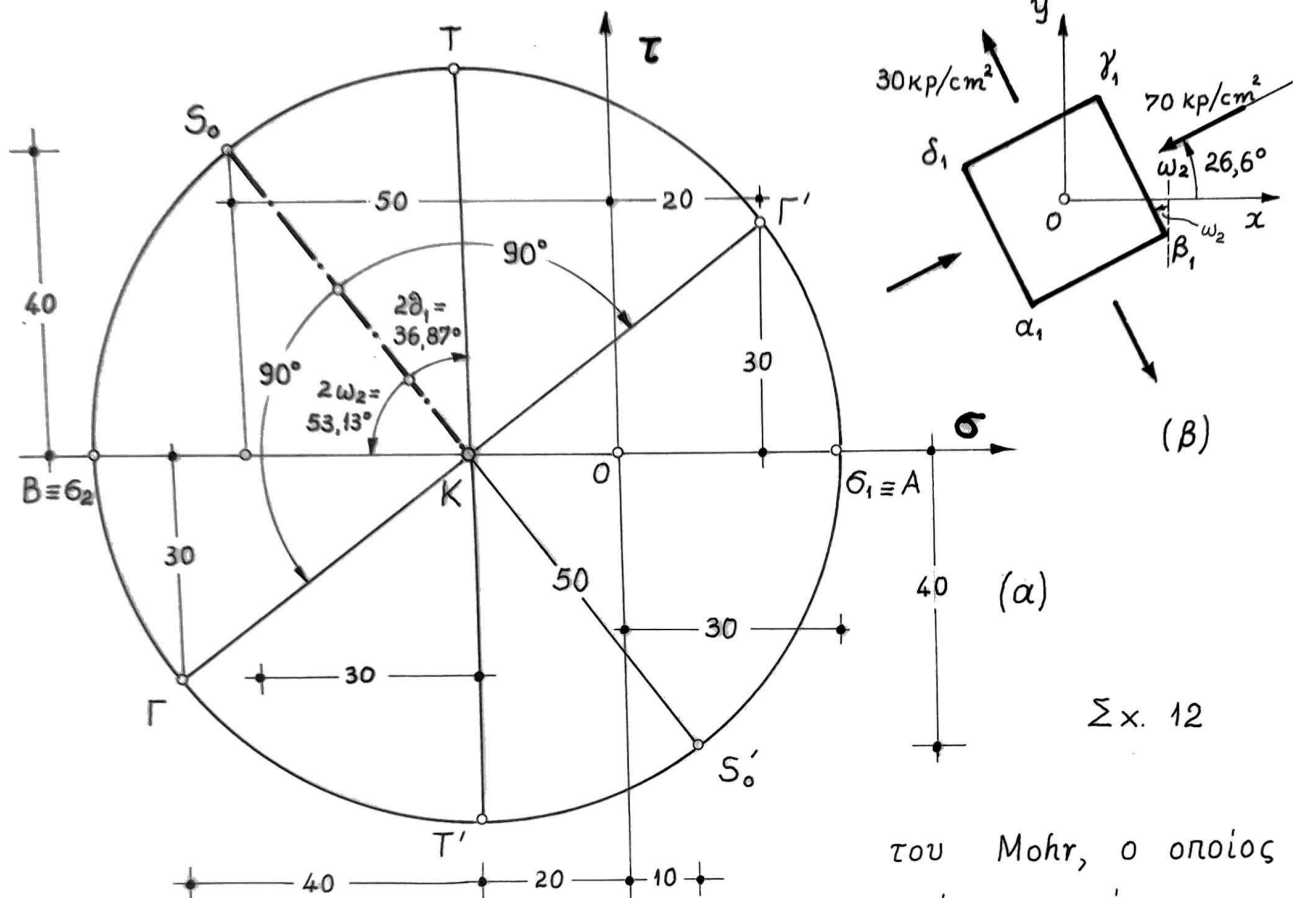
$$\sigma_K = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-50 + 10}{2} = -20 \text{ κρ/εκ}^2.$$



Οι τάσεις (ορθή και διατμητική) της έδρας βγ (ή αδ), (6x 11) που είναι κάθετη στον άξονα x,

$$\sigma_x = -50 \text{ κρ/εκ}^2 \quad \text{και} \quad \tau_{xy} = 40 \text{ κρ/εκ}^2,$$

καθορίζουν τις συντεταγμένες του σημείου S_0 του κύκλου



$\Sigma x. 12$

του Mohr, ο οποίος
γράφεται τώρα με

κέντρο το K και ακτίνα την KS_0 , που είναι

$$R = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ κρ/εκ}^2$$

Οι συντεταγμένες του αντιδιαμετρικού σημείου S'_0 εκφράζουν προφανώς τις τάσεις στις έδρες γδ ή αβ (6x 11), που είναι κάθετες στις προηγούμενες.

β) Τα σημεία A και B, όπου ο κύκλος τέμνει τον άξονα σ , ορίζουν τις κύριες τάσεις $\sigma_1 = 30 \text{ κρ/εκ}^2$ και $\sigma_2 = -70 \text{ κρ/εκ}^2$, οι οποίες προδιορίζονται και αναλυτικά απ' τη σχέση (17)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{-50 + 10}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-50 - 10)^2 + 4 \cdot 40^2} = \begin{matrix} 30 \text{ κρ/εκ}^2 \\ -70 \text{ κρ/εκ}^2 \end{matrix}$$

Η γωνία S_0KB είναι ομόφορα διπλάσια της γωνίας ω_2 (εχ. 12β) που σχηματίζει το κύριο επίπεδο $\beta_1\gamma_1$ (που δέχεται την αλγεβρικά μικρότερη κύρια τάση σ_2) με το επίπεδο $\beta\gamma$ (εχ. 11) που ήταν κάθετο στον άξονα x (και δέχονταν τις τάσεις σ_x και τ_{xy}).

Η γωνία αυτή, που εκφράζει τη στρόφη για την οποία στο στοιχείο θα εμφανίζονταν μόνον οι κύριες τάσεις σ_1 και σ_2 , προκύπτει και αναλυτικά απ' τη σχέση (10)

$$\epsilon\phi 2\omega_2 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 40}{-50 - 10} = \frac{4}{3}$$

$$\eta 2\omega_2 = 53,13^\circ \quad \text{και} \quad \omega_2 = 26,6^\circ$$

γ) Για τον προσδιορισμό των τάσεων που εμφανίζονται στις έδρες στοιχείου που στρέφεται αριστερόστροφα κατά 45° (εχ. 13α) εργαζόμαστε ως εξής:

1. Τάσεις στην έδρα $\beta_2\gamma_2$ (ή $\delta_2\alpha_2$).

Φέρνουμε την ακτίνα $K\Gamma$ ώστε να σχηματίζει με την KS_0 αριστερόστροφη γωνία $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ και προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου Γ . Οι συντεταγμένες αυτές αντιστοιχούν στην ορθή και διατμητική τάση του επιπέδου $\beta_2\gamma_2$, το οποίο, πριν τη στρόφη, ήταν κάθετο στον άξονα x .

Οι τάσεις αυτές βρίσκονται με κατ' ευθείαν μέτρηση, ή αναλυτικά απ' τις σχέσεις (7) και (8) για $\phi = 45^\circ$:

$$\sigma_{(\beta_2\gamma_2)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi - \tau_{xy} \eta\mu 2\phi = \frac{-50 + 10}{2} + \frac{-50 - 10}{2} \overset{0}{\cancel{\sin 90^\circ}} - 40 \eta\mu 90^\circ = -20 - 40 = -60 \text{ κρ/εκ}^2, \text{ και}$$

$$\tau_{(\beta_2\gamma_2)} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \eta\mu 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi = \frac{-50 - 10}{2} \eta\mu 90^\circ + 40 \overset{0}{\cancel{\sin 90^\circ}} = -30 \text{ κρ/εκ}^2.$$

2. Τάσεις στην έδρα $\gamma_2\delta_2$ (ή $\alpha_2\beta_2$)

Φέρνουμε την ακτίνα $K\Gamma'$ ώστε να σχηματίζει με την KS_0 δεξιόστροφη γωνία $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ και προσδιορίζουμε αντίστοιχα τις συντεταγμένες του σημείου Γ' (αντιδιαμετρικού του Γ), που

αντιστοιχούν στις τάσεις (ορθή - διατμητική) του -κάθετου προς το προηγούμενο - επιπέδου $\gamma_2 \delta_2$. (Το επίπεδο $\gamma_2 \delta_2$ στράφηκε ήδη ως προς το αρχικό $\beta\gamma$ - που ήταν παρ/λο του y - κατά δεξιόστροφη γωνία 45°).

Έτσι προκύπτουν, για $\vartheta = -45^\circ$, όμοια οι τάσεις:

$$\sigma(\gamma_2 \delta_2) = \frac{-50+10}{2} + \frac{-50-10}{2} \sin^2(-90^\circ) - 40 \sin(-90^\circ) = -20 + 40 = 20 \text{ κρ/εκ}^2$$

$$\tau(\gamma_2 \delta_2) = \frac{-50-10}{2} \sin(-90^\circ) + 40 \cos(-90^\circ) = 30 \text{ κρ/εκ}^2.$$

δ) Οι ακρότατες τιμές της διατμητικής τάσης $\tau_{\max}$ και $\tau_{\min}$ εύκολα φαίνεται ότι αντιστοιχούν στα σημεία T και T' του κύκλου, παίρνοντας τιμές ίσες με την ακτίνα του, που απ' τις δχέσεις 25, 26 είναι:

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(6x-6y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-50-10)^2 + 4 \cdot 40^2} = \pm 50 \text{ κρ/εκ}^2.$$

Η γωνία $\delta_0 KT$ είναι ομόφορα διπλάσια της γωνίας ϑ_1 (δχ.13β) που σχηματίζει το επίπεδο $\beta_3 \gamma_3$ με το αρχικό $\beta\gamma$.

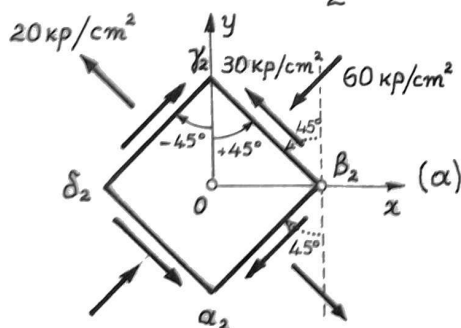
Η γωνία αυτή, που αποτελεί την απαιτούμενη στρόφη του στοιχείου για την εμφάνιση ακρότατης διατμητικής τάσης, υπολογίζεται αναλυτικά απ' τη δχέση (18):

$$\varepsilon \vartheta_1 = \frac{6x-6y}{2\tau_{xy}} = \frac{-50-10}{2 \cdot 40} = -\frac{3}{4}$$

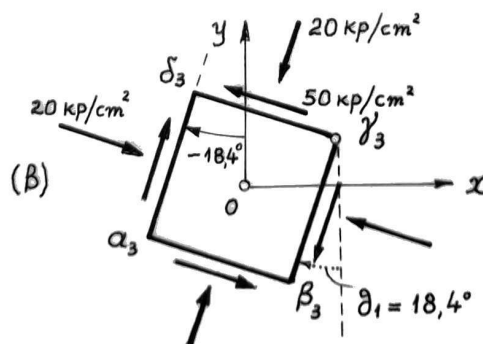
$$\eta \quad 2\vartheta_1 = -36,87^\circ \quad \text{και} \quad \vartheta_1 = -18,43^\circ.$$

Οι ορθές τάσεις που εμφανίζονται στις έδρες του στοιχείου αυτού αντιστοιχούν προφανώς στα ακρότατα σημεία T και T' (δχ.12α). Είναι ίσες μεταξύ τους, γιατί έχουν την ίδια τετμημένη που έχει και το κέντρο του κύκλου. Η τιμή τους προκύπτει απ' τη δχέση (28):

$$\sigma = \frac{6x+6y}{2} = \frac{-50+10}{2} = -20 \text{ κρ/εκ}^2.$$



Σ x 13



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

1. Ο νόμος του Hooke.

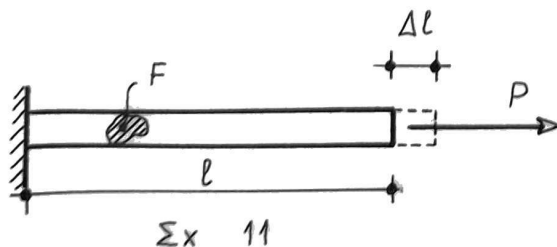
Σε πειράματα εφελκυσμού που έγιναν σε πρισματικές ράβδους, βρέθηκε ότι για τα πιο πολλά υλικά των κατασκευών, και εφόσον η φόρτιση βρίσκεται σε ορισμένα όρια, ισχύει ο παρακάτω νόμος:

Η επιμήκυνση της ράβδου είναι ανάλογη του φορτίου.

Η απλή αυτή γραμμική σχέση ανάμεσα στην επιμήκυνση της ράβδου και την δύναμη που την προκαλεί, διατυπώθηκε αρχικά από τον Άγγλο Robert Hooke το 1678 και γιαυτό φέρει το όνομά του.

Αν λοιπόν μία ράβδος μήκους l και διατομής F υποβληθεί σε εφελκυστική δύναμη P , τότε η επιμήκυνση Δl που υφίσταται είναι ανάλογη της P και του l και αντιετρόφως ανάλογη της F και μιάς σταθεράς E που εξαρτάται απ' το είδος του υλικού της ράβδου, προσδιορίζεται πειραματικά και ονομάζεται μέτρο ελαστικότητας του υλικού.

Έτσι ο παραπάνω νόμος μπορεί τώρα να δοθεί ακριβέστερα με την εξίσωση:



$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{F \cdot E} \quad (1)$$

Στις δοκιμές εφελκυσμού θα πρέπει η εφελκύνουσα δύναμη να είναι πάντα κεντρική. Τούτο σημαίνει ότι όλες οι ίνες της ράβδου έχουν την ίδια επιμήκυνση, ενώ

ταυτόχρονα οι εγκάρσιες διατομές της ράβδου παραμένουν κάθετες στον άξονά της και μετά την παραμόρφωση.

Η εξίσωση (1) παίρνει απλούστερη μορφή αν λάβουμε υπόψη την έννοια της ορθής τάσης $\sigma = P/F$ και της ανηγμένης επιμήκυνσης, δηλαδή το λόγο:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2)$$

Η ανηγμένη επιμήκυνση είναι καθαρός αριθμός, εαν λόγος δύο μηκών και εκφράζει την επιμήκυνση της ράβδου που αντιστοιχεί ή ανάγεται στη μονάδα του μήκους της.

Πραγματικά, η εξίσωση (1) γίνεται τώρα:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{F} \cdot \frac{1}{E} \Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (3)$$

και εκφράζει το νόμο του Hooke στην πιο απλή του μορφή.

Απ την εξίσωση (3) συμπεραίνουμε ότι το μέτρο ελαστικότητας E εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες όπως και η ορθή τάση σ . Εκτός από ελάχιστες εξαιρέσεις, το E για τα διάφορα υλικά είναι το ίδιο για τον εφελκυσμό και τη θλίψη.

Η εξισώσεις (1) και (3) ισχύουν και στην περίπτωση θλίψης. Τότε το Δl ονομάζεται επιβράχυνση, το ϵ ανηγμένη επιβράχυνση και το σ θλιπτική τάση.

Ο νόμος του Hooke ισχύει ικανοποιητικά για τους χάλυβες και τα ξύλα εφ' όσον η τάση σ δεν ξεπεράσει ορισμένη τιμή. Πέρα από την τιμή αυτή της τάσης, οι παραμορφώσεις γίνονται μεγαλύτερες από εκείνες που προβλέπει ο νόμος, ο οποίος συνεπώς δεν ισχύει.

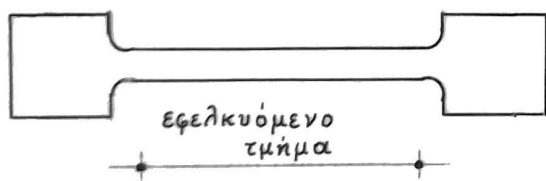
Θα ήταν λοιπόν αξιόλογο, σε μία ράβδο που καταπονείται αξονικά μέχρι τη θραύση της, να γνωρίζαμε πώς μεταβάλλεται η ορθή τάση σ , σε σχέση με την ανηγμένη επιμήκυνση ϵ που προκαλείται.

2. Το πείραμα του Εφελκυσμού.

Ο νόμος του Hooke που ήδη περιγράψαμε, εκφράζει την αναλογία ανάμεσα στην εφελκύνουσα δύναμη και την επιμήκυνση και αποτελεί μέχρι σήμερα την βάση όλων των υπολογισμών αντοχής των υλικών. Όμως δεν ισχύει, παρά μόνο για υλικά ισοτροπα και μέχρι κάποια οριακή τιμή του επιβαλλόμενου φορτίου, γιατί πέρα απ' την τιμή αυτή η σχέση εφελκύνουσας δύναμης - επιμήκυνσης γίνεται πολύπλοκότερη.

Πειραματικές έρευνες που έγιναν για την εξακρίβωση των μηχανικών ιδιοτήτων στα διάφορα υλικά που δοκιμάζονται σε εφελκυσμό μέχρι τη θραύση τους, εικονογραφούνται συνήθως σε ένα διάγραμμα, που γιαυτό ονομάζεται **δ ι α γ ρ α μ μ α ε φ ε λ κ υ σ μ ο ύ**.

Τα πειράματα γίνονται σε τυποποιημένα δοκίμια, που η μορφή τους καθορίζεται έτσι ώστε να μπορούν να επιβληθούν μεγάλες δυνάμεις στα άκρα τους αφ' ενός, και αφ' ετέρου οι ορθές τάξεις που αναπτύσσονται στο εφελκυτόμενο τμήμα, να είναι ομοιόμορφες (βλ. 12).



Σχ. 12

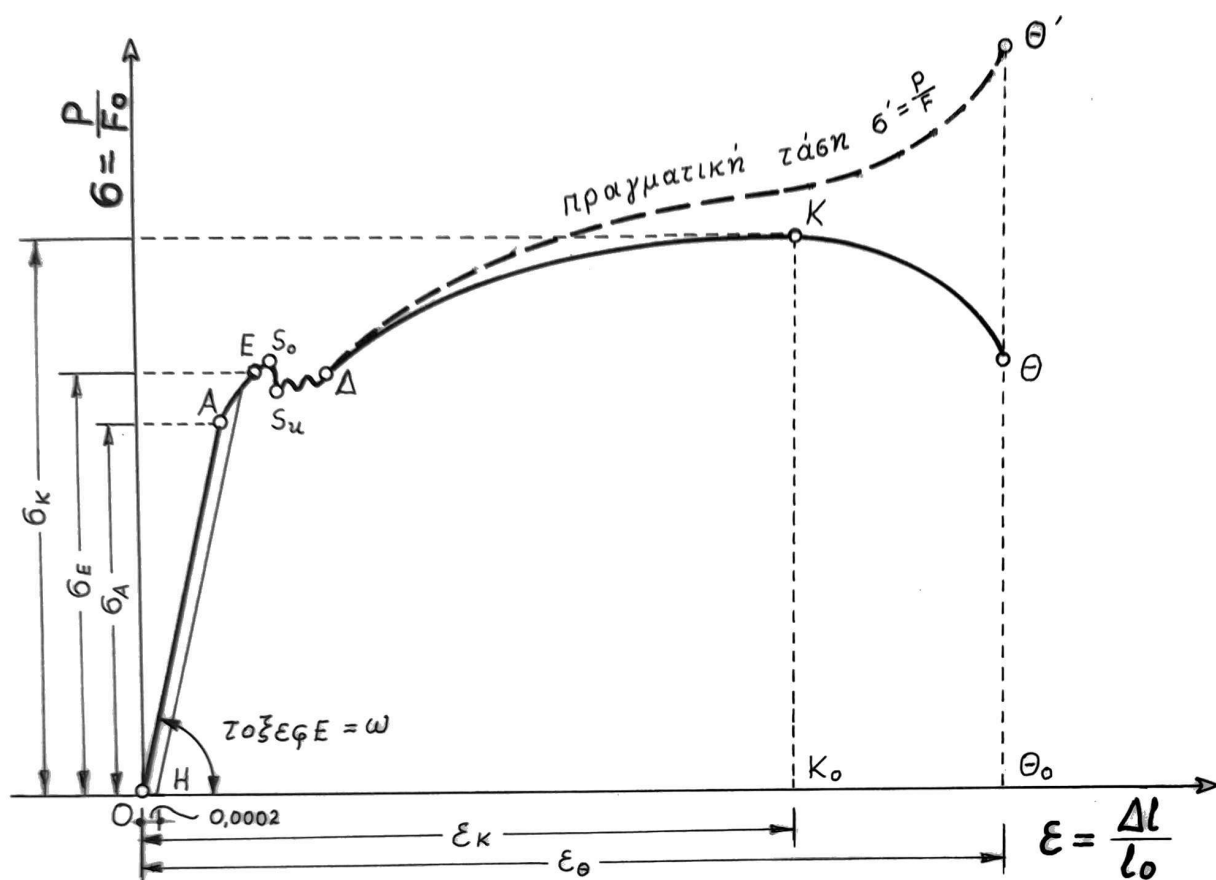
Τυποποιημένος είναι επίσης και ο τρόπος που διεξάγονται τα πειράματα. Τα φορτία επιβάλλονται βιγιά - βιγιά. Μετά από κάθε επιβολή φορτίου, ισορροπεί το δοκίμιο και μετριέται η επιμήκυνσή του.

Η ορθή τάση σ και η ανηγμένη επιμήκυνση ϵ ανάγονται αντίστοιχα στην αρχική διατομή F_0 και το αρχικό μήκος l_0 του δοκιμίου:

$$\sigma = P/F_0 \quad \text{και} \quad \epsilon = \Delta l/l_0. \quad (4)$$

Σε κάθε σ αντιστοιχεί ένα ϵ . Τα ζευγάρια των τιμών αυτών, τοποθετούνται σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $\sigma\epsilon$ (βλ. 13),

για να δώσουν το διάγραμμα εφελκυσμού του συγκεκριμένου δοκιμίου. Το παρακάτω σχήμα παριστάνει ένα τέτοιο τυπικό διάγραμμα για τον χάλυβα των βιδωτών κατασκευών.

 $\Sigma x. 13$

Στο διάγραμμα αυτό παρατηρούμε αρχικά ένα ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ που εκφράζει την αναλογία ανάμεσα στην ορδή τάση σ και την ανηγμένη επιμήκυνση ϵ και γι' αυτό ονομάζεται περιοχή αναλογίας. Στην περιοχή αυτή ισχύει ο νόμος του Hooke $\sigma = E \cdot \epsilon$, και αν αποφορτίσουμε το δοκίμιο παρατηρούμε ότι επανέρχεται στην αρχική του θέση.

Η ορθή τάση ϵ_A που αντιστοιχεί στο τελευταίο θημείο της περιοχής αναλογίας, ονομάζεται όριο αναλογίας.

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία της περιοχής αναδοχής με τον άξονα των ανηγμένων επιμηκύνσεων, τότε η κλί-

ση αυτής εκφράζει προφανώς το μέτρο ελαστικότητας E . Πραγματικά, είναι:

$$\epsilon \omega = (\sigma/\epsilon) = E. \quad \text{Άρα } \omega = \sigma \epsilon \epsilon E. \quad (5)$$

Όμως οι σχέσεις (5), που χρησιμοποιούνται για τον πειραματικό προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας, ουδιαστικά βτερούνται μαθηματικής σημασίας. Κι' αυτό γιατί σ' ένα διάγραμμα εφελκυσμού η κλίμακα του άξονα των τάσεων είναι πάντα πολλαπλάσια εκείνης του άξονα των ανηγμένων επιμηκύνσεων. Αν λοιπόν λ και λ' είναι οι τιμές που εκφράζουν το ίδιο μήκος στους άξονες σ και ϵ αντίστοιχα, οι σχέσεις (5) μπορούν να γραφούν:

$$\epsilon \omega \cdot \frac{\lambda}{\lambda'} = E, \quad \text{άρα: } \omega = \sigma \epsilon \epsilon (E \frac{\lambda'}{\lambda}) \quad (6)$$

Τιμές του E για διάφορα υλικά υπάρχουν σε αντίστοιχο πίνακα στο τέλος της θεωρίας.

Αυξάνοντας την τάση σ πιο πάνω απ' το όριο αναλογίας, παρατηρούμε ότι οι ανηγμένες επιμηκύνσεις αυξάνονται δυσανάλογα, δηλαδή είναι τόσο μεγαλύτερες από εκείνες που προβλέπονται απ' το νόμο του Hooke όσο η τάση σ είναι μεγαλύτερη. Άρα η γραμμή που εκφράζει το νέο αυτό τμήμα του διαγράμματος είναι καμπύλη (ΑΕ) και η αντίστοιχη περιοχή ονομάζεται **π ε ρ ι ο χ ή ε λ α σ τ ι κ ό τ η τ α ς**.

Αν στην περιοχή αυτή αποφορτίσουμε το δοκίμιο, παρατηρούμε ότι δεν επανέρχεται στην αρχική του θέση αλλά εμφανίζεται μία παραμένονσα (μόνιμη) παραμόρφωση.

Η ορθή τάση που αντιστοιχεί στο τελευταίο σημείο της περιοχής αυτής σε ονομάζεται **ό ρ ι ο ε λ α σ τ ι κ ό τ η τ α ς**.

Η συμπεριφορά του υλικού στις περιοχές αναλογίας και ελαστικότητας χαρακτηρίζεται γενικά σαν **ε λ α σ τ ι κ ή**.

Επειδή ο ακριβής καθορισμός των ορίων αναλογίας και ελαστικότητας εξαρτάται απ' την ευαισθησία των μετρητικών οργάνων,

πολλές φορές τα δύο αυτά όρια συγχέονται μεταξύ τους.

Γι' αυτό ορίζουμε σαν **συμβατικό όριο ελαστικότητας** την τάση εκείνη, για την οποία μετά την αποφόρτιση του δοκιμίου εμφανίζεται παραμένονσα παραμόρφωση (επιμήκυνση) ίση με δύο δεκάκις χιλιοστά του αρχικού μήκους.

Δηλαδή θα πρέπει να είναι:

$$\Delta l = 0,0002 \cdot l_0 \quad \text{ή} \quad \varepsilon = 0,0002 = 0,02\%, \quad (7)$$

για να θεωρηθεί ότι η τάση που εφαρμόστηκε στο δοκίμιο πριν από την αποφόρτιση, αντιστοιχούσε στο συμβατικό όριο ελαστικότητας (β. ο. ε.).

Αν δοθεί το διάγραμμα εφελκυσμού (ε, σ) κάποιου υλικού, τότε είναι δυνατός ο γραφικός προσδιορισμός του β. ο. ε.

Πραγματικά, αν στον άξονα των ανηγμένων επιμηκύνσεων πάρουμε, με την κλίμακα που διαλέξαμε, τμήμα $OH = 0,0002$ και απ' το H φέρουμε ευθεία παράλληλη της OA , η ορθή τάση που αντιστοιχεί στο σημείο τομής της ευθείας αυτής με το διάγραμμα, είναι το β. ο. ε.

Συνεχίζοντας τη φόρτιση του δοκιμίου, μπαίνουμε σε μία νέα περιοχή όπου η συμπεριφορά του υλικού είναι ανώμαλη.

Αρχικά συμπεριφέρεται όπως και στην περιοχή ελαστικότητας, δηλαδή με την αύξηση των ανηγμένων επιμηκύνσεων, οι ορθές τάσεις, δυσανάλογα, αυξάνουν μέχρι την τάση σ_s .

Μετά όμως, και ενώ οι ανηγμένες επιμηκύνσεις εξακολουθούν πάντα να αυξάνουν, οι ορθές τάσεις μικραίνουν, φθάνοντας την τάση σ_{su} , αυξάνουν, μικραίνουν κ.ο.κ.

Η περιοχή $ΕΔ$ του διαγράμματος ονομάζεται **περιοχή διαρροής**. Η μέγιστη τιμή σ_s που παίρνει η τάση στην περιοχή αυτή ονομάζεται **ανώτερο όριο διαρ-**

ροής, ενώ η ελάχιστη σ_{su} κατώτερο όριο διαρροής.

Ο μέσος όρος των δύο αυτών τιμών ονομάζεται συνήθως όριο διαρροής, και συμβολίζεται με το σ_s .

Στην περιοχή αυτή, λέμε ότι το υλικό διαρρέει, που σημαίνει ότι γίνονται ανακατατάξεις στη δομή των μορίων του, δείχνοντας, άλλοτε μεν αντοχή στερεού υλικού (ανοδικά τμήματα καμπύλης), άλλοτε δε πλαστικού (καθοδικά τμήματα καμπύλης).

Αυξάνοντας τη φόρτιση μετά το σημείο Δ, παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά του υλικού επανέρχεται σε μία ομαλότητα ανάλογη με εκείνη που έδειξε στην περιοχή ελαστικότητας ΑΕ, με την διαφορά ότι οι αυξήσεις των ανηγμένων επιμηκύνσεων είναι ακόμη μεγαλύτερες απ' τις αντίστοιχες αυξήσεις των τάσεων.

Έτσι, η καμπύλη του διαγράμματος, στρέφοντας συνεχώς τα κοίλα προς τα κάτω, τείνει ασυμπτωτικά να γίνει παράλληλη του άξονα των ανηγμένων επιμηκύνσεων.

Μετά λοιπόν από την διαρροή του υλικού, παρατηρούμε να εμφανίζεται μία συνεχής αντίσταση, που συνοδεύεται με αύξηση της τάσης μέχρι της τιμής σ_k , που δεν μπορεί το υλικό να ξεπεράσει, και ονομάζεται όριο θραύσης.

Το φαινόμενο, κατά το οποίο η επιβαλλόμενη τάση του υλικού συνεχίζει (έστω και ελάχιστα) να αυξάνει, με μεγαλύτερες σχετικά αντίστοιχες ανηγμένες επιμηκύνσεις, ονομάζεται κρατύνωση του υλικού, γι' αυτό και η περιοχή ΔΚ του διαγράμματος ονομάζεται περιοχή κρατύνωσης.

Λίγο μετά από το όριο θραύσης, σε κάποια διατομή του δοκιμίου, που θεωρητικά διαθέτει τον μικρότερο αριθμό μορίων και είναι άγνωστη εκ των προτέρων, εμφανίζεται ισχυρή στένωση, που ονομάζεται λαιμός θραύσης.

Τώρα οι ορθές τάσεις μικραίνουν με την αύξηση των ανηγ-

μένων επιμηκύνσεων, και μετά από λίγο το υλικό σπάζει.

Η τελευταία αυτή περιοχή ΚΘ του διαγράμματος ονομάζεται περιοχή θραύσεως, ενώ η τάση σ_{θ} που αντιστοιχεί στο τελευταίο σημείο της, τάση θραύσεως.

Στην πραγματικότητα, κατά την περιοχή θραύσεως, η τάση εφελκυσμού αυξάνει, λόγω της εγκάρσιας συστολής του δοκιμίου με την εμφάνιση του λαιμού θραύσεως.

Όμως, επειδή οι ορθές τάσεις σ του διαγράμματος προέρχονται από αναγωγή του φορτίου στην αρχική και όχι στην συνεσταλμένη διατομή του δοκιμίου, η καμπύλη εφελκυσμού παρουσιάζει πτώση, που εικονίζεται με τον κλάδο ΚΘ.

Μετά την ελαστική περιοχή του διαγράμματος (περιοχή αναλογίας και ελαστικότητας), οι περιοχές διαρροής, κράτυνσης και θραύσεως που ακολουθούν ονομάζονται πλαστική περιοχή του υλικού.

Αν υπολογίζαμε τις ορθές τάσεις σ' του διαγράμματος, αγνοώντας κάθε φορά το φορτίο στην εκάστοτε διατομή του δοκιμίου, τότε η μορφή του διαγράμματος στην ελαστική περιοχή θα ήταν η ίδια, λόγω των μικρών σχετικοί ανηγμένων επιμηκύνσεων.

Στην πλαστική όμως περιοχή, όπου οι ανηγμένες επιμηκύνσεις αυξάνονται σημαντικά, το διάγραμμα σ' ξεφεύγει βαθμιαία από τη συμβατική του μορφή ως το σημείο Κ, για να συνεχίσει την ανοδική του πορεία που είναι ιδιαίτερα εμφανής στην περιοχή θραύσεως.

Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι κατά την διάρκεια του πειράματος δεχόμαστε ισοόγκη μεταβολή του δοκιμίου, δηλαδή μεταβολή που γίνεται κάτω από σταθερό όγκο, οπότε στην ελαστική περιοχή λόγω αδήμαντων επιμηκύνσεων οι εμικρύνσεις της διατομής είναι αμελητέες. Όμως στην πλαστική περιοχή, οι επιμη-

κύνβεις αυξάνουν, οπότε οι αντίστοιχες εμικρύνσεις της διατομής γίνονται υπολογίσιμες.

Ιδιαίτερα αισθητές γίνονται στο λαιμό θραύσης, όπου εμικρύνονται τοπικά, λόγω αλλώστε και της τριαξονικής εντατικής κατάστασης που αναπτύσσεται στην περιοχή του λαιμού.

Σαν επιμήκυνση θραύσης δεν λαμβάνεται η ϵ_K που αντιστοιχεί στο όριο θραύσης σ_K , αλλά η επιμήκυνση ϵ_θ που αντιστοιχεί στο σημείο θ , θραύσης του δοκιμίου.

Αν λοιπόν l_0 και F_0 είναι αντίστοιχα το αρχικό μήκος και η διατομή του δοκιμίου και l_θ , F_θ τα ίδια μεγέθη κατά την θραύση του, θα ονομάζουμε τα μεγέθη:

$$\delta = \frac{l_\theta - l_0}{l_0} \cdot 100 \% \quad \text{επιμήκυνση θραύσης ή διάταση, και}$$

$$\gamma = \frac{F_0 - F_\theta}{F_0} \cdot 100 \% \quad \text{συστολή θραύσης ή στένωση.}$$

3. Τύποι διαγραμμάτων εφελκυσμού.

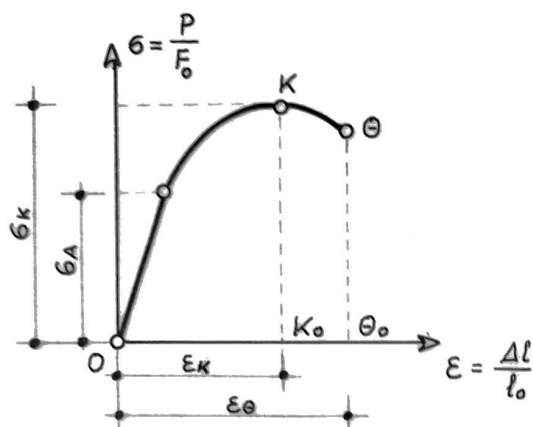
Ανάλογα με τη φύση του κάθε υλικού και των τυχόν προεμφανίσεων του είναι δυνατόν να επηρεασθεί η μορφή του διαγράμματος εφελκυσμού που παρουσιάζει. Διακρίνουμε τρεις χαρακτηριστικούς τύπους διαγραμμάτων εφελκυσμού:

α. Διαγράμματα με περιοχή αναλογίας και όριο διαρροής.

Τέτοια είναι κυρίως τα διαγράμματα του μαλακού χάλυβα των κατασκευών, τα οποία, όπως περιγράψαμε πιο πάνω, παρουσιάζουν ανώτερο και κατώτερο όριο διαρροής, με σημαντική περιοχή κρατύνσεως.

β. Διαγράμματα με περιοχή αναλογίας χωρίς όριο διαρροής.

Σ' αυτά τα υλικά το φορτίο αυξάνει στην αρχή γραμμικά με την αύξηση της επιμήκυνσης μέχρι το όριο αναλογίας.

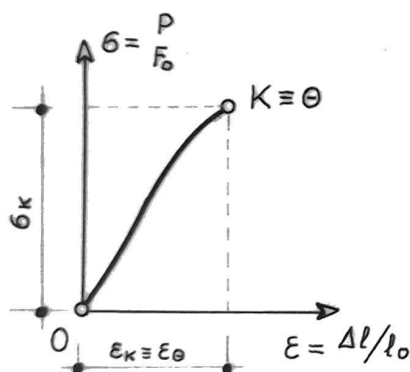


Σχ. 14

Μετά η ευθεία γραμμή του διαγράμματος μετατρέπεται, με συνεχή και ομαλή πορεία, σε ανιούσα καμπύλη ως το όριο θραύσης, γι' αυτό να πείνει στη συνέχεια με μικρό κατιόντα κλάδο ΚΘ ως τη θραύση.

Τέτοια υλικά είναι ο χαλκός, το αργίλιο κ.α.

γ. Διαγράμματα γαθυρών υλικών.
(Χυτοσίδηρος, ορείχαλκος, βκυρόδεμα, γυαλί κ.λ.π.).



Σχ. 15

Στα υλικά αυτά το φορτίο αυξάνει συνέχεια μέχρι το όριο θραύσης, χωρίς καμιά καθαρή ένδειξη ούτε γι' το όριο αναλογίας ούτε γι' το όριο διαρροής ούτε γι' την κράτυνση του υλικού.

Γίνεται συνεπώς έτσι γραφικά

φανερή η ουσιαστική διάκριση ανάμεσα στα συνεκτικά ή ολκίμα, και τα γαθυρά υλικά.

Συνεκτικά λοιπόν είναι τα υλικά στα οποία το στάδιο της πλαστικής παραμόρφωσης μέχρι τη θραύση είναι σημαντικά μεγάλο, ενώ

Ψαθυρά είναι τα υλικά που στερούνται αυτής της ιδιότητας γιατί το στάδιο της πλαστικής τους παραμόρφωσης είναι σχεδόν ανύπαρκτο.

Είναι επομένως η συνεκτικότητα ή ολκιμότητα μιά ιδιότητα

αντίθετη απ' την γαθυρότητα, ενώ ο βαθμός της συνεκτικότητας ή γαθυρότητας ενός υλικού αντίστοιχα είναι συνάρτηση του μεγέθους της πλαστικής παραμόρφωσης του υλικού.

4. Το πείραμα της θλίψης.

Τα πειράματα που αφορούν θλιπτική καταπόνηση, γίνονται σε δοκίμια που έχουν ιδιαίτερη μορφή και είναι μικρού μήκους, κυλινδρικά ή τετραγωνικά.

Ο τρόπος εκτέλεσης του πειράματος και η διαδικασία του διαγράμματος είναι ανάλογη με εκείνη στον εφελκυσμό.

Όμως εδώ υπάρχει κάποια δυσκολία στην άσκηση του θλιπτικού φορτίου, γιατί η τριβή πάνω στις επιφάνειες που ασκείται η πίεση, εμποδίζει την ελεύθερη πλευρική διόγκωση του δοκιμίου και επομένως εισάγει διατμητικές τάσεις.

Τα αποτελέσματα του πειράματος είναι εντελώς όμοια με εκείνα του εφελκυσμού. Δηλαδή παρουσιάζονται τα ίδια χαρακτηριστικά σημεία που αντιστοιχούν στο όριο αναλογίας, διαρροής και θραύσης δίνοντας πολύτιμες πληροφορίες στις μηχανικές ιδιότητες των υλικών, και συμπληρώνοντας έτσι την πειραματική έρευνα.

Ψεχωριστό ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα πειράματα θλίψης στα γαθυρά υλικά (χυτοσίδηρος, πέτρες, σκυρόδεμα κ.λπ.) που αλλιώστε προορίζονται σχεδόν αποκλειστικά για θλιπτικές καταπονήσεις.

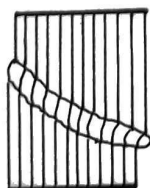
Στα κυβικά δοκίμια σκυροδέματος, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο των τάσεων σε πλάγιες τομές (βελ. 49), το μοναδικό αίτιο θραύσης είναι η υπέρβαση της δια-

τμητικής τους αντοχής.

Γι αυτό παρουσιάζουν μορφή θραύσης που έχει σχήμα διπλής πυραμίδας (βλ. 16α)



Σκυρόδεμα (α)



Τούλα (β)

Στα ξύλα, όταν οι ίνες είναι παράλληλες στον άξονα επιβολής του φορτίου, η θράυση γίνεται με σπάσιμο των ινών σε λοξή γωνία (βλ. 16 β).

Επειδή τα γαδυρά υλικά είναι πιο ανθεκτικά σε καταπόνηση από ορθές παρά από διατμητικές τάσεις, το επίπεδο της θράυσης παρουσιάζεται κεκλιμένο ως προς τον άξονα επιβολής του φορτίου.

Κατά τη γωνία αυτή - συνήθως 45° - η διατμητική επενέργεια γίνεται μέγιστη, λόγω μεγιστοποίησης της διατμητικής τάσης.

Οι διαστάσεις των δοκιμών επηρεάζουν τη μορφή της θράυσης.

Η κυλινδρική μορφή των δοκιμών χρησιμοποιείται συνήθως για το χυτοσίδηρο με σχέση μήκους δοκιμίου προς διάμετρο διατομής

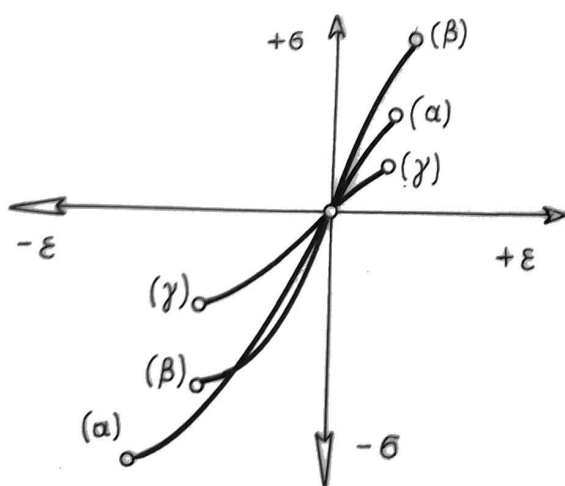
$$l/d = 2. \quad (8)$$

Για τους διάφορους τύπους λίδων και εκυροδεμάτων έχει ει-
σαχθεί γενικά η κυβική μορφή των δοκιμών.

Το διάγραμμα της θλίψης στρέφει, στη γενική περίπτωση, τα κοίλα προς τον άξονα των ανηγμένων επιμηκύνσεων. Λίγες είναι οι εξαιρέσεις, όπως π.χ. στα δέρματα, όπου η καμπύλη στρέφει τα κοίλα προς τον άξονα των τάσεων.

Όμως σε μερικά υλικά, όπως το ελαστικό κόμμι, η καμπύλη παρουσιάζει σημείο καμπής. Στρέφει στον άξονα των ανηγμένων επιμηκύνσεων πρώτα τα κοίλα και μετά τα κυρτά.

Σε άλλα υλικά, όπως π.χ. το μάρμαρο, συμβαίνει το αντίθετο.



(α) χυτοσίδηρος

(β) λίδες

(γ) ξύλα.

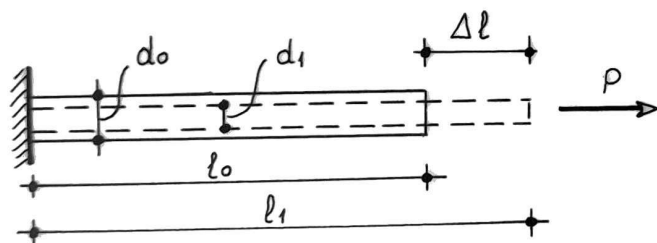
Σχ. 17.

Το διάγραμμα τάσεων - ανηγμένων επιμηκύνσεων για τα γαυρά υλικά έχει τη μορφή του σχήματος 17, με τα όρια διαρροής και θραύσης συγχρόμενα και με μικρές συνήθως παραμορφώσεις θραύσης.

Αξιοσημείωτο είναι ότι ο χυτοσίδηρος, οι λίθοι, το εκυρόδεμα παρουσιάζουν αντοχή σε εφελκυσμό πολύ μικρότερη από εκείνη της θλίψης, ενώ το ξύλο δείχνει μεγάλη αντοχή σε εφελκυσμό.

5. Εγκάρσια παραμόρφωση

Όταν μία πρισματική ράβδος καταπονείται αξονικά, εμφανίζει, όπως γνωρίσαμε ήδη από το νόμο του Hooke, μιά μεταβολή Δl στο μήκος της. Όμως ταυτόχρονα με τη μεταβολή αυτή, εμφανίζεται και μιά εγκάρσια παραμόρφωση, που στην περίπτωση του εφελκυσμού είναι συστολή, ενώ στην θλίψη διαστολή.



Σχ. 18

Με την διαστασιολόγη-
ση του παραπλεύρως σχή-
ματος, ο λόγος:

$$\epsilon_q = \frac{d_1 - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0} \quad (9)$$

ονομάζεται ανηγμέ-

νη εγκάρσια παραμόρφωση.

Ειδικότερα, η ϵ_q στον εφελκυσμό ονομάζεται ανηγμένη ε-
γκάρσια συστολή, ενώ στη θλίψη ανηγμένη εγκάρσια
διαστολή.

Πειραματικά αποδεικνύεται ότι για το ίδιο υλικό, ο λόγος:

$$\left| \frac{\epsilon}{\epsilon_q} \right| = m = \frac{1}{\mu} \quad (10)$$

είναι σταθερός. Η απόλυτη τιμή δικαιολογείται από το γεγονός
ότι τα μεγέθη ϵ και ϵ_q είναι πάντοτε ετερόσημα.

Ο αριθμός m ονομάζεται σταθερά του Poisson, ενώ ο μ συντελεστής εγκάρσιας συστολής.

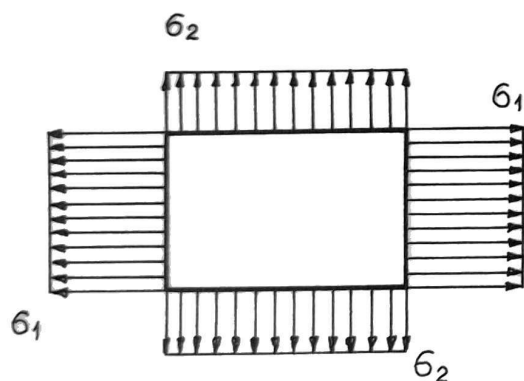
Αποδεικνύεται ότι σε κάθε περίπτωση είναι $m > 2$ (βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ βελ. Π5). Για τους χάλυβες η τιμή του μ κυμαίνεται από $0,25 \div 0,33$ (συνήθως λαμβάνεται $\mu = 0,30$), ενώ για το σκυρόδεμα από $0,10 \div 0,15$.

6. Γενίκευση του νόμου του Hooke.

Η σχέση (10) της προηγούμενης παραγράφου γράφεται και:

$$\varepsilon_y = -\mu \cdot \varepsilon = -\frac{\mu \cdot \sigma}{E} \quad (11)$$

Ύστερα από τα παραπάνω είναι δυνατόν να γενικευθεί ο νόμος του Hooke για την περίπτωση που ένα σώμα, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, υπόκειται σε ορθές τάσεις σ_1 και σ_2 κατά δύο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις.



Σχ. 19

Κατά την διεύθυνση της σ_1 , το σώμα υπόκειται σε ανηγμένη επιμήκυνση:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_1}{E} \quad (12)$$

λόγω της τάσης σ_1 , αλλά και σε ανηγμένη εγκάρσια συστολή:

$$\varepsilon_{yx} = -\mu \frac{\sigma_2}{E}$$

λόγω της τάσης σ_2 . Αν λοιπόν ε_1 είναι η ολική ανηγμένη επιμήκυνση κατά την διεύθυνση της σ_1 , θα είναι:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_{yx} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2) \quad (13)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι η ολική ανηγμένη επιμήκυνση κατά την διεύθυνση της σ_2 , είναι:

$$\epsilon_2 = \epsilon_y + \epsilon_{zy} = \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu \sigma_1) \quad (14)$$

Οι σχέσεις (13) και (14) εκφράζουν τον γενικευμένο νόμο του Hooke. Αν η τάση σ_2 , π.χ. είναι θλιπτική, τότε θα είναι:

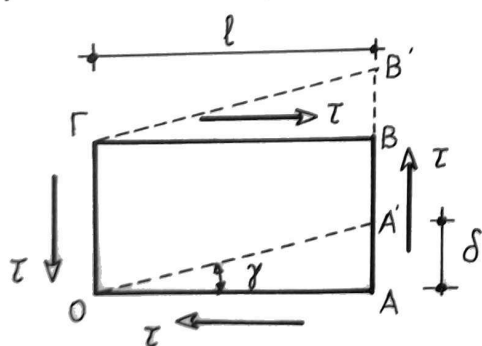
$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 + \mu \sigma_2) \quad (15)$$

7. Γωνιακή παραμόρφωση.

Στο εσωτερικό ενός σώματος που καταπονείται σε επίπεδη εντατική κατάσταση (βλέπε ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ βελ. Π1), θεωρούμε ένα στοιχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, στις έδρες του οποίου ενεργούν μόνο διατμητικές τάσεις. (βλ. 20).

Σύμφωνα με την πρόταση του Cauchy (βελ. 16), οι διατμητικές αυτές τάσεις είναι ίσες μεταξύ τους, έστω τ , και ανά δύο, ή κατευθύνονται προς την κοινή ακμή του πρίσματος, ή απομακρύνονται απ' αυτήν.

Κάτω από την ενέργεια των τάσεων τ , το αρχικά ορθογώνιο στοιχείο — που θα λέμε ότι καταπονείται σε καθαρή διάτμηση — μετασχηματίζεται σε πηλαιογώνιο.



Σχ. 20

Αν γ είναι η πολύ μικρή γωνία που σχηματίζεται από την αρχική και τελική έδρα OA και OA' του παραλληλεπιπέδου, θα είναι:

$$\epsilon_{\phi\gamma} \simeq \gamma = \frac{\delta}{l} \quad (16)$$

Η γωνία γ , εκφρασμένη σε ακτίνια, ονομάζεται γωνιακή παραμόρφωση ή γω-

νί α ο λ ί θ η σ η ς και είναι καθαρός αριθμός.

Εκφράζει λοιπόν το γ , την ολίθνηση των απέναντι εδρών πρίσματος, που απέχουν μεταξύ τους κατά μονάδα.

Με την προϋπόθεση ότι το υλικό υπακούει στο νόμο του Hooke, η γωνία ολίθνησης γ , σαν αποτέλεσμα της διατμητικής τάσης τ , είναι ανάλογη προς αυτήν, και επομένως μπορούμε να γράψουμε, όπως στον τύπο που εκφράζει την ανηγμένη επιμήκυνση $\epsilon = \sigma/E$, τη σχέση:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (17)$$

όπου το G είναι ένα μέγεθος σταθερό με διαστάσεις τάσης. Η τιμή του εξαρτάται απ' τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού και είναι αντίστοιχο του μέτρου ελαστικότητας E στον εφελκυσμό.

Γι αυτό ονομάζεται δεύτερο μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο διάτμησης ή μέτρο ολίθνησης.

Αποδεικνύεται (βλέπε ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ βελ. Π₂), ότι μεταξύ του πρώτου και δεύτερου μέτρου ελαστικότητας, ισχύει η σχέση:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (18)$$

Τιμές του E και G γιά διάφορα υλικά υπάρχουν στον πίνακα I (τέλος του βιβλίου).

8. Συντελεστής ασφάλειας.

Είναι φανερό ότι η καταπόνηση μιάς κατασκευής δεν πρέπει ποτέ νά φτάνει στα τελικά όρια της αντοχής της, γιατί κάτι τέτοιο θα προκαλούσε τη θραύση της ή ανεπιθύμητες παραμορφώσεις. Αυτό σημαίνει ότι οι τάσεις που αναπτύσσονται στο εσωτερικό της κατασκευής πρέπει να είναι μικρότερες από ένα όριο.

Αυτές οι τάξεις ονομάζονται τάξεις λειτουργίας ή συνηθέστερα υπάρχουσες τάξεις και συμβολίζονται με $\sigma_{\text{υη}}$ οι ορθές και $\tau_{\text{υη}}$ οι διατμητικές.

Η τάξη που δεχόμαστε ή ανεχόμαστε σαν όριο να αναπτυχθεί σε μια διατομή του φορέα για να έχουμε ασφαλή κατασκευή ονομάζεται επιτρεπόμενη τάξη και συμβολίζεται με $\sigma_{\text{ελ}}$ (ορθή) και $\tau_{\text{ελ}}$ (διατμητική).

Για την ασφάλεια των κατασκευών θα πρέπει πάντα να είναι:

$$\sigma_{\text{υη}} \leq \sigma_{\text{ελ}} \quad \text{και} \quad \tau_{\text{υη}} \leq \tau_{\text{ελ}}. \quad (19)$$

Ο καθορισμός της επιτρεπόμενης τάξης είναι ένα δύσκολο πρόβλημα της Αντοχής των Υλικών, γιατί κάθε κατασκευή θα πρέπει οπωσδήποτε να είναι:

α) ασφαλής, που σημαίνει ότι η επιτρεπόμενη τάξη πρέπει να είναι μικρή, και

β) οικονομική, που σημαίνει ότι πρέπει να έχει μικρές διατομές, πράγμα που οδηγεί σε μεγάλες επιτρεπόμενες τάξεις. Πρέπει δηλαδή να συμβιβάζονται δύο αντίθετες μεταξύ τους απαιτήσεις.

Για το λόγο αυτό, στο ίδιο υλικό, η επιτρεπόμενη τάξη κυμαίνεται σε ορισμένα όρια, ανάλογα με το είδος της κατασκευής και τον τρόπο καταπόνησης.

Συνήθως σαν κριτήριο για τον καθορισμό της επιτρεπόμενης τάξης λαμβάνεται όχι το όριο ελαστικότητας, αλλά το όριο διαρροής σ_s , ή το όριο θραύσης σ_k (για χάλυβα ειδικά λαμβάνεται το όριο διαρροής).

Ο αριθμός που καθορίζει πόσες φορές μικρότερη από το όριο διαρροής (ή θραύσης) είναι η επιτρεπόμενη τάξη, ονομάζεται συντελεστής ασφαλείας έναντι διαρροής (ή θραύσης) και συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα γ .

Είναι δηλαδή:

$$\nu_s = \frac{\sigma_s}{\sigma_{ελ}} \quad \text{ή} \quad \nu_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{ελ}} \quad (20)$$

Ο συντελεστής ασφάλειας ν είναι αριθμός θετικός και μεγαλύτερος της μονάδας. Η εκλογή του δεν αφήνεται στην κρίση του Μηχανικού, αλλά καθορίζεται δεδμευτικά από Κρατικούς Κανονισμούς.

Άλλωστε, για τις διάφορες κατασκευές πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψη ορισμένοι παράγοντες που παίζουν γενικά αρνητικό ρόλο, όπως:

1. Ελαττώματα στο υλικό των σωμάτων (π.χ. φυσαλίδες στον χυτοσίδηρο και τον ορείχαλκο, ρωγμές ή ρόζοι στο ξύλο κ.λ.π.),
2. Φθορά των υλικών λόγω παλαιότητας ή χρήσης,
3. Ενδεχόμενες αρχικές τάσεις κατασκευής,
4. Συμβατική εκτίμηση των φορτίων υπολογισμού,
5. Απρόβλεπτες δυναμικές φορτίσεις (κρούσεις, ταλαντώσεις, πεδύσεις, βεισμικές δονήσεις κ.λ.π.) και
6. Απλουστευτικές παραδοχές στη διαδικασία των υπολογισμών.

Για τους παραπάνω λόγους θα πρέπει η εκλογή του ν να εκφράζει ένα λογικό συμβιβασμό ανάμεσα στον παράγοντα "ασφάλεια" και στον παράγοντα "οικονομία".

Με την εισαγωγή του συντελεστή ασφάλειας, η επιτρεπόμενη τάση

$$\sigma_{ελ} = \frac{\sigma_s}{\nu_s} \quad \text{ή} \quad \sigma_{ελ} = \frac{\sigma_k}{\nu_k} \quad (21)$$

βρίσκεται πάντα στην περιοχή αναλογίας όπου ισχύει ο νόμος του Hooke και επομένως μπορούν να γίνονται υπολογισμοί.

Οι συντελεστές ασφάλειας για διάφορα υλικά είναι περίπου:

Χάλυβας $\nu = 1,5 \div 1,7$ για το όριο διαρροής

$\nu = 2 \div 3$ για το όριο θραύσης

Ξύλο $\nu = 3 \div 4,5$

Λιθοδομή - πλινθοδομή $\nu = 8 \div 20$.

9. Επίδραση της θερμοκρασίας.

Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι κάθε στερεό σώμα θερμαίνόμενο διατείνεται, ενώ ψυχόμενο συστέλλεται.

Ο νόμος της θερμοκρασιακής αυτής παραμόρφωσης, είναι

$$\Delta l_t = \alpha_t \cdot l \cdot \Delta \theta \quad (22)$$

όπου Δl_t η μεταβολή κάθε γραμμικής διάστασης l του σώματος, του οποίου η θερμοκρασία μεταβάλλεται κατά $\Delta \theta$.

Ο συντελεστής α_t είναι χαρακτηριστικός για κάθε υλικό, έχει διαστάσεις grad^{-1} και ονομάζεται συντελεστής γραμμικής διαστολής. Τιμές του α_t για διάφορα υλικά υπάρχουν στον πίνακα I (τέλος του βιβλίου).

Η σχέση (22) γράφεται και :

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta l_t}{l} = \alpha_t \cdot \Delta \theta. \quad (23)$$

Το ε_t ονομάζεται ανηγμένη παραμόρφωση λόγω θερμοκρασίας και είναι επιμήκυνση ή επιβράχυνση για $\Delta \theta > 0$ ή για $\Delta \theta < 0$ αντίστοιχα.

Είναι φανερό ότι όταν το σώμα είναι ελεύθερο, η μεταβολή θερμοκρασίας δεν μεταβάλλει την εντατική του κατάσταση.

Όταν όμως έχει συνδέσμους που παρεμποδίζουν τη μεταβολή των διαστάσεών του, τότε κατά την διεύθυνση αυτή της παρεμπόδισης εμφανίζονται σημαντικές τάσεις, που πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπ' όψη και εξαρτώνται απ' τη γεωμετρική μορφή του σώματος, τους συνδέσμους και το μέγεθος της μεταβολής της θερμοκρασίας.

Σημειώνεται ότι αν το σώμα βρίσκεται ήδη σε εντατική κατάσταση, τότε σ' αυτή προτίθεται και εκείνη που οφείλεται στη διαφορά θερμοκρασίας, δηλαδή ισχύει και εδώ ο νόμος της επαλληλίας.

Η μεταβολή θερμοκρασίας πρέπει να είναι σταδιακή και ακίνδυνη.

Γιά τον προσδιορισμό των τάσεων, που προκαλούνται σε μία ράβδο με ακλόνητους συνδέσμους, μήκους l , λόγω μεταβολής της θερμοκρασίας κατά $\Delta\theta$, σκεπτόμαστε ως εξής:

Αν η ράβδος ήταν ελεύθερη να επιμηκυνθεί, τότε η αύξηση του μήκους της Δl_t , λόγω αύξησης της θερμοκρασίας κατά $\Delta\theta$, θα δίνονταν προφανώς απ' τη σχέση (22).

Λόγω όμως των ακλόνητων συνδέσμων, η επιμήκυνση αυτή, Δl_t , παρεμποδίζεται. Αυτό γίνεται επειδή οι σύνδεσμοι της ράβδου ασκούν αξονικά μία θλιπτική δύναμη P_t , η οποία, σύμφωνα με το νόμο του Hooke προκαλεί επιβράχυνση Δl , η οποία είναι ίση με την Δl_t .

Όποτε λοιπόν, αν F το εμβαδόν της διατομής της ράβδου και E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της, θα είναι:

$$\Delta l_t = \Delta l \quad \Rightarrow \quad \alpha_t \cdot l \cdot \Delta\theta = \frac{P_t \cdot l}{F \cdot E} \quad (24)$$

Αλλά το πηλίκον

$$\sigma_t = \frac{P_t}{F} \quad (25)$$

είναι η ορθή θλιπτική τάση που αναπτύσσεται στη ράβδο. Άρα:

$$\alpha_t \cdot \Delta\theta = \frac{\sigma_t}{E} \quad \text{ή} \quad \sigma_t = \alpha_t \cdot E \cdot \Delta\theta \quad (26)$$

Η (26) λόγω της (23) μπορεί να γραφεί και:

$$\sigma_t = \varepsilon_t \cdot E \quad (27)$$

όπου ε_t η ανηγμένη επιμήκυνση της ράβδου λόγω $\Delta\theta > 0$.

Είναι προφανές, ότι όταν παρουσιάζεται μείωση της θερμοκρασίας ($\Delta\theta < 0$), ο προσδιορισμός της εφελεκτυτικής ή σ τότε ορθής τάσης που εμφανίζεται στη ράβδο, ακολουθεί ακριβώς το ίδιο σκεπτικό.

Παραδείγματα

1. Σε μία δοκιμή εφελκυσμού κυλινδρικού δοκιμίου είχαμε τα παρακάτω δεδομένα:

Μήκος δοκιμίου $l_0 = 6 \text{ cm}$

Διάμετρος -"- $d_0 = 1,2 \text{ cm}$

Φορτίο στο όριο αναλογίας $P_A = 3.200 \text{ kp}$

-"- -"- -"- θραύσης $P_K = 7.500 \text{ kp}$

Τελικό φορτίο θραύσης $P_{θρ.} = 5.250 \text{ kp}$

Επιμήκυνση στο όριο αναλογίας $\Delta l_A = 0,12 \text{ mm}$

Ολικό μήκος μετά τη θραύση $\Delta l_{\theta} = 7,5 \text{ cm}$

Διάμετρος διατομής θραύσης (λαιμού) $d_{\theta} = 0,9 \text{ cm}$.

Ζητούνται:

- 1) Το όριο αναλογίας
- 2) -"- -"- θραύσης
- 3) Η διάταση και η στένωση
- 4) Η πραγματική τάση θραύσης και
- 5) Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του δοκιμίου.

Λύση.

Αν F_0 και F_{θ} είναι αντίστοιχα η αρχική και τελική διατομή του δοκιμίου, θα έχουμε:

$$F_0 = \frac{\pi d_0^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1,2^2}{4} = 1,131 \text{ cm}^2 \text{ και}$$

$$F_{\theta} = \frac{\pi d_{\theta}^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,9^2}{4} = 0,64 \text{ cm}^2.$$

Η ανηγμένη επιμήκυνση που αντιστοιχεί στο όριο αναλογίας είναι

$$\epsilon_A = \frac{\Delta l_A}{l_0} = \frac{0,012}{6} = 0,002.$$

Τα ζητούμενα υπολογίζονται τώρα με τη δοσμένη σειρά

όπως παρακάτω :

$$1) \text{ Όριο αναλογίας : } \sigma_A = \frac{P_A}{F_0} = \frac{3.200}{1,131} = 2.829 \text{ κρ/см}^2$$

$$2) \text{ Όριο θραύσης : } \sigma_K = \frac{P_K}{F_0} = \frac{12.500}{1,131} = 6.631 \text{ κρ/см}^2$$

$$3) \text{ Διάταση : } \delta = \frac{l_g - l_0}{l_0} 100 = \frac{75 - 6}{6} 100 = 25 \%$$

$$\text{Στένωση : } \gamma = \frac{F_0 - F_g}{F_0} 100 = \frac{1,131 - 0,64}{1,131} 100 = 43,4 \%$$

$$4) \text{ Πραγματική τάση θραύσης : } \sigma_{\rho_{\text{πρ.}}} = \frac{P_{\rho}}{F_g} = \frac{5.250}{0,64} = 8.203 \text{ κρ/см}^2$$

$$5) \text{ Μέτρο ελαστικότητας : } E = \frac{\sigma_A}{\varepsilon_A} = \frac{2.829}{0,002} = 1.414.500 \text{ κρ/см}^2.$$

2. Στο σχήμα 24 φαίνεται η κάτοψη ενός κύβου ακμής $a = 20 \text{ cm}$ που καταπονείται σε καθαρή διάτμηση με διατμητική τάση $\tau = 600 \text{ κρ/см}^2$. Αν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού είναι $E = 780.000 \text{ κρ/см}^2$ και ο συντελεστής εγκάρδιας συστολής (λόγος του Poisson) $\mu = 0,3$, να υπολογιστούν :

α) Η γωνιακή παραμόρφωση γ

β) Η ολίσθηση της πλευράς AB ως προς την πλευρά ΓΟ

γ) Η ανηγμένη επιμήκυνση της διαγωνίου ΟΒ.

Λύση.

α) Η γωνιακή παραμόρφωση γ συνδέεται με τη διατμητική τάση τ μέσω της σχέσης (17) που εκφράζει το νόμο του Hooke για την διάτμηση

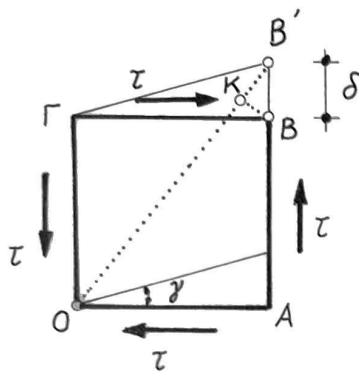
$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

όπου G είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού του οποίου η τιμή προκύπτει απ' τη σχέση (18)

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{780.000}{2(1+0,3)} = 300.000 \text{ κρ/cm}^2$$

Άρα
$$\gamma = \frac{600}{300.000} = 2 \cdot 10^{-3}.$$

β) Αν δ είναι η ολίσθηση της πλευράς AB ως προς την ΓO , τότε θα είναι (σχέση 16):



Σχ. 24

$$\delta = \alpha \gamma = 20 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 0,4 \text{ mm}.$$

γ) Αν απ' το B φέρουμε την κάθετο BK στη διαγώνιο OB' , τότε το τμήμα KB' είναι προφανώς η επιμήκυνση Δl της διαγωνίου OB , της οποίας το μήκος είναι $l = \alpha \sqrt{2}$.

Αλλά είναι

$$KB' = \Delta l = \delta \cdot \sin 45^\circ = \frac{\delta \sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha \gamma \sqrt{2}}{2}.$$

Άρα
$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\frac{\alpha \gamma \sqrt{2}}{2}}{\alpha \sqrt{2}} = \frac{\gamma}{2}.$$

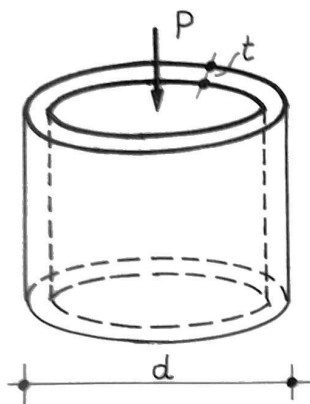
Τον ίδιο συσχετισμό ανάμεσα στα μεγέθη γ και ε εκφράζει και η σχέση (7) του ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ, μολονότι εκεί χρησιμοποιήθηκε διαφορετικό σκεπτικό, που οδήγησε άλλωστε σε διαφορετικό αποτέλεσμα

Όστε η ανηγμένη επιμήκυνση της διαγωνίου OB , (ίση προφανώς με την ανηγμένη επιβράχυνση της AG), είναι το μισό της γωνιακής παραμόρφωσης, δηλαδή $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. Κύλινδρος μικρού μήκους, με δακτυλιοειδή διατομή πάχους t , φορτίζεται αξονικά με θλιπτική δύναμη $P = 45 \text{ ton}$. Το όριο θραύσης του υλικού είναι $\sigma_K = 2.700 \text{ κρ/cm}^2$ και ο συντελεστής ασφάλειας έναντι θραύσης $\gamma_K = 3$. Αν d είναι η ελάχιστη απαιτούμενη εξωτερική διάμετρος του κυλίνδρου, έτσι ώστε $d = 5t$, να υπολογιστούν τα t και d .

Λύση.

Η επιτρεπόμενη θλιπτική τάση που μπορεί να εμφανιστεί στον κύλινδρο, προκύπτει απ' τη σχέση 21 και είναι:



Σχ. 25

$$\sigma_{ελ} = \frac{\sigma_k}{\nu} = \frac{2.700}{3} = 900 \text{ κρ/cm}^2.$$

Η απαιτούμενη διατομή μπορεί τώρα να υπολογιστεί απ' τη σχέση (19)

$$\sigma_{υη} \leq \sigma_{ελ} \quad \text{ή} \quad \frac{P}{F_{αη}} \leq \sigma_{ελ}$$

$$F_{αη} \geq \frac{P}{\sigma_{ελ}} = \frac{45.000}{900} = 50 \text{ cm}^2.$$

Αν d είναι η εξωτερική διάμετρος, τότε $d - 2t$ θα είναι η εσωτερική, θα είναι:

$$F_{αη} = \frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi (d - 2t)^2}{4} = \frac{\pi}{4} (d + d - 2t)(d - d + 2t) = \pi t(d - t).$$

Θα πρέπει λοιπόν

$$\pi t(d - t) \geq 50,$$

ή λόγω του περιορισμού $d = 5t$,

$$\pi t(5t - t) \geq 50 \quad \text{ή} \quad 4\pi t^2 \geq 50 \quad \text{και} \quad t \geq 1,99 \text{ cm.}$$

Εκλέγεται λοιπόν $t = 2 \text{ cm}$, οπότε $d = 5 \cdot 2 = 10 \text{ cm}$.

4. Οι σιδηροτροχιές τρένου έχουν μήκος 15 m και τοποθετούνται σε εποχή, με μέση θερμοκρασία, που προβλέπεται ότι θα είναι κατώτερη απ' την ανώτατη θερινή θερμοκρασία κατά 35°C . Αν το μέτρο ελαστικότητας και ο συντελεστής γραμμικής διαστολής του υλικού των σιδηροτροχιών είναι αντίστοιχα $E = 2 \cdot 10^6 \text{ κρ/cm}^2$ και $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} / ^\circ \text{C}$, να υπολογιστούν:

α) Το απαραίτητο διάκενο μεταξύ δύο σιδηροτροχιών και

β) Οι θλιπτικές τάσεις που θ' αναπτυχθούν αν προβλεφθεί μόνο το μισό διάκενο απ' αυτό που απαιτείται.

Λύση.

α) Το απαραίτητο διάκενο μεταξύ των βιδηροτροχιών θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσο με την διαστολή (επιμήκυνση) Δl_t που οι ίδιες παθαίνουν λόγω αύξησης της θερμοκρασίας. Η διαστολή αυτή υπολογίζεται απ' τη σχέση 22 ότι είναι:

$$\Delta l_t = \alpha_t \cdot l \cdot \Delta \theta = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 15.000 \cdot 35 = 6,3 \text{ mm.}$$

β) Αν κατά την κατασκευή προβλεφθεί μόνο το μισό του διακένου αυτού, δηλαδή 3,15 mm, το άλλο μισό που δεν υπάρχει, γίνεται αιτία παρεμπόδισης των άκρων των βιδηροτροχιών, με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται θλιπτικές τάσεις κατά Hooke, που είναι (σχέση 27)

$$\sigma_t = \varepsilon_t \cdot E = \frac{\Delta l}{l} \cdot E = \frac{3,15}{15.000} \cdot 2 \cdot 10^6 = 420 \text{ κρ/cm}^2.$$

Ασκήσεις.

① Σε πείραμα θλίψης τετραγωνικού πρίσματος μήκους 8 cm και διατομής $4 \times 4 \text{ cm}^2$ είχαμε τα παρακάτω στοιχεία:

- Επιβράχυνση δοκιμίου με φορτίο 7.200 κρ ίση με 0,02 mm, και
- αντίστοιχη επιβράχυνση με -"- 18.000 κρ -"- -"- 0,05 mm.

Να υπολογιστεί το μέτρο ελαστικότητας του παραπάνω υλικού.

Απάντηση: $E = 1,8 \times 10^6 \text{ κρ/cm}^2$.

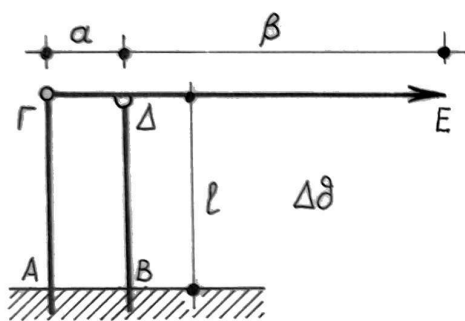
② Χαλύβδινος ελκυστήρας μήκους 12 μέτρων, υπόκειται σε εφελκυστική δύναμη 14 τόννων

Λαμβάνοντας συντελεστή ασφαλείας έναντι διαρροής $\sigma_s = 1,7$, αν το όριο διαρροής και το μέτρο ελαστικότητας του υλικού είναι αντίστοιχα $\sigma_s = 2.380 \text{ κρ/cm}^2$ και $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ κρ/cm}^2$, να υπολογιστούν:

- α) Η διάμετρος του ελκυστήρα και
 β) Η μεταβολή του μήκους του.

Απάντηση: $d = 36 \text{ mm}$, $\Delta l = 7,85 \text{ mm}$.

③. Ο μηχανισμός του σχήματος, που αποτελεί τη βάση λειτουργίας μηχανικού θερμομέτρου, αποτελείται από τις κατακόρυφες ράβδους ΑΓ (τουγκτένιο) και ΒΔ (μαγνήσιο) που είναι πακτωμένες στα Α και Β, ενώ συνδέονται αρθρωτά στα σημεία



Σχ. 26

Γ και Δ με την οριζόντια ράβδο - δείκτη ΓΕ

Αν α_t και α_m είναι αντίστοιχα οι συντελεστές γραμμικής διαστολής των πακτωμένων ράβδων, να υπολογιστεί η κατακόρυφη μετατόπιση δ του δείκτη Ε, για ομοιόμορφη

αύξηση της θερμοκρασίας κατά $\Delta\theta$.

Απάντηση: $\delta = l \cdot \Delta\theta \left[\alpha_m + (\alpha_m - \alpha_t) \frac{\beta}{\alpha} \right]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ - ΘΛΙΨΗ

1. Εφελκυσμός - Θλίψη, σαν καταπονήσεις.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3α, βελ 7, ο εφελκυσμός είναι η απλή καταπόνηση σε μία ράβδο, όπου εφαρμόζονται αξονικά φορτία, δηλαδή δυνάμεις, που, έχοντας σαν φορέα τον άξονα της ράβδου, τείνουν να απομακρύνουν μεταξύ τους δύο ενδιάμεσες εγκάρσιες διατομές της.

Με τον ίδιο τρόπο ορίστηκε και η θλίψη, με τη μόνη διαφορά, ότι τα φορτία ασκούνται έτσι, ώστε δύο ενδιάμεσες εγκάρσιες πάλι διατομές να τείνουν να πλησιάσουν μεταξύ τους.

Κρίνοντας λοιπόν απ' τον τρόπο που επιβάλλονται τα φορτία, οι δύο αυτές καταπονήσεις εμφανίζονται ακριβώς ίδιες.

Όμως, αν εξετάσουμε τις παραμορφώσεις που προκαλούν, θα δούμε ότι έχουν μία βασική διαφορά.

Μία εφελκνόμενη ράβδος τεντώνεται, οπότε, αν υπάρχουν ανωμαλίες στον άξονά της, τείνουν να εξαφανιστούν. Όσο περισσότερο φορτίζεται η ράβδος, τόσο πιο ευθύγραμμος γίνεται ο άξονάς της.

Μία θλιβόμενη όμως ράβδος συμπιέζεται, οπότε, οι τυχόν ανωμαλίες στον άξονά της τείνουν να αυξηθούν και να μεγαλώσουν. Όσο περισσότερο φορτίζεται η ράβδος, τόσο περισσότερο ο άξονάς της τείνει να ξεφύγει απ' την ευθυγραμμία.

Όστε λοιπόν ενώ στον εφελκυσμό έχουμε αύξηση της ευστάθειας της ράβδου, στη θλίψη έχουμε μείωση αυτής.

Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, το γεγονός αυτό οδηγεί

στην εμφάνιση του λυγισμού, που είναι καταπόνηση πολύ δυσμενέστερη από εκείνη της θλίψης.

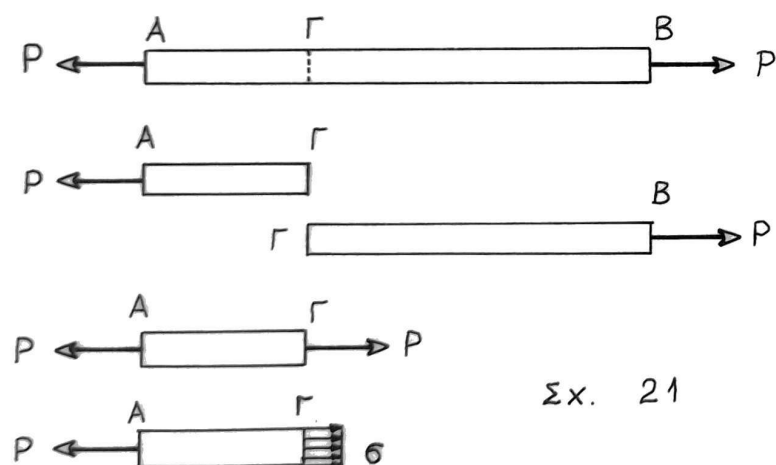
Επομένως είναι απαραίτητο, σε περίπτωση θλίψης, να είμαστε βίγουροι ότι πρόκειται για μία απλή θλιπτική καταπόνηση, αποκλείοντας την περίπτωση του λυγισμού.

Αυτό μπορεί να γίνει με ένα απλό κριτήριο, που δίζαμε ήδη στην παράγραφο 3ε, βελ. 10, αλλά θα εξετάσουμε αναλυτικά στο σχετικό κεφάλαιο περί λυγισμού.

Μ' αυτές τις προϋποθέσεις, ότι ληχθεί για τον απλό εφελκυσμό ισχύει και για την απλή θλίψη.

2. Οι εσωτερικές δυνάμεις και οι τάσεις.

Θεωρούμε τη ράβδο του σχ. 21, όπου ενεργούν αξονικά δύο δυνάμεις P ίσες και αντίθετες. Πραγματοποιώντας τομή στη διατομή Γ , η ράβδος



Σχ. 21

χωρίζεται σε δύο τμήματα, $ΑΓ$ και $ΓΒ$, τα οποία δεν ισορροπούν πιά, γιατί στο καθένα απ' αυτά ενεργεί μόνο η δύναμη P .

Εξετάζοντας π.χ. το τμήμα $ΑΓ$, βλέπουμε ότι

για να ισορροπήσει θα πρέπει να εφαρμόσουμε στο κεντροειδές της διατομής Γ μία αξονική δύναμη P .

Η δύναμη αυτή P είναι η εσωτερική δύναμη στη διατομή Γ , που ονομάζεται συνήθως ορθή ή αξονική.

Όμως, επειδή το τμήμα $ΑΓ$ βρίσκονταν ήδη σε ισορροπία προ της τομής, συμπεραίνουμε ότι τα μόρια της δεξιάς παρειάς της

διατομής Γ ασκούνται πάνω στα μόρια της αριστερής παρειάς της Γ , στοιχειώδεις δυνάμεις, που η συνισταμένη τους P , ήταν η εσωτερική δύναμη.

Οι στοιχειώδεις αυτές δυνάμεις, που ασκούνται από μόριο σε μόριο, δεν εκφράζονται χωριστά, αλλά δίνεται η συνισταμένη τους σ , στη μονάδα επιφάνειας της διατομής:

$$\sigma = \frac{P}{F} \quad (1)$$

που γνωρίζαμε ήδη σαν ορθή τάση.

Η σχέση (1) ισχύει όταν οι στοιχειώδεις δυνάμεις για όλα τα μόρια της διατομής είναι ίσες μεταξύ τους.

Πραγματικά, αυτό συμβαίνει στον απλό εφελκυσμό, μακριά όμως από ειδικές θέσεις, όπως π.χ. στα σημεία των διατομών που ασκούνται συγκεντρωμένες δυνάμεις, σε διατομές που εμφανίζουν κενά (οπές εγκοπές κ.λ.π. (βλέπε ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ σελ. Π3).

Με τη σχέση (1) υπολογίζεται η υπάρχουσα ορθή τάση σ (εφελκυστική ή θλιπτική) συναρτηθεί της αξονικής δύναμης P και του εμβαδού της διατομής F .

3. Παραμορφώσεις.

Οι παραμορφώσεις που είναι δυνατόν να εμφανιστούν στην αξονική καταπόνηση έχουν ήδη περιγραφεί στο δεύτερο κεφάλαιο (παράγραφοι 1 και 5) και αφορούν:

α) Την επιμήκυνση Δl ή την ανηγμένη επιμήκυνση ϵ που δίνονται από το νόμο του Hooke :

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} \quad \text{η} \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad \text{και} \quad (2)$$

β) Την ανηγμένη εγκάρσια συστολή :

$$\epsilon_q = -\mu \epsilon. \quad (3)$$

4. Έλεγχος αντοχής.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) της παρ. 2, βελ. 47 υπολογίζουμε την υπάρχουσα ορθή τάση:

$$\sigma_{\nu\eta} = \frac{P_{\nu\eta}}{F_{\nu\eta}} \quad (4)$$

η οποία, σε συνδυασμό με τη σχέση (19) της βελ. 41, γίνεται:

$$\sigma_{\nu\eta} = \frac{P_{\nu\eta}}{F_{\nu\eta}} \leq \sigma_{\epsilon\eta} \quad (5)$$

όπου $\sigma_{\epsilon\eta}$ η επιτρεπόμενη τάση του υλικού.

Η σχέση (5) μπορεί να γραφεί με τρεις διαφορετικές μορφές και επομένως να χρησιμοποιηθεί για τρεις διαφορετικούς σκοπούς:

α) **Έλεγχος τάσεων**, όπου δίνονται η P και το F και ζητείται η τάση που αναπτύσσεται. Εδώ υπολογίζουμε τη $\sigma_{\nu\eta}$ απ' τη σχέση (4) και στη συνέχεια ελέγχουμε αν είναι $\sigma_{\nu\eta} \leq \sigma_{\epsilon\eta}$, δηλαδή χρησιμοποιούμε ολόκληρη τη σχέση (5).

β) **Διαστασιοδότηση**, όπου δίνονται η δύναμη P και η επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\epsilon\eta}$ και ζητείται η απαιτούμενη διατομή $F_{\alpha\eta}$.

$$\sigma_{\nu\eta} = \frac{P_{\nu\eta}}{F_{\alpha\eta}} \leq \sigma_{\epsilon\eta} \Rightarrow F_{\alpha\eta} \geq \frac{P_{\nu\eta}}{\sigma_{\epsilon\eta}} \quad (6)$$

γ) **Ικανότητα φόρτισης**, όπου δίνονται το F και η επιτρεπόμενη τάση και ζητείται η δύναμη P που μπορεί να αναληφθεί:

$$\sigma_{\nu\eta} = \frac{P}{F} \leq \sigma_{\epsilon\eta} \Rightarrow P \leq F \cdot \sigma_{\epsilon\eta} \quad (7)$$

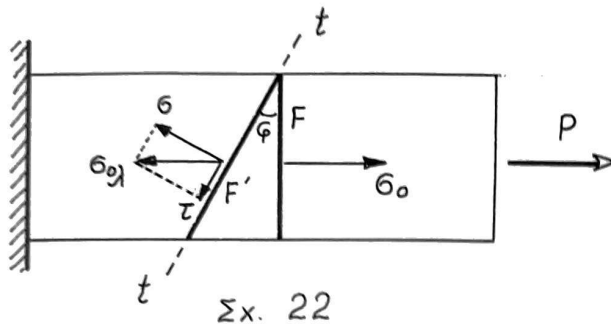
Η τιμή $P = F \cdot \sigma_{\epsilon\eta}$ δίνει το μέγιστο φορτίο $P_{\max}$ που επιτρέπεται να φέρει η ράβδος.

Σημειώνεται ότι για τη χρήση της σχέσης (5), αν η διατομή F που δίνεται:

- 1) είναι μεταβαλλόμενη, θα χρησιμοποιηθεί η μικρότερη $F_{\min}$,
- 2) έχει κενά, θα ληφθεί υπόψη το καθαρό εμβαδόν της.

5. Οι τάσεις σε πλάγιες τομές.

Θεωρούμε τη ράβδο του σχ. 22 που εφελκύεται αξονικά με δύναμη P . Αν F είναι η εγκάρσια διατομή της, τότε η ορθή τάση σ_0 που αναπτύσσεται, θα είναι:



Σχ. 22

$$\sigma_0 = \frac{P}{F} \quad (1)$$

Έστω τώρα μία πλάγια τομή $t-t$, γωνίας φ ως προς την F . Αν F' το εμβαδόν της, θα είναι:

$$F' = \frac{F}{\cos \varphi} \quad (2)$$

Η ολική τάση σ_φ που ενεργεί στην πλάγια τομή F' έχει προφανώς τη διεύθυνση της P , και είναι:

$$\sigma_\varphi = \frac{P}{F'} = \frac{P}{F} \cos \varphi = \sigma_0 \cos \varphi \quad (3)$$

Αναλύοντας τώρα την σ_φ στις συνιστώσες της σ και τ (ορθή και διατμητική τάση της F') κάθετα και παρ/λα προς την τομή, έχουμε:

$$\sigma = \sigma_\varphi \cos \varphi = \sigma_0 \cos^2 \varphi = \frac{\sigma_0}{2} (1 + \cos 2\varphi) \quad (4)$$

$$\tau = \sigma_\varphi \sin \varphi = \sigma_0 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\varphi \quad (5)$$

Διερευνώντας τις σχέσεις (4) και (5) παρατηρούμε ότι:

1. Για $\varphi = 0^\circ$, οπότε $\sin 2\varphi = 0$ και $\cos 2\varphi = 1$, θα έχουμε:

$$\sigma = \sigma_0 = \max \sigma \quad \text{και} \quad \tau = 0,$$

2. Για $\varphi = 45^\circ$, οπότε $\sin 2\varphi = 1$ και $\cos 2\varphi = 0$, θα είναι:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{2} \quad \text{και} \quad \tau = \frac{\sigma_0}{2} = \max \tau,$$

3. Για $\varphi = 90^\circ$, οπότε $\sin 2\varphi = 0$ και $\cos 2\varphi = -1$, θα είναι:

$$\sigma = 0 \quad \text{και} \quad \tau = 0.$$

6. Ο κύκλος του Mohr στη μονοαξονική εντατική κατάσταση.

Από τις σχέσεις (4) και (5) της προηγούμενης σελίδας, μπορούμε να οδηγηθούμε στην κατασκευή του κύκλου Mohr για την περίπτωση καθαρού εφελκυσμού ή θλίψης, απαλείφοντας τη γωνία φ .

Πραγματικά, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται:

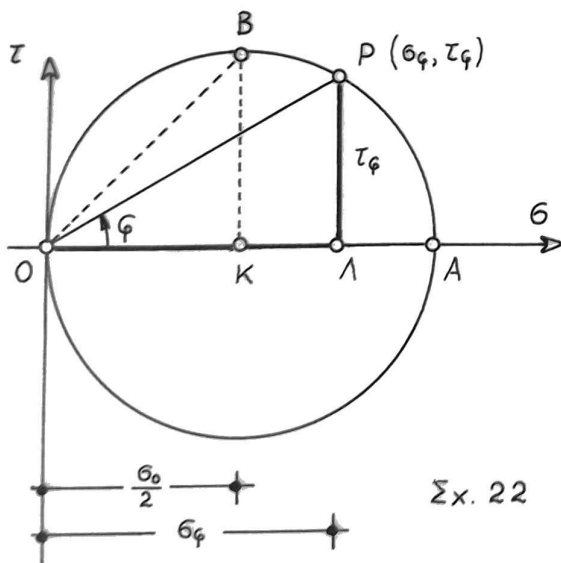
$$\sigma - \frac{\sigma_0}{2} = \frac{\sigma_0}{2} \cos 2\varphi \quad (6)$$

$$\tau = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\varphi \quad (7)$$

Υψώνοντας τις σχέσεις (6) και (7) στο τετράγωνο και προβάδοντας κατά μέλη, παίρνουμε την εξίσωση:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_0}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_0}{2}\right)^2, \quad (8)$$

που σε σύστημα συντεταγμένων σ, τ παριστάνει περιφέρεια κύκλου, που έχει κέντρο το σημείο $K(\sigma_0/2, 0)$ και ακτίνα $r = \sigma_0/2$.



Σχ. 22

Αυτός είναι ο κύκλος του Mohr που περιγράφει πλήρως τη μονοαξονική εντατική κατάσταση και μπορούν με τη βοήθειά του να λυθούν γραφικά όλα τα προβλήματα στα οποία δίνονται δύο απ' τά μεγέθη $\sigma_\varphi, \tau_\varphi$ και φ και ζητείται το τρίτο.

Στο σημείο $P(\sigma_\varphi, \tau_\varphi)$ αντιστοιχεί η λοξή τομή που κλίνει υπό γωνία φ προς την εγκάρσια, όπου ενέργει η ορθή τάση $(OL) = \sigma_\varphi$ και η διατμητική τάση $(LP) = \tau_\varphi$.

Αξιοσημείωτο είναι ότι η μέγιστη διατμητική τάση εμφανίζεται σε επίπεδα που σχηματίζουν γωνία 45° (σημείο B) ή 135° ως προς την εγκάρσια διατομή. Αυτό, για τα υλικά που έχουν μικρή αντοχή σε

διατμήση, έχει σαν συνέπεια, η θραύση τους λόγω αξονικού φορτίου, να γίνεται σε επίπεδα που σχηματίζουν γωνίες 45° με την εγκάρσια διατομή.

Επειδή η ορθή τάση σ_0 είναι κύρια τάση, ο παραπάνω κύκλος του Mohr στη μονοαξονική εντατική κατάσταση, αποτελεί ειδική περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης της θελ. 24, όπου δίνονται οι κύριες τάσεις σ_1 και σ_2 . Πραγματικά, εδώ είναι:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \quad \text{και} \quad \sigma_2 = 0,$$

οπότε ο κύκλος του Mohr κατασκευάζεται εφαπτώμενος του άξονα των τ , με διάμετρο σ_0 . (βλ. 22).

7 Κυλινδρικά δοχεία με λεπτά τοιχώματα.

Παράδειγμα τέτοιων δοχείων είναι οι αεροσυμπιεστές (κ. κοφλέρ), οι λέβητες κ.λ.π. Έχουν λεπτά τοιχώματα, πάχους t και είναι κυλινδρικοί με μέση ακτίνα R , ενώ τα άκρα τους καταλήγουν σε σφαιρικά συνήθως ελάσματα.

Στο εσωτερικό τους υπάρχει ρευστό με υπερπίεση (διαφορά εσωτερικής και εξωτερικής πίεσης) p .

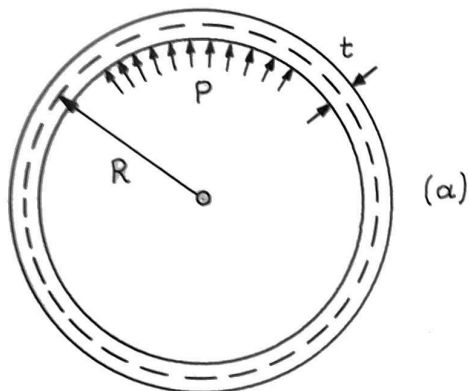
Αν και οι δυνάμεις που ασκούνται λόγω της p είναι κάθετες στον άξονα του σώματος, η καταπόνησή του δεν είναι κάμψη, αλλά απλός εφελκυσμός.

Για την απόδειξη αυτού, και ταυτόχρονα τον προσδιορισμό των εσωτερικών δυνάμεων που αναπτύσσονται σ' οποιαδήποτε εγκάρσια ή κατά μήκος τομή, θεωρούμε ένα τμήμα του τοιχώματος του δοχείου που κόβεται από δύο τομές, κάθετες στον άξονα και απέχουσες κατά μονάδα, και από δύο άλλες τομές που περιέχουν τον άξονα και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 2ω .

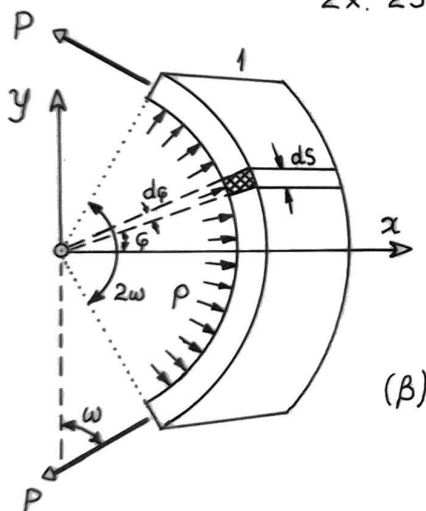
Αυτό ισοδυναμεί με το κόψιμο ενός βραχιολίου μοναδιαίου πλάτους, και στη συνέχεια αποκοπή απ' αυτό τμήματος (όνυχα) που σχηματίζει

επίκεντρο γωνία 2ω . (βλ. 23 β).

Το τμήμα αυτό βρίσκεται σε ισορροπία κάτω από τις πιέσεις p που ασκούνται στο εσωτερικό του τοίχωμα, και τις εσωτερικές δυνάμεις P που ενεργούν στις ακραίες διατομές, οι οποίες για λόγους συμμετρίας, είναι ίσες μεταξύ τους.



Σχ. 23



Επομένως θα ισχύει ο μηδενισμός του αλγεβρικού αθροίσματος των οριζοντιών δυνάμεων, δηλ $\sum \vec{x} = 0 \Rightarrow$

$$\int_{-\omega}^{+\omega} dS \cdot p \cdot \sin \varphi - 2P \cdot \eta \mu \omega = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{-\omega}^{+\omega} (R \cdot d\varphi) \cdot p \cdot \sin \varphi - 2P \eta \mu \omega = 0 \Rightarrow$$

$$R \cdot p \int_{-\omega}^{+\omega} \sin \varphi d\varphi = 2P \eta \mu \omega \Rightarrow$$

$$R \cdot p [\eta \mu \varphi]_{-\omega}^{+\omega} = 2P \eta \mu \omega \Rightarrow$$

$$R \cdot p (\eta \mu \omega + \eta \mu \omega) = 2P \eta \mu \omega,$$

ή τελικά:

$$R \cdot p = P = \text{σταθ.}$$

Όστε λοιπόν η εσωτερική δύναμη P είναι ανεξάρτητη απ' τη γωνία ω και έχει σταθερή τιμή για κάθε διατομή του δακτυλίου.

Άρα ο δακτύλιος, και επομένως τα τοιχώματα του δοχείου καταπονούνται σε εφελκυσμό.

Αν τώρα σ_t είναι η ορθή τάση που αναπτύσσεται στην παράλληλη επιφάνεια του δακτυλίου, θα είναι:

$$p = t \cdot \sigma_t = R \cdot p \Rightarrow \sigma_t = \frac{R \cdot p}{t} \quad (9)$$

Η τάση σ_t ονομάζεται εφ'απτομενική.

Όμως η σ_t δεν είναι η μόνη τάση που εμφανίζεται στην παράλληλη επιφάνεια του κυλίνδρου. Γιατί είναι φανερό ότι εμφανίζονται και τάσεις σ_a που είναι παράλληλες προς τον άξονα του δοχείου και ονομάζονται επιμήκειες τάσεις.

Ο υπολογισμός τους γίνεται αν ληφθεί υπ' όψη η δύναμη Π που ασκείται σε κάθε πάτο του κυλίνδρου:

$$\Pi = \pi \cdot R^2 \cdot \rho,$$

και η δύναμη αυτή κατανεμηθεί στην εγκάρσια διατομή του κυλίνδρου, που έχει εμβαδόν:

$$F = 2\pi R \cdot t.$$

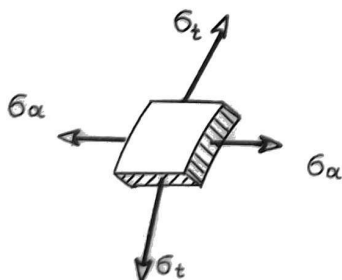
Επομένως, θα είναι:

$$\Pi = F \cdot \sigma_a \Rightarrow \pi R^2 \cdot \rho = 2\pi R \cdot t \cdot \sigma_a \Rightarrow \sigma_a = \frac{R \cdot \rho}{2t} \quad (10)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (9) και (10), παρατηρούμε ότι:

$$\sigma_t = 2\sigma_a. \quad (11)$$

Κάθε στοιχείο λοιπόν της παράλληλης επιφάνειας του δοχείου που κόβεται με δύο τομές κάθετες στον άξονα και δύο τομές που να περιέχουν τον άξονα (βλ. 24) βρίσκεται σε επίπεδη εντατική κατάσταση.



Σχ. 24

Οι τάσεις σ_t και σ_a είναι κύριες τάσεις, γιατί στα επίπεδα που έγιναν οι τομές δεν υπάρχουν διατμητικές τάσεις.

Η μέγιστη διατμητική τάση που μπορεί ν' αναπτυχθεί στο στοιχείο, δίνεται απ'

τη σχέση (25) της βελ. 21, όπου $\sigma_x = \sigma_t$, $\sigma_y = \sigma_a$ και $\tau_{xy} = 0$,

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_t - \sigma_a) = \frac{\sigma_t}{4} = \frac{\sigma_a}{2}. \quad (12)$$

8. Στατικά αόριστα προβλήματα.

Θα λέμε ότι ένα πρόβλημα είναι στατικά αόριστο, όταν οι στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας που διατίθενται δεν επαρκούν για τον καθορισμό των εσωτερικών δυνάμεων.

Η διαφορά ανάμεσα στον αριθμό που εκφράζει τις άγνωστες δυνάμεις που θέλουμε να προσδιορίσουμε και στον αριθμό των εξισώσεων ισορροπίας της Στατικής που διατίθενται, παριστάνει τον βαθμό της στατικής αοριστίας.

Στην περίπτωση ενός στατικά αόριστου προβλήματος, αν στις υπεράριθμες άγνωστες δυνάμεις δώσουμε αυθαίρετες τιμές, τότε θα προκύψουν για τις υπόλοιπες άγνωστες δυνάμεις συγκεκριμένες τιμές.

Τούτο βέβαια σημαίνει ότι υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Όμως, απ' αυτές τις λύσεις, μία μόνον θ' ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.

Το ποιά θα είναι αυτή, θα βρεθεί με συμπληρωματικές εξισώσεις, ισάριθμες του βαθμού στατικής αοριστίας, που θα εκφράζουν τις συνθήκες συμβιβασμού των παραμορφώσεων.

Την πρόθετη ή πρόθετες αυτές εξισώσεις παίρνουμε, αφού παρατηρήσουμε προεχτικά την παραμόρφωση του σώματος.

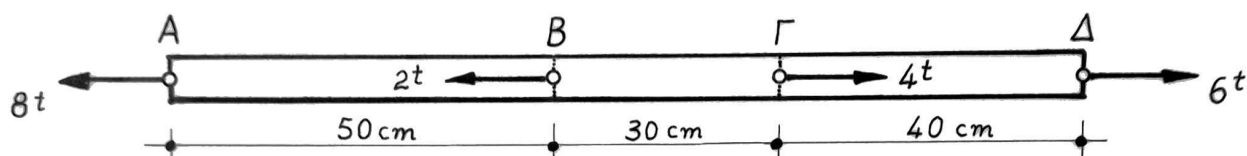
Παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων υπάρχουν στο αντίστοιχο κεφάλαιο των λυμένων ασκήσεων.

Παραδείγματα.

1. Η ράβδος του σχήματος έχει διατομή 8 cm^2 και καταπονείται αξονικά με τις δυνάμεις που σημειώνονται στις αντίστοιχες διατομές. Αν $E = 2 \cdot 10^6 \text{ κρ/cm}^2$, να υπολογιστούν:

- Οι τάσεις που αναπτύσσονται σε κάθε τμήμα και
- Η μεταβολή μήκους της ράβδου.

Λύση.



Σχ. 31

α) Μετά την διαπίστωση της ισορροπίας των οριζοντίων δυνάμεων της ράβδου ($\sum \vec{x} = 0$), προσδιορίζουμε την αξονική δύναμη που εμφανίζεται σε κάθε τμήμα χωριστά, παίρνοντας το αλγεβρικό άθροισμα των δυνάμεων αριστερά ή δεξιά από τυχούσα διατομή που ανήκει στο εξεταζόμενο τμήμα.

Έτσι οι ορθές τάσεις (εφελκυστικές ή θλιπτικές) κάθε τμήματος θα προκύψουν σαν πηλίκο της εκάστοτε δύναμης διά της αντίστοιχης διατομής του εξεταζομένου τμήματος. Δηλαδή:

Τμήμα AB (δυνάμεις από αριστερά)

$$N_{AB} = +8t \text{ (εφελκυστική)} \Rightarrow \sigma_{AB} = \frac{8.000}{8} = +1.000 \text{ κρ/cm}^2$$

Τμήμα BΓ (δυνάμεις από αριστερά)

$$N_{B\Gamma} = 8 + 2 = +10t \text{ (εφελκυστ.)} \Rightarrow \sigma_{B\Gamma} = \frac{10.000}{8} = +1.250 \text{ κρ/cm}^2$$

Τμήμα ΓΔ (δυνάμεις από δεξιά)

$$N_{\Gamma\Delta} = +6t \text{ (εφελκυστ.)} \Rightarrow \sigma_{\Gamma\Delta} = \frac{6.000}{8} = +750 \text{ κρ/cm}^2$$

β) Η μεταβολή μήκους της ράβδου μπορεί τώρα να υπολο-

λογίζεται με δύο τρόπους:

1) Προσδιορίζοντας το αλγεβρικό άθροισμα των επί μέρους επιμηκύνσεων (ή επιβραχύνσεων) κάθε τμήματος, μιάς και είναι γνωστή η αντίστοιχη αξονική δύναμη. Χρησιμοποιείται ιδιαίτερα όταν η διατομή είτε το υλικό της ράβδου είναι διαφορετικά κατά τμήματα. Έτσι έχουμε:

Τμήμα AB

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot l_{AB}}{F_{AB} \cdot E_{AB}} = \epsilon_{AB} \frac{l_{AB}}{E_{AB}} = 1.000 \frac{50}{2 \cdot 10^6} = 0,025 \text{ cm} = +0,25 \text{ mm}.$$

Τμήμα ΒΓ

$$\Delta l_{BG} = \epsilon_{BG} \frac{l_{BG}}{E_{BG}} = 1.250 \frac{30}{2 \cdot 10^6} = 0,019 \text{ cm} = +0,19 \text{ mm}.$$

Τμήμα ΓΔ

$$\Delta l_{GD} = \epsilon_{GD} \frac{l_{GD}}{E_{GD}} = 750 \frac{40}{2 \cdot 10^6} = 0,015 \text{ cm} = +0,15 \text{ mm}.$$

$$\text{Άρα: } \Delta l_{\Sigma} = 0,25 + 0,19 + 0,15 = 0,59 \text{ mm}.$$

2) Με τη μέθοδο της επαλληλίας, που εφαρμόζεται μόνο σε ράβδο σταθερής διατομής και υλικού, όπως εδώ.

Θεωρούμε το ένα άκρο της ράβδου, π.χ. το Α, πακτωμένο, δηλαδή σταθερό και προσδιορίζουμε το αλγεβρικό άθροισμα των επιμηκύνσεων (ή επιβραχύνσεων) που θα προκαλούσε κάθε δύναμη χωριστά, αν δρούσε μόνη της στο μήκος της ράβδου που ορίζεται απ' τη διατομή όπου εφαρμόζεται η δύναμη, μέχρι το σταθερό άκρο, το Α.

Η εφελκυστική ή θλιπτική δύναμη ως προς το σταθερό άκρο, καθορίζει αντίστοιχα την επιμήκυνση ή επιβράχυνση. Έτσι είναι:

$$\Delta l_B = - \frac{2.000 \cdot 50}{F \cdot E} = -10 \frac{10^4}{FE} \text{ cm}$$

$$\Delta l_G = + \frac{4.000 (50 + 30)}{F \cdot E} = 32 \frac{10^4}{FE} \text{ cm}$$

$$\Delta l_D = + \frac{6.000 (50 + 30 + 40)}{F \cdot E} = 72 \frac{10^4}{FE} \text{ cm}$$

$$\text{Άρα: } \Delta l_{\Sigma} = \frac{10^4}{FE} (-10 + 32 + 72) = \frac{94 \cdot 10^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^6} = 0,059 \text{ cm} = 0,59 \text{ mm}.$$

2. Ράβδος σταθερής διατομής είναι κρεμασμένη απ' το ένα της άκρο και φέρει σαν φορτίο μόνο το δικό της βάρος.

Απ' τα στοιχεία της ράβδου δίνονται το μήκος l , η διατομή F , το μέτρο ελαστικότητας E και το ειδικό βάρος γ .

Να υπολογιστεί η επιμήκυνση Δl που παθαίνει η ράβδος.

Λύση.

Η εφελκυστική δύναμη που εμφανίζεται σε κάθε οριζόντια διατομή της ράβδου, προκαλείται απ' το βάρος του υλικού που βρίσκεται κάτω απ' αυτή, άρα είναι μεταβαλλόμενο μέγεθος.

Επομένως η συνολική επιμήκυνση της ράβδου είναι αποτέλεσμα των μερικών επιμηκύνσεων που εμφανίζονται σε κάθε αλειροστό τμήμα της, το οποίο εφελκύνεται με το βάρος της υπόλοιπης ράβδου που κρέμεται κάτω απ' αυτό.

Αν λοιπόν dy είναι το μήκος στοιχειώδους τμήματος της ράβδου που απέχει απόσταση y απ' το κάτω άκρο της, τότε η εφελκυστική δύναμη που ασκείται σ' αυτό, είναι:

$$P_y = F \cdot y \cdot \gamma.$$

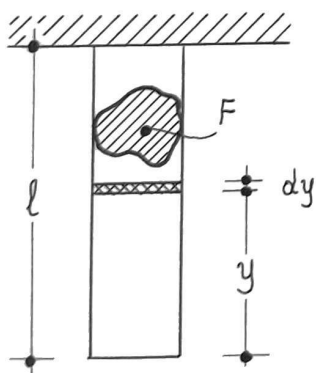
Η δύναμη αυτή προκαλεί στο στοιχειώδες τμήμα επιμήκυνση Δdy , η οποία κατά Hooke είναι:

$$\Delta dy = \frac{P_y \cdot dy}{F \cdot E} = \frac{F \cdot y \cdot \gamma \cdot dy}{F \cdot E} = \frac{\gamma}{E} y \cdot dy.$$

Ολοκληρώνοντας σ' όλο το μήκος της ράβδου, προκύπτει η συνολική επιμήκυνση

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dy = \frac{\gamma}{E} \int_0^l y dy = \frac{\gamma}{E} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^l = \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

Σημειώνεται ότι η ολική επιμήκυνση που παράγεται απ' το βάρος της ίδιας της ράβδου είναι ανεξάρτητη της διατομής της και ισούνται με τη μισή επιμήκυνση που θα προκαλούσε μία δύναμη



Σχ. 32

ίση με το βάρος της ράβδου, αν είχε τοποθετηθεί στην άκρη της. Πραγματικά, η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{(\gamma l \cdot F) l}{2FE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{W \cdot l}{F \cdot F},$$

όπου W το βάρος της ράβδου.

3. Κωνική ράβδος κυκλικής διατομής κρέμεται απ' τη βάση της όπως στο σχήμα. Με γνωστά τα l , D , E και γ , να υπολογιστεί η επιμήκυνση Δl της ράβδου λόγω ιδίου βάρους.

Λύση.

Ακολουθώντας το βκεπτικό της προηγούμενης άσκησης, η εφελκυστική δύναμη P_y , που ασκείται στο στοιχειώδες τμήμα μήκους dy και διαμέτρου d του σχήματος, και είναι

$$P_y = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot y \cdot \gamma,$$

προκαλεί επιμήκυνση Δdy που είναι:

$$\Delta dy = \frac{P_y \cdot dy}{F \cdot E} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot y \cdot \gamma \cdot dy}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot E} = \frac{\gamma}{3E} \cdot y \cdot dy.$$

Άρα η ολική επιμήκυνση Δl της ράβδου, θα είναι:

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dy = \frac{\gamma}{3E} \int_0^l y \cdot dy = \frac{\gamma}{3E} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^l = \frac{\gamma l^2}{6E}.$$

Και εδώ παρατηρούμε ότι η επιμήκυνση Δl είναι ανεξάρτητη της διαμέτρου D της κωνικής βάσης και ισούται με τη μισή επιμήκυνση που θα προκαλούσε μία δύναμη ίση με το βάρος της κωνικής ράβδου, τοποθετημένη όμως στην άκρη ίδιας κυλινδρικής ράβδου, με διατομή ίση με την κωνική βάση. Πραγματικά, είναι:

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{6E} = \frac{(\frac{1}{3} F \cdot l \cdot \gamma) 3l}{6FE} = \frac{Wl}{2FE} \quad (W = \text{βάρος κωνικής ράβδου}).$$

4. Αεροθάλαμος μήκους $2,50\text{ m}$ και διαμέτρου $1,10\text{ m}$ πρέπει να λειτουργήσει με υπερπίεση $p=10\text{ at}$. Αν $E=2\cdot 10^6\text{ κρ/εκ}^2$, $\mu=0,3$ και $\sigma_{ελ}=1000\text{ κρ/εκ}^2$, ζητούνται:

α) Ο καθορισμός του ελάχιστου πάχους τοιχώματος t , σε ακέραια χιλιοστά,

β) Οι τάσεις κατά διατομή και γενέτειρα που θ' αναπτυχθούν στο υλικό της παράπλευρης επιφάνειας μετά την εκλογή του πάχους καθώς και η μέγιστη διατμητική τάση $\tau_{\max}$,

γ) Η ανηγμένη αύξηση του μήκους, της διαμέτρου και της παράπλευρης επιφάνειας του αεροθαλάμου και

δ) Η αντίστοιχη αύξηση των προηγούμενων μεγεθών (μήκος, διάμετρος, παράπλευρη επιφάνεια).

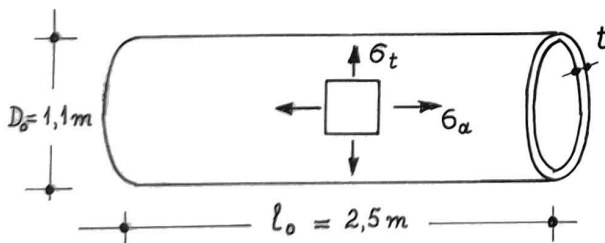
Λύση.

α) Όπως είναι γνωστό η σχέση που συνδέει τις τάσεις σ_t και σ_a που αναπτύσσονται στην παράπλευρη επιφάνεια του αεροθαλάμου είναι

$$\sigma_t = 2 \sigma_a,$$

όπου σ_t η μεγαλύτερη (κατά διατομή) τάση, που είναι (σχέση 9)

$$\sigma_t = \frac{R \cdot p}{t}.$$



Σχ. 34

Επομένως κριτήριο για τον προσδιορισμό του πάχους του τοιχώματος θα αποτελέσει η παραπάνω τάση σ_t , η τιμή

της οποίας δεν θα πρέπει να ξεπερνά την $\sigma_{ελ}$, δηλαδή:

$$\sigma_t \leq \sigma_{ελ} \quad \text{ή} \quad \frac{R \cdot p}{t} \leq \sigma_{ελ} \quad \text{και} \quad t \geq \frac{R \cdot p}{\sigma_{ελ}} = \frac{55 \cdot 10}{1000} = 0,55\text{ cm}.$$

Εκλέγεται συνεπώς πάχος τοιχώματος $t = 6\text{ mm}$.

β) Οι τάσεις σ_t και σ_a που θ' αναπτυχθούν τώρα κατά δι-

ατομή και γενέτειρα αντίστοιχα, είναι:

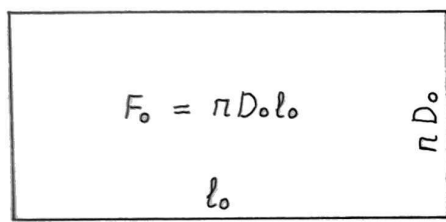
$$\sigma_t = \frac{R \cdot p}{t} = \frac{55 \cdot 10}{0,6} = 917 \text{ κρ/εκ}^2 < \sigma_{\text{ελ}}$$

και $\sigma_a = \frac{\sigma_t}{2} = 458 \text{ κρ/εκ}^2$

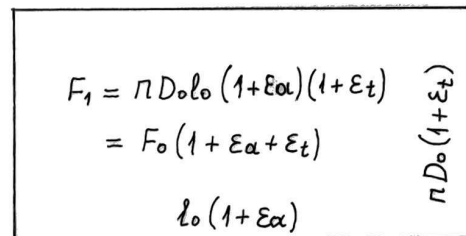
Η μέγιστη διατμητική τάση $\tau_{\max}$, όπως προκύπτει απ' τη σχέση 12, είναι:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_a}{2} = 229 \text{ κρ/εκ}^2.$$

γ) Το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας του αεροθαλάμου πριν απ' την παραμόρφωση είναι ένα ορθογώνιο (6x. 35α) μήκους l_0 και ύψους πD_0 .



(α)



(β)

Σχ. 35

Μετά τη λειτουργία του αεροθαλάμου, λόγω των τάσεων σ_t και σ_a που αναπτύσσονται, η παράπλευρη επιφάνεια αυξάνεται, με αποτέλεσμα, οι νέες διαστάσεις του ορθογωνίου που θα προκύψουν να είναι (6x. 35β)

μήκος $l_1 = l_0(1+\epsilon_a)$ και ύψος $\pi D_1 = \pi D_0(1+\epsilon_t)$, όπου ϵ_a και ϵ_t είναι αντίστοιχα η ανηγμένη αύξηση του μήκους και ύψους (δηλαδή της διαμέτρου) του νέου ορθογωνίου, οι οποίες απ' το γενικευμένο νόμο του Hooke (βελ 38), είναι:

$$\epsilon_a = \frac{1}{E} (\sigma_a - \mu \sigma_t) = \frac{\sigma_t}{E} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) = \frac{917}{2 \cdot 10^6} (0,5 - 0,3) = 9,17 \cdot 10^{-5}$$

$$\epsilon_t = \frac{1}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_a) = \frac{\sigma_t}{E} \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) = \frac{917}{2 \cdot 10^6} (1 - 0,15) = 3,9 \cdot 10^{-4}.$$

Αν τώρα F_0 και F_1 είναι αντίστοιχα η αρχική και τελική επιφάνεια του ορθογωνίου, θα έχουμε:

$$F_0 = \pi l_0 D_0 \quad \text{και}$$

$$F_1 = \pi l_1 D_1 = \pi l_0 D_0 (1 + \varepsilon_\alpha)(1 + \varepsilon_t) = F_0 (1 + \varepsilon_\alpha + \varepsilon_t),$$

παραλείποντας χωρίς αιδοιό το γινόμενο των παράγοντα $\varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_t$.

Άρα η ανηγμένη αύξηση της παράλληλης επιφάνειας του αεροθαλάμου, είναι

$$\varepsilon_F = \frac{F_1 - F_0}{F_0} = \frac{F_0 (1 + \varepsilon_\alpha + \varepsilon_t - 1)}{F_0} = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} \left(\frac{1}{2} - \mu + 1 - \frac{\mu}{2} \right)$$

$$\eta \quad \varepsilon_F = \frac{3}{2} (1 - \mu) \frac{\sigma_t}{E} = \frac{3}{2} (1 - 0,3) \frac{917}{2 \cdot 10^6} = 4,81 \cdot 10^{-4}$$

δ) Η αντίστοιχη αύξηση που προκύπτει τώρα για το μήκος, τη διάμετρο και την παράλληλη επιφάνεια, είναι:

$$\Delta l = l_0 \cdot \varepsilon_\alpha = 2500 \cdot 9,17 \cdot 10^{-5} = 0,23 \text{ mm},$$

$$\Delta D = D_0 \cdot \varepsilon_t = 1100 \cdot 3,9 \cdot 10^{-4} = 0,43 \text{ mm} \quad \text{και}$$

$$\Delta F = F_0 \cdot \varepsilon_F = \pi \cdot 110 \cdot 250 \cdot 4,81 \cdot 10^{-4} = 41,55 \text{ cm}^2.$$

Στατικά αόριστα προβλήματα εφελκυσμού-θλίψης.

1. Πρισματική ράβδος που είναι πακτωμένη στα άκρα της, φορτίζεται στις διατομές 1, 2, ..., i με τα αξονικά φορτία $P_1, P_2, \dots, P_i$ αντίστοιχα.

Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις που εμφανίζονται στις στηρίξεις A και B, όταν στη ράβδο:

- ενεργεί μόνο η δύναμη P_1 και
- ενεργούν όλες οι δυνάμεις μαζί.

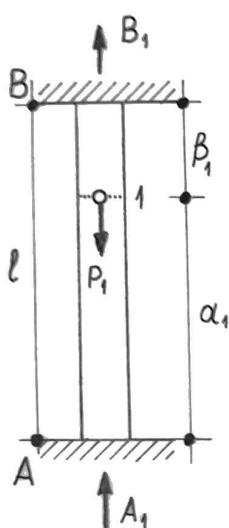
Λύση.

α) Αν P_1 ^{είναι} η μοναδική δύναμη που ενεργεί στη διατομή 1 της ράβδου, προκαλώντας στις στηρίξεις A και B αντιδράσεις A_1 και B_1 αντίστοιχα, τότε θα είναι:

$$\sum y^{\uparrow} = 0 \Rightarrow A_1 + B_1 - P_1 = 0 \Rightarrow A_1 + B_1 = P_1. \quad (\alpha)$$

Είναι προφανές ότι η εξίσωση (α) δεν επαρκεί για τον υπολογισμό των δύο αγνώστων A_1 και B_1 . Γι' αυτό θ' αναζητήσουμε άλλη μία εξίσωση συμβιβάζοντας τις παραμορφώσεις.

Αν α_1 και β_1 είναι οι αποστάσεις της διατομής 1 απ' τις στηρίξεις A και B αντίστοιχα, τότε παρατηρούμε ότι:



η μεν A_1 θλίβει το κάτω τμήμα της ράβδου, μήκους α_1 , προκαλώντας επιβράχυνση

$$\Delta \alpha_1 = \frac{A_1 \cdot \alpha_1}{EF},$$

ενώ ταυτόχρονα η B_1 εφελκύει το πάνω τμήμα της ράβδου, μήκους β_1 , προκαλώντας επιμήκυνση

$$\Delta \beta_1 = \frac{B_1 \cdot \beta_1}{EF},$$

που είναι αναγκαστικά ίσες της $\Delta \alpha_1$.

Το συμβιβαστόν δηλαδή των παραμορφώσεων εκφράζεται εδώ με την απλή σκέψη, ότι κατά την μετακίνηση της διατομής 1 προς τα κάτω λόγω της δύναμης P_1 , εμφανίζεται στο τμήμα β_1 τόση επιμήκυνση, όση είναι η επιβράχυνση του τμήματος α_1 , έτσι ώστε το αλγεβρικό άθροισμα των παραμορφώσεων της ράβδου να είναι μηδέν, μιάς και τα στεγνά της είναι αμετακίνητα. Δηλαδή

$$\Sigma \Delta l = 0 \quad \text{ή} \quad -\Delta \alpha_1 + \Delta \beta_1 = 0$$

$$\text{Άρα} \quad \frac{A_1 \cdot \alpha_1}{EF} = \frac{B_1 \cdot \beta_1}{EF} \quad \text{ή} \quad A_1 \alpha_1 = B_1 \beta_1$$

$$\text{και} \quad \frac{A_1}{\beta_1} = \frac{B_1}{\alpha_1} = \frac{A_1 + B_1}{\beta_1 + \alpha_1} = \frac{P_1}{l}$$

$$\text{επομένως} \quad A_1 = \frac{P_1 \beta_1}{l} \quad \text{και} \quad B_1 = \frac{P_1 \alpha_1}{l}. \quad (\beta)$$

Ισχύει λοιπόν και εδώ ο κανόνας που ισχύει για τις αντιδρά-

σεις αμφιέριστης δοκού που φορτίζεται με ένα κάθετο φορτίο, δηλαδή "αντίδραση ίσον δύναμη επί αντιβραχίονα διά του ανοίγματος".

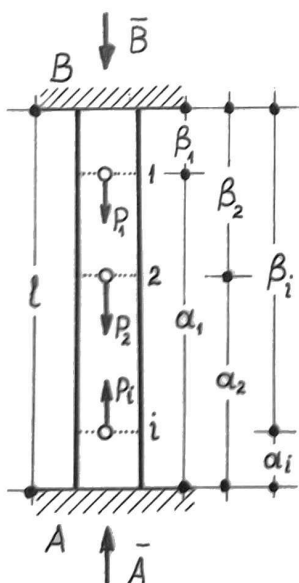
Σημειώνεται εδώ ότι η φορά των A_1 και B_1 θα πρέπει να είναι πάντα αντίθετη της P_1 , ώστε να προκύπτει πράγματι εφελκυσμός στο πίσω της δύναμης τμήμα της ράβδου και θλίψη στο μπροστινό της.

β) Σε περίπτωση δράσης περιβοτέρων της μίας αξονικών δυνάμεων, όχι αναγκαστικά της ίδιας φοράς, οι αντιδράσεις $\bar{A}$ και $\bar{B}$ που θα εμφανιστούν στις στηρίξεις, θα είναι το αλγεβρικό άθροισμα των επί μέρους αντιδράσεων που προκύπτουν απ' τις σχέσεις (β), δηλαδή:

$$\bar{A} = \sum A_i = \frac{1}{l} \sum (P_i \beta_i) \quad \text{και} \quad \bar{B} = \sum B_i = \frac{1}{l} \sum (P_i \alpha_i)$$

Η διαδικασία υπολογισμού των αντιδράσεων συνογίζεται τελικά στα παρακάτω:

- 1) Εκλέγουμε αυθαίρετη φορά σε κάθε αντίδραση,
- 2) Καθορίζουμε τη θετική φορά των αξονικών δυνάμεων και
- 3) Εκφράζουμε το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των γινομένων όλων των αξονικών δυνάμεων (φορτίων και αντιδράσεων) που δρουν στη ράβδο, επί τις αποστάσεις αυτών (των δυνάμεων) από το ένα άκρο της ράβδου, π.χ. το Β, οπότε βρίσκουμε την αντίδραση $\bar{A}$.



Κάθε όρος του γινομένου είναι θετικός, εφόσον η αντίστοιχη δύναμη είναι ομόφορη προς τη θετική φορά των αξονικών δυνάμεων. Δηλαδή:

$$\sum (N_i \beta_i)_{\bar{B}}^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow \bar{A}l + P_i \beta_i - P_2 \beta_2 - P_1 \beta_1 = 0 \Rightarrow \bar{A} = \dots \quad (i)$$

$$\text{ή} \quad \sum (N_i \alpha_i)_{\bar{A}}^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow P_i \alpha_i - P_2 \alpha_2 - P_1 \alpha_1 - \bar{B} \cdot l = 0 \Rightarrow \bar{B} = \dots$$

Αν το πρόσημο που θα προκύψει για την

αντίδραση είναι θετικό, σημαίνει ότι η αυθαίρετη φορά που εκλέχτηκε (για την αντίδραση) είναι σωστή, αν όμως είναι αρνητικό, σημαίνει ότι η φορά είναι λάθος και η σωστή είναι η αντίθετή της.

Μετά τον προσδιορισμό της μιάς αντίδρασης, χρησιμοποιούμε την εξίσωση

$$\sum N_i^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow \bar{A} + P_1 - P_2 - P_1 - \bar{B} = 0, \quad (ii)$$

που είναι η γνωστή μας στερεοστατική εξίσωση, για να βρούμε την άλλη αντίδραση.

Έτσι η δεύτερη των εξισώσεων (i) μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν επαλήθευση, εκτός αν και η δεύτερη αντίδραση προκύψει απ' τη δεύτερη των σχέσεων (i), οπότε η (ii) παραμένει πλέον για επαλήθευση.

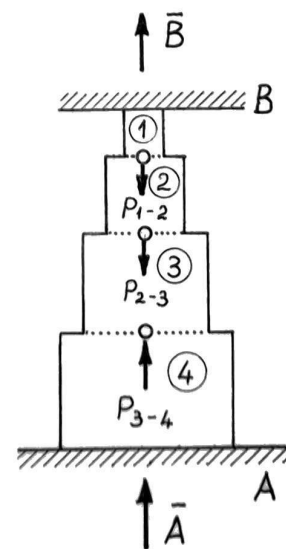
2. Το σύστημα των τεσσάρων (ή περισσότερων) πρισματικών ράβδων του σχήματος, με διαφορετικές διατομές και υλικά, δέχεται, στις διατομές διαχωρισμού των ράβδων του, αξονικές δυνάμεις P_{1-2} , P_{2-3} , P_{3-4} (κ.ο.κ.), που δεν είναι αναγκαστικά ομόφορες. Γνωρίζοντας το μήκος, τη διατομή και το μέτρο ελαστικότητας κάθε ράβδου, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις που εμφανίζονται στις ανυποχώρητες πακτώσεις A και B.

Λύση.

Αν $\bar{A}$ και $\bar{B}$ είναι οι αντιδράσεις του συστήματος όπως σημειώνονται στις ετηρίξεις, η στερεοστατική εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων θα δώσει:

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow \bar{A} + P_{3-4} - P_{2-3} - P_{1-2} + \bar{B} = 0. \quad (i)$$

Η επί πλέον εξίσωση που χρειαζόμαστε,



θα προκύψει απ' τη συνθήκη συμβιβαστού των παραμορφώσεων, που εδώ θα εκφραστεί με το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των επιμηκύνσεων ή επιβραχύνσεων των ράβδων του συστήματος, μιάς και τα άκρα του είναι ανυποχώρητα.

Η ακολουθούμενη διαδικασία περιλαμβάνει:

α) Προδιορισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των δυνάμεων που ενεργούν (κάτω ή πάνω από τυχαία διατομή), χωριστά σε κάθε ράβδο του συστήματος. Σημειώνεται ότι θετικές είναι οι δυνάμεις που εφελκύνουν τη διατομή, αρνητικές εκείνες που τη θλίβουν.

β) Έκφραση της επιμήκυνσης ή επιβραχύνσης που προκύπτει σε κάθε ράβδο ανάλογα με το πρόσημο της αξονικής δύναμης, και

γ) Μηδενισμός του αλγεβρικού αθροίσματος των επιμηκύνσεων ή επιβραχύνσεων των ράβδων του συστήματος.

Έτσι, θα έχουμε:

Ράβδος 1 : Δυνάμεις από πάνω

$$N_1 = \bar{B} \Rightarrow \Delta l_1 = + \frac{\bar{B} l_1}{E_1 F_1}$$

Ράβδος 2 : Δυνάμεις από πάνω

$$N_2 = \bar{B} - P_{1-2} \Rightarrow \Delta l_2 = + \frac{(\bar{B} - P_{1-2}) l_2}{E_2 F_2}$$

Ράβδος 3 : Δυνάμεις από κάτω

$$N_3 = -(\bar{A} + P_{3-4}) \Rightarrow \Delta l_3 = - \frac{(\bar{A} + P_{3-4}) l_3}{E_3 F_3}$$

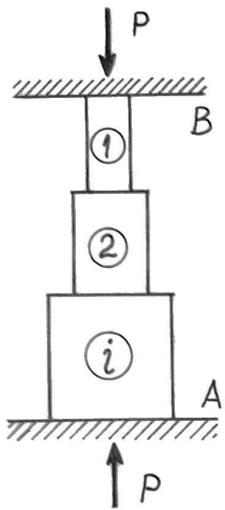
Ράβδος 4 : Δυνάμεις από κάτω

$$N_4 = -\bar{A} \Rightarrow \Delta l_4 = - \frac{\bar{A} l_4}{E_4 F_4}$$

$$\text{Άρα: } \sum \Delta l_i = 0 \Rightarrow \frac{\bar{B} l_1}{E_1 F_1} + \frac{(\bar{B} - P_{1-2}) l_2}{E_2 F_2} - \frac{(\bar{A} + P_{3-4}) l_3}{E_3 F_3} - \frac{\bar{A} l_4}{E_4 F_4} = 0 \quad (ii)$$

Απ' το σύστημα των εξισώσεων (i) και (ii) προκύπτουν οι τιμές των αντιδράσεων $\bar{A}$ και $\bar{B}$. Το θετικό ή αρνητικό πρόσημο της τιμής υποδηλώνει τη σωστή ή λάθος φορά που εκλέχτηκε για την αντίδραση.

3. Δίνεται το σύστημα των ομοαξονικών ράβδων $1, 2, \dots, i$, που βρίσκεται ανάμεσα στις ανυποχώρητες στήριξεις A και B .



Γνωρίζοντας το μήκος l , τη διατομή F , το συντελεστή γραμμικής διαστολής α_t και το μέτρο ελαστικότητας E κάθε ράβδου, να υπολογιστούν:

α) Οι αντιδράσεις που εμφανίζονται στις στήριξεις και

β) οι τάσεις που αναπτύσσονται χωριστά σε κάθε ράβδο,

αν η θερμοκρασία του συστήματος αυξηθεί κατά $\Delta\theta$.

Λύση.

α) Αν το σύστημα των ράβδων ήταν ελεύθερο να μεταβάλλει το μήκος του, π.χ. αν δεν υπήρχε η στήριξη B , τότε η επιμήκυνση λόγω διαφοράς θερμοκρασίας σε τυχούσα ράβδο θα ήταν

$$\Delta l_i^{\theta} = l_i \cdot \alpha_{ti} \cdot \Delta\theta = \Delta\theta (l_i \alpha_{ti}) \quad (i = 1, 2, \dots),$$

και επομένως η ολική επιμήκυνση του συστήματος θα ήταν αντίστοιχα

$$\Delta l_{ολ}^{\theta} = \sum \Delta l_i^{\theta} = \Delta\theta \cdot \sum (l_i \alpha_{ti}).$$

Μιά θλιπτική όμως δύναμη P , ίδια για όλες τις ράβδους, ασκείται τώρα αξονικά απ' τη στήριξη B , για να επιβάλει στο σύστημα μία επιβράχυνση $\Delta l_{ολ}^P$, η οποία κατά Hooke είναι ίση με τη $\Delta l_{ολ}^{\theta}$.

Εμφανίζονται λοιπόν στις στήριξεις οι ίσες και αντίθετες αντιδράσεις P , ενώ το συνολικό μήκος των ράβδων του συστήματος διατηρείται σταθερό, χωρίς βέβαια να αποκλείεται η σχετική μετακίνηση των διαχωριστικών διατομών μεταξύ των ράβδων.

Αλλά η επιβράχυνση λόγω P , που εμφανίζεται στην τυχούσα ράβδο, είναι

$$\Delta l_i^P = \frac{P \cdot l_i}{F_i E_i} = P \left(\frac{l_i}{F_i E_i} \right) \quad (i=1, 2, \dots),$$

και επομένως η αντίστοιχη ολική επιβράχυνση του συστήματος είναι

$$\Delta l_{\sigma l}^P = \sum \Delta l_i^P = P \cdot \sum \left(\frac{l_i}{F_i E_i} \right).$$

Άρα $\Delta l_{\sigma l}^{\theta} = \Delta l_{\sigma l}^P$, δηλαδή $\Delta \theta \sum (l_i a_{ti}) = P \cdot \sum \left(\frac{l_i}{F_i E_i} \right)$,

και επομένως

$$P = \frac{\Delta \theta \sum (l_i a_{ti})}{\sum \left(\frac{l_i}{F_i E_i} \right)}.$$

β) Μετά τον προσδιορισμό της P , οι θλιπτικές (λόγω $\Delta \theta > 0$) τάσεις που θ' αναπτυχθούν χωριστά σε κάθε ράβδο, θα βρεθούν απ' τη σχέση:

$$\sigma_i = \frac{P}{F_i} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

4. Η κυλινδρική ράβδος του υλικού 1 περιβάλλεται, όπως φαίνεται στο σχήμα, από τις ισομήκεις ράβδους των υλικών 2.....i, που είναι δακτυλιοειδούς διατομής και το σύστημα, που βρίσκεται ανάμεσα σε δύο άκαμπτες πλάκες, συμπιέζεται αξονικά με δύναμη P

Γνωρίζοντας τη διατομή F και το μέτρο ελαστικότητας E του υλικού κάθε ράβδου, να υπολογιστούν οι τάσεις που θ' αναπτυχθούν χωριστά σε κάθε υλικό.

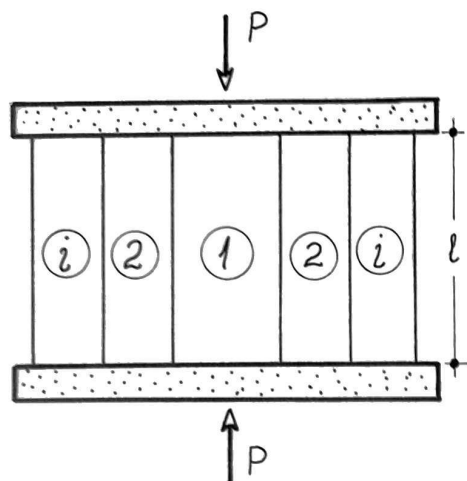
Λύση.

Αν $P_1, P_2, \dots, P_i$ είναι οι θλιπτικές δυνάμεις που λαμβάνονται από τις αντίστοιχες ράβδους του συστήματος, τότε η εξίσωση ισορροπίας γράφεται

$$P_1 + P_2 + \dots + P_i = P. \quad (\alpha)$$

Για την επίλυση των i αγνώστων δυνάμεων, χρειάζονται

προφανώς $i-1$ ακόμη εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές θα προκύψουν αν "συμβιβάσουμε" τις παραμορφώσεις.



Πραγματικά, παρατηρούμε εδώ ότι όλες οι ράβδοι του συστήματος, παθαίνουν, λόγω της P , την ίδια επιβράχυνση, μιάς και οι πλάκες είναι άκαμπτες. Δηλαδή

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \dots \Delta l_i.$$

$$\text{Άρα } \frac{P_1 \cdot l}{E_1 F_1} = \frac{P_2 \cdot l}{E_2 F_2} = \dots \frac{P_i \cdot l}{E_i F_i} \quad (\beta)$$

Στις $i-1$ εξισώσεις που προκύπτουν απ' τη σχέση (β), αν εκφράσουμε τις $P_2, \dots, P_i$ συνάρτησει της P_1 , έχουμε

$$\left. \begin{aligned} P_2 &= \frac{P_1}{E_1 F_1} \cdot E_2 F_2 \\ \dots \dots \dots \\ P_i &= \frac{P_1}{E_1 F_1} \cdot E_i F_i \end{aligned} \right\} \quad (\gamma)$$

Θέτοντας ήδη τις παραπάνω τιμές στην (α), παίρνουμε

$$P_1 \left(1 + \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} + \dots + \frac{E_i F_i}{E_1 F_1} \right) = P,$$

$$\text{και συνεπώς } P_1 = \frac{P}{E_1 F_1 + E_2 F_2 + \dots + E_i F_i} \cdot E_1 F_1 = \lambda \cdot E_1 F_1, \quad (\delta)$$

όπου

$$\lambda = P / (E_1 F_1 + E_2 F_2 + \dots + E_i F_i).$$

Η σχέση (δ) δείχνει ότι η δύναμη που παραλαμβάνει η κάθε ράβδος είναι ανάλογη προς το γινόμενο της διατομής της επί το μέτρο ελαστικότητας.

Θέτοντας ήδη την τιμή της P_1 απ' τη σχέση (δ) στις σχέσεις (γ), παίρνουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned} P_2 &= \lambda \cdot E_2 F_2 \\ \dots \dots \dots \\ P_i &= \lambda \cdot E_i F_i. \end{aligned}$$

Οι θλιπτικές τάξεις που αναπτύσσονται τώρα στο υλικό κάθε ράβδου, θα βρεθούν απ' τη σχέση

$$\sigma_i = \frac{P_i}{F_i} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

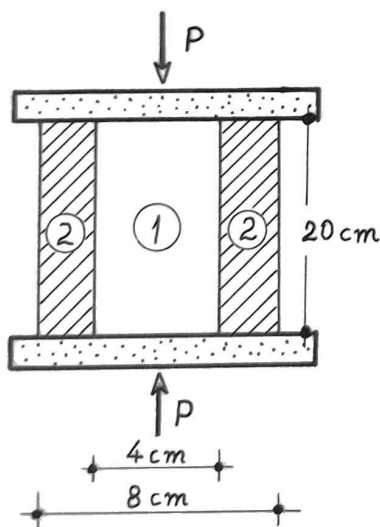
5. Χαλύβδινος κύλινδρος και σωλήνας αλουμινίου βρίσκονται ανάμεσα σε άκαμπτες πλάκες και συμπιέζονται αξονικά με δύναμη $P = 5 \text{ ton}$.

Με τη διαστασιολόγηση του σχήματος, να υπολογιστεί η ελάχιστη απαιτούμενη αύξηση της θερμοκρασίας, ώστε ολόκληρη η θλιπτική δύναμη να παραληφθεί μόνο από το αλουμίνιο. Δίνονται:

α) Συντελεστής γραμμικής διαστολής $\left\{ \begin{array}{l} \text{χάλυβα: } \alpha_{t_1} = 12 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C} \\ \text{αλουμινίου: } \alpha_{t_2} = 22 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C} \end{array} \right.$

β) Μέτρο ελαστικότητας $\left\{ \begin{array}{l} \text{χάλυβα: } E_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ κρ/cm}^2 \\ \text{αλουμινίου: } E_2 = 7 \cdot 10^5 \text{ κρ/cm}^2 \end{array} \right.$

Λύση.



Αν το σύστημα ήταν ελεύθερο και εμφανιζόταν αύξηση της θερμοκρασίας κατά $\Delta\theta$ $^\circ\text{C}$, τότε οι επιμηκύνσεις των δύο υλικών θα ήσαν αντίστοιχα:

$$\Delta l_1 = l \cdot \alpha_{t_1} \cdot \Delta\theta \quad \text{και}$$

$$\Delta l_2 = l \cdot \alpha_{t_2} \cdot \Delta\theta.$$

Επειδή όμως $\alpha_{t_2} > \alpha_{t_1}$, το αλουμίνιο επιμηκύνεται περιεσότερο απ' το χάλυβα, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται στα δύο

υλικά μία διαφορά μήκους, που είναι:

$$\Delta l^{\theta} = \Delta l_2 - \Delta l_1 = l (\alpha_{t_2} - \alpha_{t_1}) \Delta\theta.$$

Γιά να παραληφθεί τώρα όλο το θλιπτικό φορτίο μόνο

απ' το αλουμίνιο, θα πρέπει η δύναμη P να εξαφανίσει την επιμήκυνση Δl^θ , προκαλώντας στο αλουμίνιο ίση επιβράχυνση, η οποία κατά Hooke είναι:

$$\Delta l^P = \frac{P \cdot l}{E_2 F_2}.$$

$$\text{Άρα } \Delta l^\theta = \Delta l^P \quad \text{ή} \quad l(\alpha_{t_2} - \alpha_{t_1}) \Delta \theta = \frac{P l}{E_2 F_2},$$

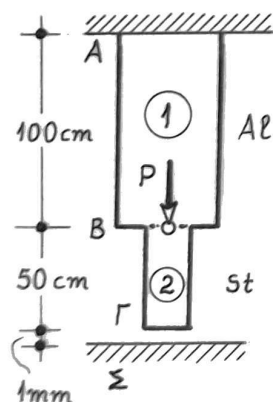
$$\text{και τελικά} \quad \Delta \theta = \frac{P}{E_2 F_2 (\alpha_{t_2} - \alpha_{t_1})}.$$

Απ' τα δεδομένα του προβλήματος, προκύπτει:

$$F_2 = \frac{\pi(8^2 - 4^2)}{4} = 37,7 \text{ cm}^2 \quad \text{και} \quad \alpha_{t_2} - \alpha_{t_1} = (22 - 12) 10^{-6} = 10^{-5} / ^\circ\text{C}.$$

$$\text{Άρα } \Delta \theta = \frac{5.000}{7 \cdot 10^5 \cdot 37,7 \cdot 10^{-5}} = 18,9 ^\circ\text{C}.$$

6. Η ράβδος του σχήματος αποτελείται απ' τα πρισματικά μέρη αλουμινίου (1) και χάλυβα (2). Αν το κενό $\Gamma \Sigma$ είναι $\delta = 1 \text{ mm}$, να υπολογιστούν οι τάσεις που αναπτύσσονται στα δύο πρισματικά μέρη, όταν:



α) Στην διατομή B ενεργεί προς τα κάτω δύναμη $P = 15 \text{ t}$.

β) Χωρίς τη δύναμη P , η θερμοκρασία αυξηθεί κατά $\Delta \theta = 50 ^\circ\text{C}$. Στην περίπτωση αυτή,

1) πόση δύναμη πρέπει ν' ασκηθεί προς τα πάνω στη διατομή B, ώστε το χαλύβδινο πρισματικό μέρος να είναι απαλλαγμένο τάσεων, και

2) ποιά θα είναι τότε η τάση του αλουμινίου;

ΔΙΝΟΝΤΑΙ :

Συντελεστής γραμμικής διαστολής α_t (grad^{-1})

Μέτρο ελαστικότητας E ($\text{κρ}/\text{cm}^2$)

Μήκος l (cm)

Διατομή F (cm^2)

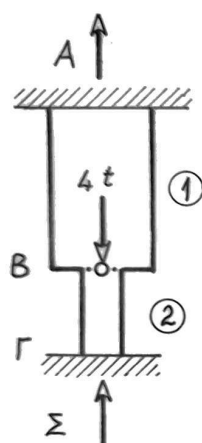
Αλουμίνιο (1)	Χάλυβας (2)
$22 \cdot 10^{-6}$	$12 \cdot 10^{-6}$
$1,1 \cdot 10^6$	$2,1 \cdot 10^6$
100	50
10	5

Λύση.

α) Για να καλυφθεί το κενό ΓΣ, θα πρέπει κατά Hooke στη διατομή Β ν' ασκηθεί προς τα κάτω δύναμη

$$P_1 = E_1 F_1 \frac{\delta}{l_1} = 1,1 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot \frac{0,1}{100} = 11.000 \text{ κρ.}$$

Είναι επομένως φανερό ότι μετά την επαφή της διατομής Γ με τη στήριξη, η δύναμη των $15 - 11 = 4 \text{ t}$ που περιβεύει, θα θλίψει το κάλυβα, προκαλώντας ταυτόχρονα πρόδετο εφελκυσμό στο αλουμίνιο (βλέπε και γενικώτερο πρόβλημα 2, βελ. 74).



Αν λοιπόν Σ και Α οι αντιδράσεις που προκαλεί στις στήριξεις η δύναμη των 4 t , (δεν ξεχνούμε ότι στη στήριξη Α υπάρχει ήδη η εφελκυστική αντίδραση των 11 t), θα είναι

$$\Sigma + A = 4 \text{ t} \quad (\alpha)$$

Επίσης, για τις παραμορφώσεις των δύο πρισματικών μερών, θα έχουμε

$$\text{Τμήμα (1), δυνάμεις από πάνω: } \Delta l_1 = \frac{A l_1}{E_1 F_1}$$

$$\text{Τμήμα (2), -"- -"- κάτω: } \Delta l_2 = - \frac{\Sigma l_2}{E_2 F_2}.$$

Και λόγω του ανυποχωρήτου των στήριξεων

$$\Sigma \Delta l_i = 0 \Rightarrow \frac{A \cdot 100}{1,1 \cdot 10^6 \cdot 10} - \frac{\Sigma \cdot 50}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 5} = 0$$

$$\text{ή } \frac{A}{1,1} = \frac{\Sigma}{2,1}, \quad \text{δηλαδή } A = \frac{1,1}{2,1} \Sigma. \quad (\beta)$$

Η (α) λόγω της (β) γίνεται

$$\Sigma + \frac{1,1}{2,1} \Sigma = 4 \Rightarrow \Sigma \left(1 + \frac{1,1}{2,1}\right) = 4 \quad \text{και } \Sigma = 2,625 \text{ t,}$$

$$\text{οπότε } A = \frac{1,1}{2,1} 2,625 = 1,375 \text{ t.}$$

Έτσι οι αξονικές δυνάμεις και οι αντίστοιχες τάσεις που εμφανί-

ζονται τελικά στα δύο υλικά, είναι

$$\text{Τμήμα (1)}: N_1 = P_1 + A = 11 + 1,375 = 12,375 \text{ t}$$

$$\text{και } \sigma_1 = \frac{12,375}{10} = 1.237,5 \text{ κρ/cm}^2,$$

$$\text{Τμήμα (2)}: N_2 = -\Sigma = -2,625 \text{ t} \quad \text{και} \quad \sigma_2 = -\frac{2,625}{5} = -525 \text{ κρ/cm}^2.$$

β) Αν το σύστημα δεν είχε καθόλου τον περιορισμό της ετήριξης Σ , η αύξηση της θερμοκρασίας θα παρουσίαζε επιμήκυνση

$$\Delta l^{\theta} = \Delta l_1^{\theta} + \Delta l_2^{\theta} = \alpha_{t_1} l_1 \Delta \theta + \alpha_{t_2} l_2 \Delta \theta = \Delta \theta (\alpha_{t_1} l_1 + \alpha_{t_2} l_2),$$

που με τα δεδομένα του προβλήματος, είναι

$$\Delta l^{\theta} = 50 (22 \cdot 1000 + 12 \cdot 500) \cdot 10^{-6} = 1,4 \text{ mm} > 1 \text{ mm} = \delta.$$

Επομένως η κάτω ετήριξη αντιδρά, με αποτέλεσμα να εμφανιστεί θλιπτική δύναμη, που θα προκαλέσει στις ράβδους συνολική επιβράχυνση

$$\Delta l = \Delta l^{\theta} - \delta = 1,4 - 1 = 0,4 \text{ mm} = 0,04 \text{ cm}.$$

Αν X είναι η κοινή αυτή δύναμη, θα έχουμε:

$$\frac{X l_1}{E_1 F_1} + \frac{X l_2}{E_2 F_2} = \Delta l \quad \text{ή} \quad X \left(\frac{100}{1,1 \cdot 10^6 \cdot 10} + \frac{50}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 5} \right) = 0,04,$$

$$\text{οπότε } X = 2.887,5 \text{ κρ}.$$

Άρα οι τάσεις στα δύο πρισματικά μέρη θα είναι

$$\sigma_1 = \frac{2.887,5}{10} = 288,75 \text{ κρ/cm}^2 \quad \text{και} \quad \sigma_2 = \frac{2.887,5}{5} = 577,5 \text{ κρ/cm}^2.$$

β₁) Για να είναι τώρα το χαλύβδινο μέρος απαλλαγμένο τάσεων, η προς τα πάνω δύναμη Δ που θ' ασκηθεί στη διατομή Β, θα πρέπει να προκαλέσει μόνο στο εξ αλουμινίου μέρος επιβράχυνση ίση με Δl .

$$\text{Δηλαδή} \quad \Delta l = \frac{\Delta l_1}{E_1 F_1}, \quad \text{οπότε}$$

$$\Delta = E_1 F_1 \frac{\Delta l}{l_1} = 1,1 \cdot 10^6 \cdot 10 \frac{0,04}{100} = 4.400 \text{ κρ}.$$

β_2) Γίνεται τώρα φανερό ότι η συνολική θλιπτική δύναμη που δρά στο αλουμίνιο, είναι:

$$N_a = X + \Delta = 2.887,5 + 4.400 = 7.287,5 \text{ κρ},$$

οπότε η αντίστοιχη θλιπτική τάση, είναι

$$\sigma_a = \frac{7.287,5}{10} = 728,75 \text{ κρ/cm}^2.$$

7) Ο χαλύβδινος κοχλίας (1) του σχήματος συνδέεται με το χαλκίνο περίβλημα (2), έτσι, ώστε το περικόχλιο, με βήμα $\beta = 2,4 \text{ mm}$, να αφήνει το σύστημα χαλαρό.

Να υπολογιστούν οι τάσεις που εμφανίζονται στα δύο υλικά,

α) όταν η εξωτερική θερμοκρασία αυξηθεί κατά $\Delta\theta = 40^\circ\text{C}$. Στην περίπτωση αυτή, πόσο αριστερόφωρα πρέπει να περιστραφεί το περικόχλιο για να χαλαρώσει πάλι το σύστημα;

β) όταν το περικόχλιο περιστραφεί δεξιόφωρα κατά 90° , και

γ) όταν συνδυαστούν μείωση της θερμοκρασίας κατά 20°C και δεξιόφωρη περιστροφή του περικοχλίου κατά 180° .

ΔΙΝΟΝΤΑΙ

Συντελεστής γραμμικής διαστολής α_t (grad^{-1})

Μέτρο ελαστικότητας E (κρ/cm^2)

Εμβαδόν διατομής F (cm^2)

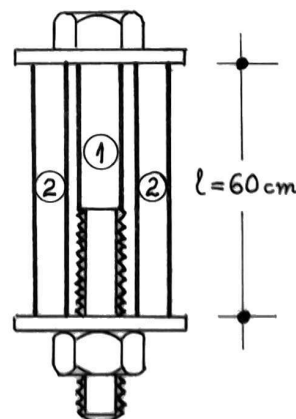
Χαλύβας (1)	Χαλκός (2)
$12 \cdot 10^{-6}$	$16 \cdot 10^{-6}$
$2,1 \cdot 10^6$	$1,25 \cdot 10^6$
8	12

Λύση.

α) Αν τα υλικά ήσαν ελεύθερα, οι επιμηκύνσεις που θα εμφανιζόταν στο περίβλημα και τον κοχλία αντίστοιχα λόγω $\Delta\theta > 0$, θα ήσαν

$$\Delta l_2^{\theta} = l \alpha_{t_2} \Delta\theta \quad \text{και} \quad \Delta l_1^{\theta} = l \alpha_{t_1} \Delta\theta,$$

με αποτέλεσμα, επειδή $\alpha_{t_2} > \alpha_{t_1}$, να παρουσιαστεί στα δύο υλικά διαφορά μήκους



$$\Delta l = \Delta l_2^{\theta} - \Delta l_1^{\theta} = l(\alpha_{t_2} - \alpha_{t_1})\Delta\theta = 600(16-12) \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 0,096 \text{ mm}.$$

Λόγω όμως του υπάρχοντος περικοχλίου, η διαφορά αυτή του μήκους εμποδίζεται, οπότε τα δύο υλικά εντείνονται αξονικά με δύναμη, έδτω X , που είναι εφελκυστική για τον κοχλία και θλιπτική για το περίβλημα. Η αμοιβαία αυτή δύναμη επιμηκύνει τον κοχλία κατά Δl_1^X ενώ ταυτόχρονα επιβραχύνει το περίβλημα κατά Δl_2^X , ώστε να είναι

$$\Delta l_1^X + \Delta l_2^X = \Delta l$$

$$\text{Συνεπώς} \quad \frac{Xl}{E_1 F_1} + \frac{Xl}{E_2 F_2} = \Delta l = l(\alpha_{t_2} - \alpha_{t_1})\Delta\theta,$$

$$\text{Άρα} \quad X \left(\frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right) = (\alpha_{t_2} - \alpha_{t_1})\Delta\theta \quad \text{και} \quad X = \frac{(\alpha_{t_2} - \alpha_{t_1})\Delta\theta}{\frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2}} \quad (\alpha)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι αν τα δύο υλικά είναι ίδια, δηλαδή $\alpha_{t_2} = \alpha_{t_1}$, η αμοιβαία δύναμη μηδενίζεται και συνεπώς η μεταβολή της θερμοκρασίας δεν προκαλεί τάσεις στα δύο υλικά.

Θέτοντας ήδη τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος, προκύπτει

$$X = \frac{(16-12) \cdot 10^{-6} \cdot 40}{\frac{1}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 8} + \frac{1}{1,25 \cdot 10^6 \cdot 12}} = \frac{4 \cdot 40}{\frac{1}{16,8} + \frac{1}{15}} = 1.268 \text{ κρ},$$

οπότε οι τάσεις στα δύο υλικά είναι:

$$\sigma_1 = \frac{1.268}{8} = 158,5 \text{ κρ/cm}^2 \quad \text{και} \quad \sigma_2 = \frac{1.268}{12} = 105,7 \text{ κρ/cm}^2.$$

Γιά να επανέλθει το σύστημα ξανά στη χαλάρωση, θα πρέπει το περικόχλιο να υποχωρήσει κατά Δl .

Αν λοιπόν φ είναι η αριστερόστροφη γωνία που θα το μετατοπίσει κατά Δl , επειδή

$$\left. \begin{array}{ll} \text{στις } 360^\circ \text{ υποχωρεί κατά } \beta & \\ \text{"-"} \quad \varphi & \text{"-"} \quad \Delta l, \end{array} \right\} \text{ θα είναι } \varphi = 360 \frac{\Delta l}{\beta},$$

$$\text{οπότε βρίσκουμε} \quad \varphi = 360 \frac{0,096}{2,4} = 14,4^\circ.$$

β) Κατά την περιστροφή του περικοχλίου, το περίβλημα (2) θλίβεται αξονικά με δύναμη έστω P , ενώ ταυτόχρονα ο κοχλίας (1) εφελκύνεται με ίση και αντίθετη δύναμη.

Η θλιπτική και εφελκυστική παραμόρφωση που εμφανίζεται τώρα στα δύο υλικά έχει σαν άθροισμα τη μετατόπιση του περικοχλίου, που είναι

$$\Delta h = \frac{90}{360} \beta = \frac{\beta}{4}$$

Αν λοιπόν Δl_1^P και Δl_2^P είναι αντίστοιχα η επιμήκυνση και η επιβράχυνση του κοχλία και του περιβλήματος, επειδή

$$\Delta l_1^P + \Delta l_2^P = \Delta h,$$

θα έχουμε κατά Hooke

$$\frac{Pl}{E_1 F_1} + \frac{Pl}{E_2 F_2} = \frac{\beta}{4} \quad \text{ή} \quad Pl \left(\frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right) = \frac{\beta}{4}$$

$$\text{και} \quad P = \frac{\beta}{4l} \cdot \frac{E_1 F_1}{1 + \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2}}. \quad (\beta)$$

Αντικαθιστώντας ήδη τα δεδομένα του προβλήματος, βρίσκουμε

$$P = \frac{0,24}{4 \cdot 60} \cdot \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 8}{1 + \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 8}{1,25 \cdot 10^6 \cdot 12}} = 10^{-3} \cdot 7,924 \cdot 10^6 = 7,924 \text{ κρ},$$

οπότε οι τάσεις στα δύο υλικά είναι αντίστοιχα

$$\sigma_1 = \frac{7,924}{8} = 990 \text{ κρ/cm}^2 \quad \text{και} \quad \sigma_2 = \frac{7,924}{12} = 660 \text{ κρ/cm}^2.$$

γ) Είναι φανερό ότι και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις η αξονική καταπόνηση του συστήματος είναι όμοια· εφελκυσμός δηλαδή του κοχλία και θλίψη του περιβλήματος.

Η ομοιότητα αυτή προέρχεται απ' την εμφάνιση μεταξύ των δύο υλικών κάποιας διαφοράς μήκους Δl που δημιουργείται είτε μόνη της, όταν $\Delta \theta > 0$, ή με δική μας πρωτοβουλία, αν περι-ετραφεί το περικόχλιο. Συνεπώς ο συνδυασμός των παραπάνω

καταστάσεων θα έχει, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, αθροιστικά αποτελέσματα στο σύστημα.

Έτσι η αξονική δύναμη A , που θα προκύψει αντίθετη στα δύο υλικά, θα είναι το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών που παίρνουν οι άγνωστοι των εξισώσεων (α) και (β). Δηλαδή:

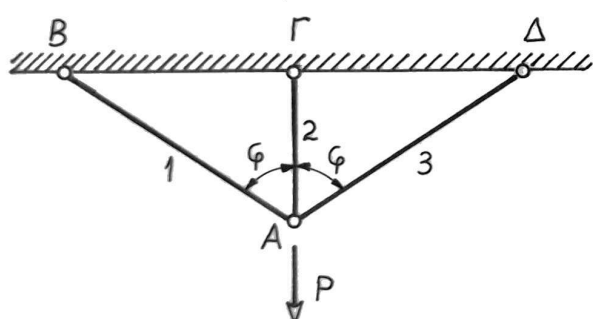
$$A = X + P = \frac{4(-20)}{\frac{1}{16,8} + \frac{1}{15}} + \frac{0,24}{2 \cdot 60} 7.924 \cdot 10^3 = -634 + 15.848 = 15.214 \text{ κρ},$$

οπότε οι αντίστοιχες τάσεις είναι

$$\sigma_1 = \frac{15.214}{8} = 1902 \text{ κρ/cm}^2 \text{ και } \sigma_2 = \frac{15.214}{12} = 1.268 \text{ κρ/cm}^2.$$

8. Η κατασκευή του οχήματος αποτελείται από τρεις χαλύβδινες ράβδους που έχουν την ίδια διατομή.

Να υπολογιστούν οι δυνάμεις των ράβδων, όταν:



- α) Στον κόμβο A ενεργεί η κατακόρυφη δύναμη P
- β) Η θερμοκρασία αυξηθεί κατά $\Delta\theta$
- γ) Συνδυαστούν οι παραπάνω περιπτώσεις. Να γίνει εφαρμογή για $P=1000 \text{ κρ}$, $E=2 \cdot 10^6 \text{ κρ/cm}^2$,

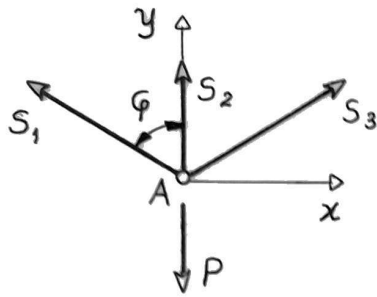
$$F = 1 \text{ cm}^2, \quad \alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}, \quad \Delta\theta = 50^\circ\text{C} \text{ και } \varphi = 45^\circ.$$

Λύση.

α) Θεωρώντας εφελκυστικές τις δυνάμεις των ράβδων S_1, S_2, S_3 και εξετάζοντας αναλυτικά την ισορροπία του κόμβου A, είναι φανερό ότι οι συνθήκες μηδενισμού των οριζοντίων και κατακόρυφων δυνάμεων που διαθέτουμε απ' τη Στατική, δεν επαρκούν για τον προσδιορισμό των τριών αγνώστων που εμφανίζονται.

Το γεγονός ότι είναι $S_1 = S_3$, που φαίνεται αλλωστε λόγω

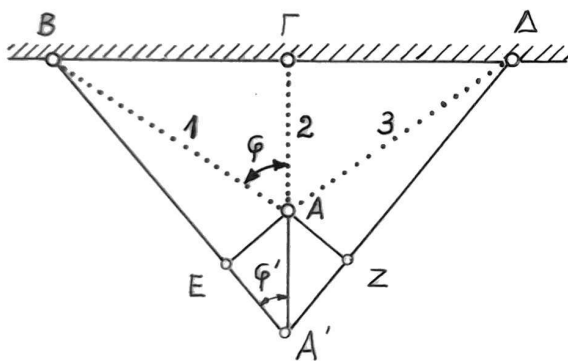
συμμετρίας κόμβου - φόρτισης, δεν εξυπηρετεί, γιατί κανονικά προκύπτει απ' τη συνθήκη $\sum \vec{x}^{\pm} = 0$.



Ουδιαστικά λοιπόν για τους δύο αγνώστους S_1 και S_2 , η μόνη εξίσωση που διατίθεται απ' τη Στατική είναι η

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 2S_1 \sin \varphi + S_2 - P = 0. \quad (\alpha)$$

Η άλλη εξίσωση θα προκύψει αν λάβουμε υπόψη τις παραμορφώσεις που εμφανίζονται στις ράβδους και τις "συμβιβάζουμε" μεταξύ τους· δηλαδή αν βρούμε και εκφράσουμε τη μαθηματική εξίσωση που συνδέει την επιμήκυνση της μίας ράβδου σε σχέση με την επιμήκυνση της άλλης.



Θεωρώντας σε σκαρίφημα την παραμόρφωση της κατασκευής, παρατηρούμε ότι όλες οι ράβδοι επιμηκύνονται, έτσι ώστε το σημείο A , μετακινούμενο κατακόρυφα, να φτάσει στο A' .

Η επιμήκυνση επομένως της ράβδου 2 είναι η AA' , ενώ των ράβδων 1 και 3 οι EA' και ZA' αντίστοιχα. (Τα σημεία E και Z ορίζονται, αν απ' τον κόμβο A φέρουμε τις κάθετες στις ράβδους 1 και 3 αντίστοιχα). Έτσι είναι:

$$EA' = \Delta l_1, \quad AA' = \Delta l_2 \quad (\text{και } ZA' = EA' = \Delta l_3).$$

Σημειώνεται ότι λόγω του μικρού μήκους της AA' σε σχέση με τη ράβδο 2, η γωνία φ' λαμβάνεται, χωρίς σφάλμα, ίση με την φ . Έτσι, απ' τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει

$$EA' = AA' \sin \varphi' \quad \text{ή} \quad \Delta l_1 = \Delta l_2 \sin \varphi \quad (\beta)$$

που είναι η εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων.

Η (β) γράφεται
$$\frac{S_1 l_1}{E \cdot F} = \frac{S_2 l_2}{EF} \sin \varphi.$$

Και επειδή $l_2 = l_1 \sin \varphi$, έπεται

$$S_1 l_1 = S_2 l_1 \sin^2 \varphi \Rightarrow S_1 = S_2 \sin^2 \varphi. \quad (\beta')$$

Θέτοντας την τιμή της S_1 στην (α) παίρνουμε:

$$2S_2 \sin^2 \varphi \sin \varphi + S_2 - P = 0 \quad \text{ή} \quad S_2 (2 \sin^3 \varphi + 1) = P,$$

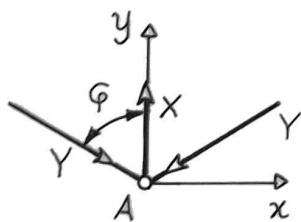
$$\text{οπότε} \quad S_2 = \frac{P}{1 + 2 \sin^3 \varphi}$$

Η τιμή της S_1 προκύπτει τώρα απ' την (β')

$$S_1 = \frac{P \sin^2 \varphi}{1 + 2 \sin^3 \varphi} = S_3.$$

β) Στην περίπτωση που η δύναμη P καταργείται και εμφανίζεται αύξηση της θερμοκρασίας, είναι φανερό ότι όλες οι ράβδοι τείνουν να επιμηκυνθούν.

Επειδή όμως ο κόμβος A δεν αφήνει "ελεύθερη" την επιμήκυνση αλλά "περιορίζει" την παραμόρφωση του συστήματος, και μάλιστα στα προηγούμενα πλαίσια, έπεται ότι εμφανίζεται στις ράβδους αξονική καταπόνηση, που είναι θλιπτική για ορισμένες και εφελκυστική για τις υπόλοιπες ράβδους.



Έστω λοιπόν ότι η ράβδος 2 εφελκύεται με δύναμη X , οπότε Y θα είναι η θλιπτική δύναμη των ράβδων 1 και 3. (Το τελικό πρόσημο καθορίζει τη σωστή φορά).

Η εξίσωση (α) που εκφράζει τώρα την ισορροπία του κόμβου A , γίνεται:

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow X - 2Y \sin \varphi = 0. \quad (\alpha_1)$$

Η ομοιότητα της προηγούμενης με την τωρινή παραμόρφωση του συστήματος, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε και εδώ την εξίσωση (β)

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \text{ συν} \varphi \quad (\beta)$$

στην εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων, με την προϋπόθεση όμως, ότι τώρα οι παραμορφώσεις είναι αποτέλεσμα και της θερμοκρασιακής μεταβολής και της αξονικής δύναμης.

Οι παραμορφώσεις αυτές είναι

$$\begin{aligned} \Delta l_1 = \Delta l_3 &= l_1 \alpha_t \Delta \vartheta - \frac{Y \cdot l_1}{EF} \quad \text{και} \\ \Delta l_2 &= l_2 \alpha_t \Delta \vartheta + \frac{X \cdot l_2}{EF} \end{aligned}$$

Επειδή όμως $l_2 = l_1 \text{ συν} \varphi$ και $X = 2Y \text{ συν} \varphi$ λόγω της (α₁), η παραπάνω εξίσωση (β) γίνεται τώρα

$$l_1 \alpha_t \Delta \vartheta - \frac{Y l_1}{EF} = \left(l_1 \text{ συν} \varphi \alpha_t \Delta \vartheta + \frac{2Y \text{ συν} \varphi l_1 \text{ συν} \varphi}{EF} \right) \text{ συν} \varphi$$

$$\dot{\eta} \quad \alpha_t \Delta \vartheta (1 - \text{συν}^2 \varphi) = \frac{Y}{EF} (1 + 2 \text{συν}^3 \varphi)$$

$$\text{και} \quad Y = \frac{1 - \text{συν}^2 \varphi}{1 + 2 \text{συν}^3 \varphi} EF \alpha_t \Delta \vartheta,$$

$$\text{οπότε η (α}_1\text{) δίνει} \quad X = \frac{\text{συν} \varphi - \text{συν}^3 \varphi}{0,5 + \text{συν}^3 \varphi} EF \alpha_t \Delta \vartheta.$$

Παρατηρούμε ότι το μήκος των ράβδων δε καμμία από τις δύο περιπτώσεις δεν επηρεάζει την αξονική τους καταπόνηση.

γ) Εφαρμόζοντας τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος στις τελικές σχέσεις που εκφράζουν τις δυνάμεις των ράβδων για τον συνδυασμό (Σ) των παραπάνω δύο περιπτώσεων, έχουμε:

$$EF \alpha_t \Delta \vartheta = 2 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 1200 \text{ κρ}, \quad \text{συν} 45^\circ = 0,707, \quad \text{συν}^2 45^\circ = 0,5, \quad \text{συν}^3 45^\circ = 0,354$$

$$\Sigma_1 = S_1 + Y = \frac{1000 \cdot 0,5}{1 + 2 \cdot 0,354} - \frac{1 - 0,5}{1 + 2 \cdot 0,354} 1200 = 292,7 - 351,3 = -58,6 \text{ κρ.}$$

$$\Sigma_2 = S_2 + X = \frac{1000}{1 + 2 \cdot 0,354} + \frac{0,707 - 0,354}{0,5 + 0,354} 1200 = 585,5 + 496 = 1.081,5 \text{ κρ.}$$

9. Η δοκός AB του σχήματος είναι άκαμπτη και φορτίζεται με ομοιόμορφη φόρτιση εντάσεως q t/m. Στην άκρη A στηρίζεται με άρθρωση, ενώ στα σημεία 1 και 2 αναρτάται μέσω των ράβδων 1 και 2 αντίστοιχα, που τη συγκρατούν σε οριζόντια θέση. Αν το μήκος της δοκού είναι $l = 5$ m, να υπολογιστούν οι δυνάμεις των ράβδων

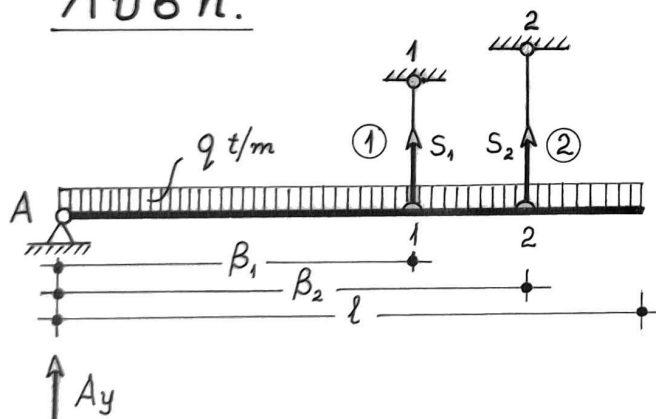
α) Λόγω φορτίου $q = 1$ t/m

β) Λόγω διαφοράς θερμοκρασίας κατά $\Delta\theta = 40^\circ\text{C}$

γ) Όταν συνδυάζονται οι δύο παραπάνω περιπτώσεις.

ΔΙΝΟΝΤΑΙ	(1)	(2)
Συντελεστής γραμμικής διαστολής α (grad^{-1})	$16 \cdot 10^{-6}$	$12 \cdot 10^{-6}$
Μέτρο ελαστικότητας E ($\text{κρ}/\text{cm}^2$)	$1,3 \cdot 10^6$	$2,1 \cdot 10^6$
Μήκος ράβδου l (m)	1,2	1,5
Διατομή -"- F (cm^2)	14	16
Απόσταση -"- απ' την στήριξη A β(m)	3	4

Λύση.



α) Είναι φανερό ότι οι συνθήκες ισορροπίας $\sum y^{\uparrow+} = 0$ και $(\sum M)^{\curvearrowright+} = 0$ δεν επαρκούν για τον προσδιορισμό των αντιδράσεων A_y , S_1 και S_2 που εικονίζονται. (Η συν-

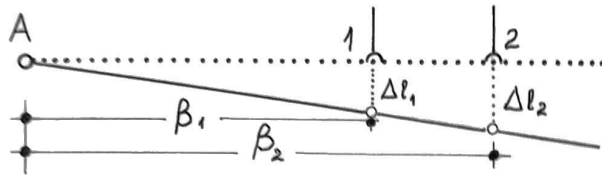
θήκη $\sum x^{\rightarrow+} = 0$ οδηγεί απλά στην $A_x = 0$).

Χρειαζόμαστε επομένως μία επί πλέον εξίσωση, την οποία θα πάρουμε συμβιβάζοντας τις παραμορφώσεις των ράβδων.

Επειδή σκοπός του προβλήματος είναι ο προσδιορισμός μόνο των δυνάμεων S_1 και S_2 , αποφεύγουμε τη συνθήκη $\sum y^{\uparrow+} = 0$, όπου εμφανίζεται και η A_y , χρησιμοποιώντας μόνο την

$$(\sum M)_A^{\curvearrowright+} = 0 \Rightarrow \frac{ql^2}{2} - S_1\beta_1 - S_2\beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_1 S_1 + \beta_2 S_2 = \frac{ql^2}{2}. \quad (\alpha)$$

Εξετάζοντας δε δκαρίφημα την παραμόρφωση του συστήματος, παρατηρούμε ότι, αν Δl_1 και Δl_2 είναι αντίστοιχα οι επιμηκύνσεις των ράβδων 1 και 2, λόγω του άκαμπτου της δοκού, θα έχουμε



$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{(A1)}{(A2)} = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

$$\text{ή } \beta_2 \Delta l_1 = \beta_1 \Delta l_2, \quad (\beta)$$

που είναι η ζητούμενη εξίσωση συμβιβασμού των παραμορφώσεων. Αυτή γράφεται

$$\beta_2 \frac{S_1 l_1}{E_1 F_1} = \beta_1 \frac{S_2 l_2}{E_2 F_2} \quad \text{ή} \quad S_2 = \frac{\beta_2 E_2 F_2 l_1}{\beta_1 E_1 F_1 l_2} S_1, \quad (\beta_1)$$

οπότε η (α) γίνεται

$$\beta_1 S_1 + \beta_2 \frac{\beta_2 E_2 F_2 l_1}{\beta_1 E_1 F_1 l_2} S_1 = \frac{q l^2}{2} \Rightarrow S_1 \left(\beta_1 + \frac{\beta_2^2 E_2 F_2 l_1}{\beta_1 E_1 F_1 l_2} \right) = \frac{q l^2}{2}$$

$$\text{και} \quad S_1 = \frac{q l^2}{2 \left(\beta_1 + \frac{\beta_2^2 E_2 F_2 l_1}{\beta_1 E_1 F_1 l_2} \right)}$$

Απ' την (β_1) προκύπτει τώρα η δύναμη της ράβδου (2)

$$S_2 = \frac{1}{\frac{\beta_1 E_1 F_1 l_2}{\beta_2 E_2 F_2 l_1}} \cdot \frac{q l^2}{2 \left(\beta_1 + \frac{\beta_2^2 E_2 F_2 l_1}{\beta_1 E_1 F_1 l_2} \right)} = \frac{q l^2}{2 \left(\beta_2 + \frac{\beta_1^2 E_1 F_1 l_2}{\beta_2 E_2 F_2 l_1} \right)}$$

β) Φυσιολογικά η αύξηση της θερμοκρασίας θα προκαλέσει στις ράβδους επιμηκύνσεις, που είναι αντίστοιχα

$$\Delta l_1^\theta = l_1 \alpha_1 \Delta \theta \quad \text{και} \quad \Delta l_2^\theta = l_2 \alpha_2 \Delta \theta.$$

Αν οι επιμηκύνσεις αυτές πληρούν την εξίσωση συμβιβασμού των παραμορφώσεων, που διατηρείται η ίδια μιάς και η παραμόρφωση του συστήματος δεν αλλάζει, δηλαδή αν

$$\beta_2 \Delta l_1^\theta = \beta_1 \Delta l_2^\theta, \quad (\beta')$$

τότε δεν παράγεται στις ράβδους επί πλέον ένταση, γιατί αυτές επιμηκύνονται σαν να ήταν ελεύθερες.

Στη συνήθως αντίθετη όμως περίπτωση εμφανίζεται αξονική καταπόνηση, που είναι εφελκυστική στη μία ράβδο και θλιπτική στην άλλη.

Έστω λοιπόν Θ_1 και Θ_2 οι δυνάμεις των ράβδων - λαμβάνονται αυθαίρετα θετικές οπότε το τελικό πρόσημο θα καθορίσει τη σωστή φορά - που κατά Hooke θ' αναπροσαρμόσουν τις επιμηκύνσεις, από Δl_1^∂ και Δl_2^∂ σε Δl_1^θ και Δl_2^θ αντίστοιχα, έτσι ώστε να συμβιβάζονται μεταξύ τους, ικανοποιώντας τη (β').

Τότε η συνθήκη $(\Sigma M)_A^{\uparrow+} = 0$, θα δώσει

$$\beta_1 \Theta_1 + \beta_2 \Theta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_2} \Theta_1. \quad (\alpha')$$

Η (β') γίνεται τώρα

$$\beta_2 \Delta l_1^\theta = \beta_1 \Delta l_2^\theta \quad \text{ή} \quad \Delta l_2^\theta = \frac{\beta_2}{\beta_1} \Delta l_1^\theta,$$

$$\text{δηλαδή:} \quad l_2 \alpha_2 \Delta \vartheta + \frac{\Theta_2 l_2}{E_2 F_2} = \frac{\beta_2}{\beta_1} \left(l_1 \alpha_1 \Delta \vartheta + \frac{\Theta_1 l_1}{E_1 F_1} \right),$$

ή λόγω και της (α')

$$\Delta \vartheta \left(l_2 \alpha_2 - \frac{\beta_2}{\beta_1} l_1 \alpha_1 \right) = \frac{\Theta_1 l_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} + \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \Theta_1 \right) \frac{l_2}{E_2 F_2} = \Theta_1 \left(\frac{l_1 \beta_2}{E_1 F_1 \beta_1} + \frac{l_2 \beta_1}{E_2 F_2 \beta_2} \right).$$

$$\text{Άρα} \quad \Theta_1 = \frac{\left(l_2 \alpha_2 - \frac{\beta_2}{\beta_1} l_1 \alpha_1 \right) \Delta \vartheta}{\frac{l_1 \beta_2}{E_1 F_1 \beta_1} + \frac{l_2 \beta_1}{E_2 F_2 \beta_2}},$$

οπότε η (α') θα δώσει την άλλη δύναμη

$$\Theta_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_2} \Theta_1 = \frac{\left(l_1 \alpha_1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} l_2 \alpha_2 \right) \Delta \vartheta}{\frac{l_1 \beta_2}{E_1 F_1 \beta_1} + \frac{l_2 \beta_1}{E_2 F_2 \beta_2}}.$$

Είναι φανερό ότι οι δυνάμεις Θ_1 και Θ_2 μηδενίζονται αν

$$l_1 \alpha_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2} l_2 \alpha_2,$$

γιατί τότε ικανοποιείται η (β').

γ) Είναι φανερό ότι ο συνδυασμός των παραπάνω δύο περιπτώσεων, θα δώσει σαν τελικές δυνάμεις των ράβδων το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών που προκύπτουν αντίστοιχα απ' την κάθε περίπτωση. Δηλαδή

$$\Sigma_1 = S_1 + \Theta_1 = \frac{ql^2}{2\left(\beta_1 + \frac{\beta_2^2 E_2 F_2 l_1}{\beta_1 E_1 F_1 l_2}\right)} + \frac{(\ell_2 \alpha_2 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \ell_1 \alpha_1) \Delta \vartheta}{\frac{\ell_1 \beta_2}{E_1 F_1 \beta_1} + \frac{\ell_2 \beta_1}{E_2 F_2 \beta_2}}$$

$$\Sigma_2 = S_2 + \Theta_2 = \frac{ql^2}{2\left(\beta_2 + \frac{\beta_1^2 E_1 F_1 l_2}{\beta_2 E_2 F_2 l_1}\right)} - \frac{(\ell_1 \alpha_1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \ell_2 \alpha_2) \Delta \vartheta}{\frac{\ell_1 \beta_2}{E_1 F_1 \beta_1} + \frac{\ell_2 \beta_1}{E_2 F_2 \beta_2}}$$

Αλλά βάσει των δεδομένων, είναι:

$$ql^2 = \frac{1000}{100} 500^2 = 2,5 \cdot 10^6 \text{ κρ} \cdot \text{cm},$$

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{F_2}{F_1} \cdot \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2,1}{1,3} \cdot \frac{16}{14} \cdot \frac{1,2}{1,5} = 1,97,$$

$$\begin{aligned} \frac{\ell_1 \beta_2}{E_1 F_1 \beta_1} + \frac{\ell_2 \beta_1}{E_2 F_2 \beta_2} &= \frac{120 \cdot 400}{1,3 \cdot 10^6 \cdot 14 \cdot 300} + \frac{150 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 16 \cdot 400} = \\ &= (8,97 + 3,35) \cdot 10^{-6} = 12,14 \cdot 10^{-6} \text{ cm/κρ}, \end{aligned}$$

$$\ell_1 \alpha_1 = 120 \cdot 16 \cdot 10^{-6} = 1,920 \cdot 10^{-6} \text{ cm/}^\circ\text{C} \quad \text{και}$$

$$\ell_2 \alpha_2 = 150 \cdot 12 \cdot 10^{-6} = 1,800 \cdot 10^{-6} \text{ cm/}^\circ\text{C}.$$

Άρα είναι

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{2,5 \cdot 10^6}{2(300 + 400 \cdot 1,97)} + \frac{(1,800 - \frac{4}{3} \cdot 1,920) \cdot 10^{-6} \cdot 40}{12,14 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 1.149 - 2.504 = -1.355 \text{ κρ}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \frac{2,5 \cdot 10^6}{2(400 + 300 \frac{1}{1,97})} + \frac{(1,920 - \frac{3}{4} \cdot 1,800) \cdot 10^{-6} \cdot 40}{12,14 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 2.263 + 1.878 = 4.141 \text{ κρ}. \end{aligned}$$

10 Ο δακτύλιος του σχήματος έχει μήκος ίσο με τη μονάδα και είναι σύνθετος, αποτελούμενος από τον εσωτερικό εξ αλουμινίου δακτύλιο (1) και τον εξωτερικό (2) από χάλυβα, με μέτρα ελαστικότητας E_1 και E_2 αντίστοιχα.

Αν τα πάχη t_1 και t_2 των δακτυλίων είναι μικρά σε σχέση με τη διάμετρο του κύκλου συνεπαφής d και οι συντελεστές γραμμικής διαστολής είναι $\alpha_1 > \alpha_2$, να υπολογιστούν οι τάσεις που εμφανίζονται στα δύο υλικά,

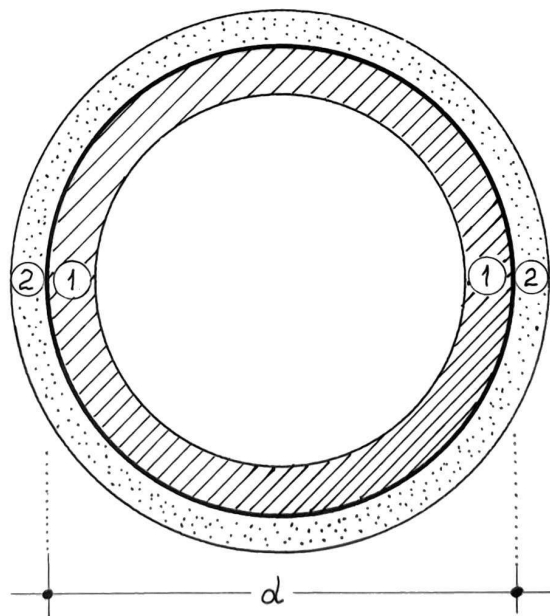
α) όταν η εξωτερική θερμοκρασία αυξηθεί κατά $\Delta\theta$, και

β) όταν στη θερμοκρασία περιβάλλοντος η εσωτερική διάμετρος του (2) είναι μικρότερη της εξωτερικής διαμέτρου του (1) κατά δ , οπότε βέβαια η κατασκευή συναρμολογείται ύστερα από θέρμανση του (2), ο οποίος, μετά την γύξη του, βρίσκει τον (1).

Λύση.

α) Επειδή $\alpha_1 > \alpha_2$, η αύξηση της θερμοκρασίας θα επιφέρει στην περιφέρεια του δακτυλίου (1) μεγαλύτερη επιμήκυνση απ' την αντίστοιχη του (2).

Επομένως οι δύο δακτύλιοι συμπιέζονται μεταξύ τους με αποτέλεσμα τη σύνθλιψη του εσωτερικού απ' τον εξωτερικό, ο οποίος εφελκύεται.



Αν καλέσουμε χ την αμοιβαία ομοιόμορφη πίεση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια συνεπαφής των δακτυλίων, οι ορθές τάσεις που εμφανίζονται στα δύο υλικά, δίνονται απ' τη σχέση 9 της βελ. 62 και είναι αντίστοιχα

$$\sigma_1^g = -\frac{R\chi}{t_1} = -\frac{\chi d}{2t_1} \quad \text{και} \quad \sigma_2^g = \frac{\chi d}{2t_2}$$

Η πίεση x , θα βρεθεί τώρα αν εκφράσουμε την προφανή συνθήκη, ότι κατά τη θέρμανση, οι δύο δακτύλιοι εμφανίζουν την ίδια περιφερειακή επιμήκυνση, που είναι, για τον εσωτερικό δακτύλιο (1)

$$\Delta \Pi_1 = \alpha_1 \Pi_0 \Delta \vartheta - \frac{\sigma_1^{\vartheta}}{E_1} \Pi_0 = \left(\alpha_1 \Delta \vartheta - \frac{x d}{2 t_1 E_1} \right) \Pi_0 = n d \left(\alpha_1 \Delta \vartheta - \frac{x d}{2 E_1 t_1} \right)$$

και για τον εξωτερικό δακτύλιο (2)

$$\Delta \Pi_2 = n d \left(\alpha_2 \Delta \vartheta + \frac{x d}{2 E_2 t_2} \right)$$

αντίστοιχα. Όποτε λοιπόν, είναι

$$\Delta \Pi_1 = \Delta \Pi_2 \Rightarrow \alpha_1 \Delta \vartheta - \frac{x d}{2 E_1 t_1} = \alpha_2 \Delta \vartheta + \frac{x d}{2 E_2 t_2}$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta \vartheta = \frac{x d}{2} \left(\frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right) \quad \text{και} \quad x = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta \vartheta}{\frac{d}{2} \left(\frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right)}$$

Έτσι, οι ορθές τάσεις που εμφανίζονται στα δύο υλικά, είναι

$$\sigma_1^{\vartheta} = - \frac{x d}{2 t_1} = - \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta \vartheta}{\frac{d}{2} \left(\frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right)} \cdot \frac{d}{2 t_1} = \frac{1}{t_1} \cdot \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta \vartheta}{\frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2}} \quad (i)$$

$$\text{και} \quad \sigma_2^{\vartheta} = \frac{x d}{2 t_2} = \frac{1}{t_2} \cdot \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta \vartheta}{\frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2}} \quad \text{αντίστοιχα.} \quad (ii)$$

Απ' τα παραπάνω, εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\sigma_1^{\vartheta}}{\sigma_2^{\vartheta}} = \frac{t_2}{t_1} >$$

που δείχνει ότι οι τάσεις των δύο υλικών είναι αντιτρόφως ανάλογοι προς τα πάχη των σφηνομένων δακτυλίων.

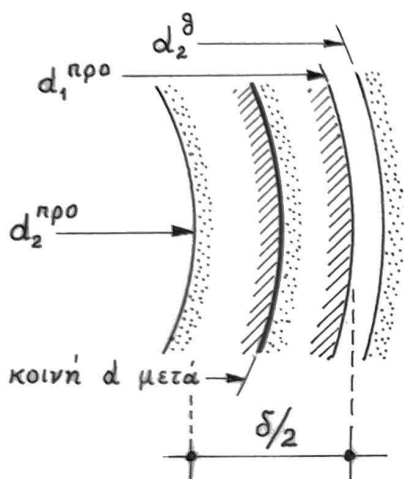
β) Κατά τη συναρμολότητα ο δακτύλιος (2) θερμαίνεται. Όταν η διάμετρος του αυξηθεί ικανοποιητικά, παύει η θέρμανση, και, μετά την τοποθέτηση του (1) εσωτερικά, γύχεται.

Κατά το στάδιο της γύξης, όταν οι δύο δακτύλιοι έλθουν σε επαφή, αρχίζει με αυξανόμενο ρυθμό να εμφανίζεται στην

επιφάνεια επαφής των δακτυλίων ομοιόμορφη περιφερειακή πίεση, που οδηγεί στην ανάπτυξη θλιπτικών τάσεων στο δακτύλιο (1) και εφελκυστικών στο (2).

Αν ρ είναι η τιμή της πίεσης αυτής μετά την ολοκλήρωση της γύξης, οι ορθές τάσεις που εμφανίζονται στα δύο υλικά όπως προηγουμένως, είναι

$$\sigma_1 = -\frac{R \cdot \rho}{t_1} = -\frac{\rho d}{2t_1} \quad \text{και} \quad \sigma_2 = \frac{\rho d}{2t_2} \quad (\alpha)$$



Η ελάττωση δ_1 που έγινε κατά την γύξη στην εξωτερική διάμετρο του (1) θα είναι

$$\delta_1 = \epsilon_1 d = \frac{\sigma_1}{E_1} d = \frac{\rho d}{2t_1} \cdot \frac{d}{E_1} = \frac{\rho d^2}{2E_1 t_1}$$

Αντίστοιχα, η παραμένουσα πλέον μετά την γύξη αύξηση της εσωτερικής διαμέτρου του (2) είναι

$$\delta_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} d = \frac{\rho d^2}{2E_2 t_2}$$

Η άγνωστη πίεση ρ θα βρεθεί τώρα απ' τη συνθήκη

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta,$$

που αποτελεί και την εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων. Έτσι προκύπτει

$$\frac{\rho d^2}{2E_1 t_1} + \frac{\rho d^2}{2E_2 t_2} = \delta \quad \text{ή} \quad \frac{\rho d^2}{2} \left(\frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right) = \delta,$$

οπότε

$$\rho = \frac{2\delta}{d^2} \cdot \frac{E_1 t_1}{1 + \frac{E_1 t_1}{E_2 t_2}}$$

Οι τιμές των τάσεων υπολογίζονται τώρα βάσει των σχέσεων (α)

$$\sigma_1 = -\frac{\rho d}{2t_1} = -\frac{2\delta}{d^2} \cdot \frac{E_1 t_1}{1 + \frac{E_1 t_1}{E_2 t_2}} \cdot \frac{d}{2t_1} = -\frac{\delta}{d} \cdot \frac{E_1}{1 + \frac{E_1 t_1}{E_2 t_2}} \quad (\beta)$$

$$\kappa\alpha\iota \quad \sigma_2 = \frac{2\delta}{d^2} \cdot \frac{E_1 t_1}{1 + \frac{E_1 t_1}{E_2 t_2}} \cdot \frac{d}{2t_2} = \left(\frac{\delta}{d} \cdot \frac{E_1}{1 + \frac{E_1 t_1}{E_2 t_2}} \right) \cdot \frac{t_1}{t_2} = \sigma_1 \frac{t_1}{t_2} \quad (\gamma)$$

11. Για την περίπτωση β' του προηγούμενου προβλήματος, να υπολογιστούν:

α) Οι τάσεις που θα εμφανιστούν στα δύο υλικά, αν είναι: $t_1 = t_2$, $\delta = 0,1 \text{ mm}$, $d = 30 \text{ cm}$, $E_1 = 8 \cdot 10^5 \text{ κρ/cm}^2$, $E_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ κρ/cm}^2$ και

β) Οι μεταβολές των τάσεων αυτών, αν μετά τη συναρμογή και γύξη του (2) η θερμοκρασία αυξηθεί κατά 35°C .

Να ληφθεί $\alpha_1 = 22 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ και $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$.

Λύση.

α) Οι τάσεις των δύο υλικών θα προκύγουν προφανώς απ' τους τύπους (γ) και (δ) του προβλήματος. Επειδή όμως

$$t_1 = t_2 \quad \text{ή} \quad \frac{t_1}{t_2} = 1,$$

έπεται ότι αυτές θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή

$$-\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\delta}{d} \cdot \frac{E_1}{1 + \frac{E_1}{E_2}} = \frac{0,01}{30} \cdot \frac{8 \cdot 10^5}{1 + \frac{8 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^6}} = 190,5 \text{ κρ/cm}^2$$

β) Η μεταβολή των τάσεων αυτών θα βρεθεί αντίστοιχα απ' τους τύπους (i) και (ii), όπου, με βέγεις ανάλογες, βρίσκουμε ότι είναι

$$-\sigma_1^g = \sigma_2^g = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta \theta}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}} = \frac{(22 - 12) \cdot 10^{-6} \cdot 35}{\left(\frac{1}{0,8} + \frac{1}{2} \right) \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ κρ/cm}^2$$

12. Να υπολογιστούν οι τάσεις που αναπτύσσονται στο σώτρο⁽¹⁾ και το επίσωτρο⁽²⁾ βιδηροδρομικού τροχού από χάλυβα, ό-

(1) Σώτρο: Η από ξύλο ή μέταλλο περιφέρεια του τροχού οχήματος, όπου προσαρμόζονται οι ακτίνες.

(2) Επίσωτρο: Το από χάλυβα ή ελαστικό περίβλημα του σώτρου.

ταν είναι γνωστό ότι η εξωτερική διάμετρος του σώτρου είναι $d=1000\text{ mm}$, ενώ η εσωτερική διάμετρος του επισώτρου, πρό της εν θερμώ προσαρμογής του στη στεφάνη του σώτρου, $d'=999\text{ mm}$.

Στη συνέχεια να βρεθεί η ελάχιστη απαιτούμενη αύξηση της θερμοκρασίας του επισώτρου, για να είναι δυνατή η προσαρμογή του στο σώτρο. Δίνονται επί πλέον: διατομή σώτρου $F_1=3.000\text{ mm}^2$, επισώτρου $F_2=9.000\text{ mm}^2$, συντελ. γραμ. διαστ. $\alpha=12\cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ και $E=2\cdot 10^6\text{ κρ/εκ}^2$.

Λύση.

Πριν εφαρμόσουμε τους τύπους (β) και (γ) του προβλήματος 10, παρατηρούμε ότι, αν b το πλάτος του τροχού, ο λόγος των παχών σώτρου - επισώτρου, είναι

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{t_1 \cdot b}{t_2 \cdot b} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{3.000}{9.000} = \frac{1}{3}.$$

Και επειδή $\frac{\delta}{d} = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$, και $\frac{E_1}{E_2} = 1$,

οι ζητούμενες τάσεις είναι:

$$\sigma_{\text{σώτρου}} = \sigma_1 = - \frac{10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^6}{1 + \frac{1}{3}} = - 1.500\text{ κρ/εκ}^2$$

$$\sigma_{\text{επισώτρου}} = \sigma_2 = - \frac{t_1}{t_2} \sigma_{\text{σώτρου}} = \frac{1.500}{3} = 500\text{ κρ/εκ}^2$$

Για να είναι δυνατή η προσαρμογή του επισώτρου στη στεφάνη του σώτρου, θα πρέπει η διάμετρος του πρώτου ν' αυξηθεί τουλάχιστον κατά $\Delta d' = 1\text{ mm}$.

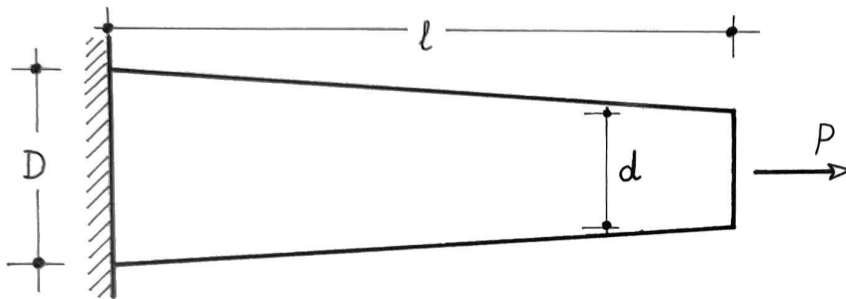
Αν επομένως $\Delta \theta$ είναι η απαιτούμενη γιαυτό αύξηση της θερμοκρασίας, θα είναι

$$\Delta d' = d' \cdot \alpha \cdot \Delta \theta,$$

οπότε
$$\Delta \theta = \frac{\Delta d'}{d' \cdot \alpha} = \frac{1}{999 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} = 83,4^\circ\text{C}.$$

Ασκήσεις.

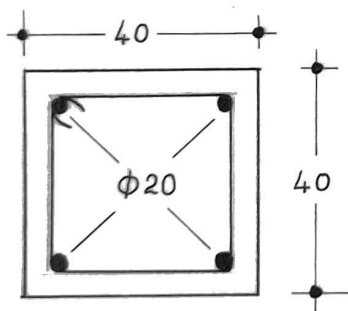
① Η ράβδος AB του σχήματος είναι ομοιόμορφα μεταβαλλόμενης κυκλικής διατομής και εφελκύεται αξονικά με δύναμη P. Αν D και d είναι οι διάμετροι των ακραίων διατομών της ράβδου, l το μήκος της και E το μέτρο ελαστικότητάς της, να υπολογιστεί η επιμήκυνση λόγω P.



Απάντηση:

$$\Delta l = \frac{4 \cdot P \cdot l}{\pi \cdot E \cdot D \cdot d}$$

② Υποστύλωμα οπλισμένου εκκυροδέματος, τετραγωνικής διατομής $40 \times 40 \text{ cm}$, φέρει θλιπτικό φορτίο 60 t και είναι οπλισμένο με χαλύβδινο οπλισμό $4\phi 20$.



Αν το μέτρο ελαστικότητας του εκκυροδέματος είναι $E_b = 140.000 \text{ κρ/cm}^2$ ενώ του χάλυβα $E_e = 15 E_b$, να υπολογιστούν

α) Οι θλιπτικές τάσεις σ_b και σ_e που αναπτύσσονται στο εκκυρόδεμα και το χάλυβα αντίστοιχα και

β) Η ανηγμένη επιβράχυνση του στύλου.

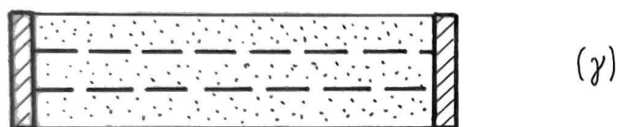
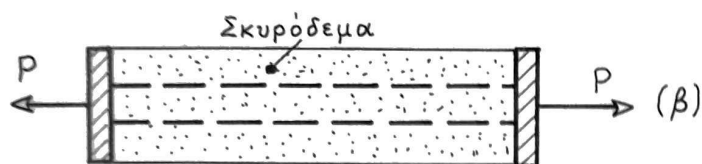
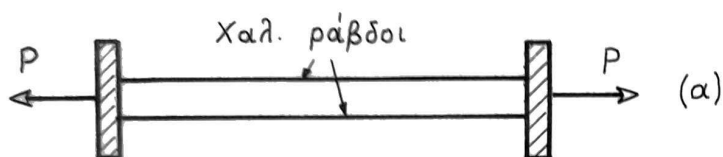
Απάντηση: α) $\sigma_b = 33,6 \text{ κρ/cm}^2$, $\sigma_e = 504 \text{ κρ/cm}^2$

β) $\epsilon = 2,4 \cdot 10^{-4}$.

③ Το προεντεταμένο εκκυρόδεμα κατασκευάζεται μερικές φορές με τον ακόλουθο τρόπο.

Χαλύβδινες ράβδοι πολύ υψηλής αντοχής τεντώνονται με

ειδικό υδραυλικό μηχανισμό που επιβάλλει σ' αυτές εφελκυστική δύναμη P (βλ. α).



Τότε χύνεται το εκυρόδεμα που τις βκεπάζει, για να σχηματίσει π.χ. την εικονιζόμενη δοκό του βλ. β.

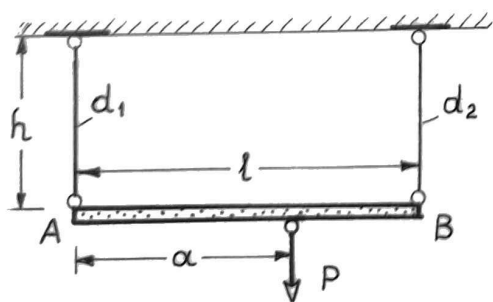
Μετά την πήξη του εκυρόδεματος και την απόκτηση της κατάλληλης αντοχής του, οι υδραυλικοί μηχανισμοί παύουν πλέον να εξα-
σκούν την P και απομα-
κρύνονται (βλ. γ).

Έτσι η δοκός βρίσκεται σε εντατική κατάσταση με εφελκυσμό στο χάλυβα και θλίψη στο εκυρόδεμα.

Έστω ότι η P επιβάλλει αρχικά στις ράβδους εφελκυστική τάση $\sigma_0 = 5000 \text{ κρ/σν}^2$. Αν τα μέτρα ελαστικότητας χάλυβα - εκυρόδεματος έχουν λόγο $E_e : E_b = 10 : 1$ ενώ αντίστοιχα οι διατομές τους έχουν λόγο $F_e : F_b = 1 : 40$, να υπολογιστούν οι τάσεις που αναπτύσσονται τελικά στα δύο υλικά.

Απάντηση: $\sigma_e = 4.000 \text{ κρ/σν}^2$, $\sigma_b = 100 \text{ κρ/σν}^2$.

4. Η δοκός AB του σχήματος είναι άκαμπτη και κρέμεται απ' τα άκρα της A και B από δύο ράβδους που είναι απ' το ίδιο υλικό, έχουν το ίδιο μήκος και διαμέτρους d_1 και d_2



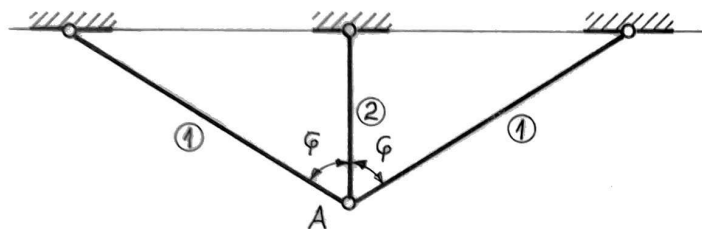
Παραλείποντας το ίδιο βάρος δοκού και ράβδων, να υπολογιστεί σε ποιά απόσταση απ' το A πρέπει να ενεργήσει κατακόρυφα συγκεντρωμένο φορτίο

P , ώστε η δοκός να παραμείνει οριζόντια.

Απάντηση: $\alpha = \frac{d_2^2}{d_1^2 + d_2^2} \ell$.

⑤. Του εικονιζόμενου συμμετρικού δικτυώματος να υπολογιστούν οι δυνάμεις των ράβδων του, αν η θερμοκρασία μόνον της μεσαίας ράβδου αυξηθεί κατά $\Delta\theta$.

Να ληφθούν E , F και α τα ίδια για όλες τις ράβδους.



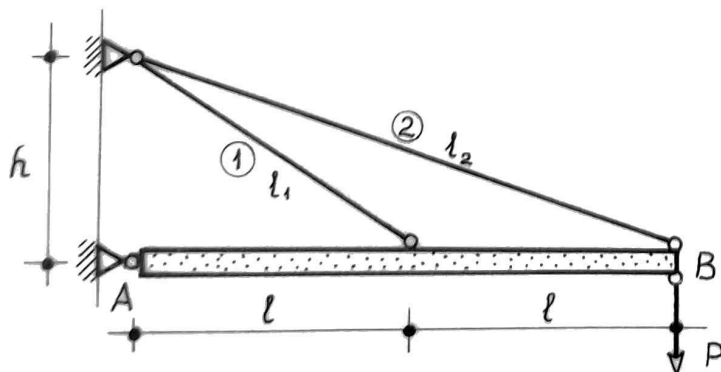
Απάντηση:

$$S_1 = \frac{6\nu\varphi}{1+26\nu^3\varphi} E F \alpha \Delta\theta$$

$$S_2 = - \frac{26\nu^3\varphi}{1+26\nu^3\varphi} E F \alpha \Delta\theta$$

⑥. Η άκαμπτη ράβδος AB του σχήματος στηρίζεται με τη βοήθεια άρθρωσης στο A και δύο ράβδων που είναι από το ίδιο υλικό και έχουν διατομές F_1 και F_2 .

Με δοσμένη τη διαστασιολόγηση της κατασκευής και θεωρώντας τα βάρη των μελών της αμελητέα, να υπολογιστούν οι εφελκυστικές δυνάμεις των ράβδων 1 και 2 μετά την τοποθέτηση του φορτίου P στο B .



Απάντηση:

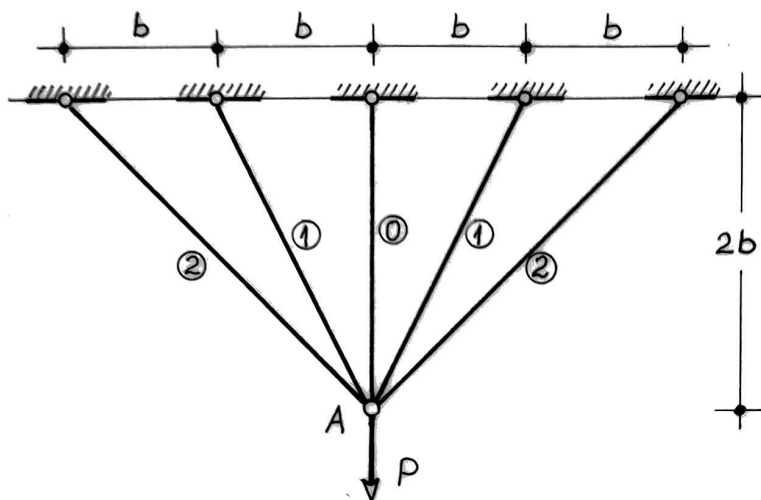
$$S_1 = \frac{2P}{4h \frac{F_2}{F_1} \frac{\ell_1^2}{\ell_2^3} + \frac{h}{\ell_1}}$$

$$S_2 = \frac{2P}{\frac{h}{2} \frac{F_1}{F_2} \frac{\ell_2^2}{\ell_1^3} + 2 \frac{h}{\ell_2}}$$

⑦. Η κατασκευή του σχήματος αποτελείται από πέντε

χαλύβδινες ράβδους διαμέτρου $d = 1 \text{ cm}$.

Αν $\sigma_{\text{ελ}} = 1400 \text{ kg/cm}^2$, να υπολογιστεί η επιτρεπόμενη τιμή του φορτίου P .



Απάντηση:

$$P_{\text{ελ}} = 3.450 \text{ kg.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

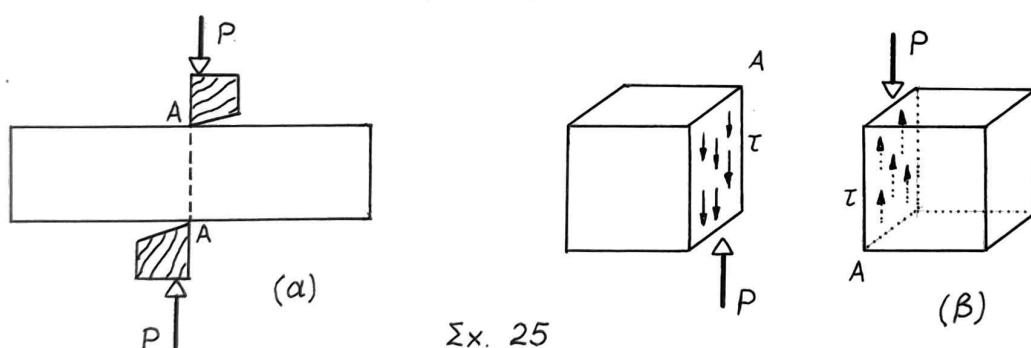
ΔΙΑΤΜΗΣΗ

1. Οι εσωτερικές δυνάμεις και οι τάσεις.

Στις περιπτώσεις που μελετήσαμε ως τώρα η καταπόνηση ήταν αξονική και οι τάσεις πάντοτε ορθές, δηλαδή η διεύθυνσή τους κάθετη στην καταπονούμενη επιφάνεια.

Είναι όμως δυνατόν η τάση να είναι παράλληλη προς την καταπονούμενη επιφάνεια, οπότε ονομάζεται διατμητική και συμβολίζεται με το γράμμα τ .

Την διάτμηση ορίσαμε ήδη στην παρ. 3β βελ. 8, σαν μία καταπόνηση που εμφανίζεται όταν δύο δυνάμεις ίσες και αντίθετες, ενεργούν κάθετα στον άξονα μιας ράβδου, στον ίδιο σχεδόν φορέα (βλ. 25α).



Σχ. 25

Τότε η διατομή AA της ράβδου καταπονείται σε διάτμηση.

Η εσωτερική δύναμη είναι ίση με P και είναι η συνισταμένη όλων των διατμητικών στοιχειωδών δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ των μορίων, που θεωρούνται -χωρίς να είναι- ομοιόμορφα κατανεμημένες.

Το μέρος της δύναμης που αντιστοιχεί στη μονάδα επιφάνειας της διατομής είναι η διατμητική τάση τ (βλ. 25β).

Η εύρεση του νόμου μεταβολής των τάσεων τ πάνω στη διατομή είναι πρόβλημα πολύ δύσκολο, αν όχι αδύνατο.

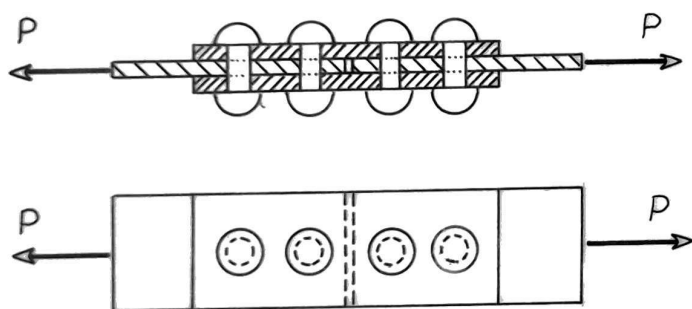
Γι' αυτό αρκούμαστε στον προδιορισμό της μέσης τιμής της διατμητικής τάσης:

$$\tau = \frac{P}{F} \quad (1)$$

όπου F το εμβαδόν της διατομής.

Η σχέση αυτή είναι καθαρά προεγγιστική και ισχύει περισσότερο για γαθυρά παρά για συνεκτικά υλικά. Και τούτο, γιατί στα γαθυρά υλικά του σχ. 25α, το υλικό θραύεται με σχεδόν επίπεδη διατομή, πράγμα που δεν συμβαίνει με τα συνεκτικά, όπου η διάτμηση συνδυάζεται τοπικά, στη διατομή, και με εφελκυσμό.

Χαρακτηριστική μορφή διάτμησης, όπου εφαρμόζεται η σχέση (1), παρουσιάζεται στις πλώδεις (σχ. 26). Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι οι



Σχ. 26

διατμητικές δυνάμεις που παραλαμβάνουν οι ήλοι δεν είναι ίσες μεταξύ τους.

Όμως χάριν απλότητας, δεχόμαστε στις εφαρμογές ότι η συνολική διατμητική δύναμη, που συνήθως είναι

εφελκυστική δύναμη, παραλαμβάνεται εξ ίσου από κάθε ήλο.

Επίσης η ήλωση μπορεί να είναι μονότμητη, δίτμητη κ.ο.κ. αν η επιφάνεια διάτμησης κάθε ήλου είναι μία, δύο κ.ο.κ. Στο παράδειγμα του σχ. 26, όπου παρουσιάζεται η ένωση δύο ελασμάτων με αρμοκαλύπτρες, η δύναμη που παραλαμβάνει κάθε ήλος, είναι:

$$T_1 = T_2 = \frac{P}{2} \quad (2)$$

Και επειδή κάθε ήλος είναι δίτμητος, η διατμητική δύναμη που παραλαμβάνει κάθε επιφάνεια διάτμησης, είναι:

$$\tau = \frac{T_1}{2} = \frac{P}{4} \quad (3)$$

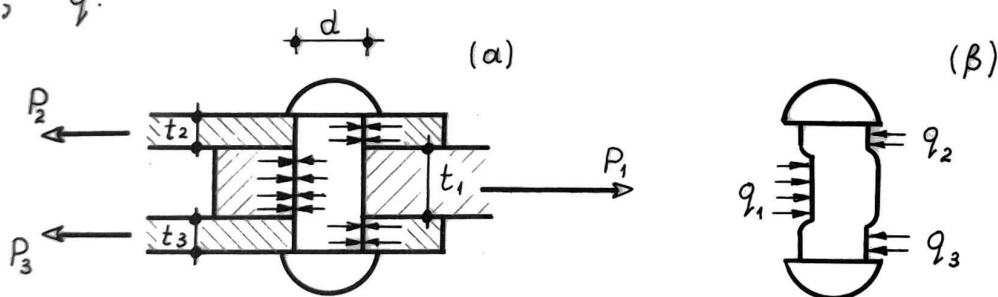
2. Σύνθλιψη άντυνας οπών.

Η σύνδεση ελασμάτων με ήλους ή κοχλίες, όπως φαίνεται στο σχ. 27, που παριστάνει σε λεπτομέρεια το τμήμα του δεξιού ήλου του σχήματος 26, είναι πολύ συνηθισμένη στις σιδηρές κατασκευές (στέγες, γέφυρες κ.λ.π.).

Η δύναμη P_1 του ελασματος 1 ισορροπείται από τις $P_2 = P_3 = \frac{P_1}{2}$ των ελασμάτων 2 και 3.

Η μεταβίβαση της δύναμης P_1 από το έλασμα 1 στα ελάσματα 2 και 3 γίνεται με τη βοήθεια του ήλου, διαμέτρου d .

Ο ήλος λοιπόν, αναλαμβάνοντας τη δύναμη από το έλασμα 1, την μεταδίδει, καταπονούμενος ταυτόχρονα σε διάτμηση, στα ελάσματα 2 και 3 μέσω τάσεων που θλίβουν την κοίλη επιφάνεια των οπών και γι'αυτό λέγονται τάσεις σύνθλιψης άντυνας, q .



Σχ. 27

Στο σχήμα 27β έχει απομονωθεί ο ήλος και σχεδιάστηκαν οι τάσεις που ασκούν οι παράπλευρες επιφάνειες των οπών των ελασμάτων, πάνω στον ήλο.

Οι ίσες και αντίθετες τάσεις ασκούνται απ' τον ήλο, σε παράπλευρη επιφάνεια:

$$F = t \cdot d,$$

όπου t το πάχος του ελασματος και d η διάμετρος του ήλου.

Φυσικά και εδώ δεχόμαστε ομοιόμορφη κατανομή των τάσεων.

Για το παραπάνω σχήμα, η τάση σύνθλιψης άντυνας για το

κάθε έλασμα, θα είναι:

$$q_1 = \frac{P_1}{F_1} = \frac{P_1}{t_1 \cdot d} \quad (4)$$

$$q_2 = q_3 = \frac{P_1}{2F_2} = \frac{P_1}{2t_2 \cdot d} \quad (5)$$

3. Έλεγχος αντοχής.

Όπως στην περίπτωση του εφελκυσμού, που περιγράψαμε ήδη στη σελ. 48, έτσι και στην καθαρή διάτμηση, οι συνθήκες αντοχής που χρησιμοποιούμε, είναι:

$$\tau_{vn} = \frac{P_{vn}}{F_{vn}} \leq \tau_{en} \quad (6)$$

$$q_{vn} = \frac{P_{vn}}{t_{vn} \cdot d} \leq q_{en} \quad (7)$$

όπου τ_{en} και q_{en} οι επιτρεπόμενες αντίστοιχα διατμητική τάση και τάση σύνθλιψης άντυνας.

Στις εφαρμογές, οι συνθήκες (6) και (7) χρησιμοποιούνται εντελώς ανάλογα προς την αντίστοιχη συνθήκη αντοχής στον εφελκυσμό, δηλαδή για:

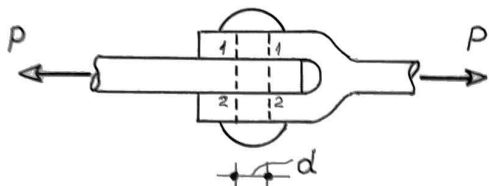
$$\left. \begin{array}{l} \text{α) Έλεγχος τάσεων} \\ \text{Δίνονται } P, F \\ P, t, d \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \tau_{vn} = \frac{P}{F} ; \tau_{en} \\ q_{vn} = \frac{P}{t \cdot d} ; q_{en} \end{array} \quad (8)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{β) Διαστασιολόγηση} \\ \text{Δίνονται } P, \tau_{en} \\ P, d, q_{en} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} F_{an} \geq \frac{P}{\tau_{en}} \\ t_{an} \geq \frac{P}{d \cdot q_{en}} \end{array} \quad (9)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{γ) Ικανότητα φόρτισης} \\ \text{Δίνονται } F, \tau_{en} \\ t, d, q_{en} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} P \leq F \cdot \tau_{en} \\ P \leq t \cdot d \cdot q_{en} \end{array} \quad (10)$$

Προβλήματα διάτμησης.

1. Η εφελκνόμενη δύναμη που μεταβιβάζεται μέσω του αρθρωτού συνδέσμου του σχήματος είναι $P = 6 \text{ t}$.



Να υπολογιστεί η διάμετρος d του ήλου που θα χρησιμοποιηθεί για το έκοπό αυτό, αν η επιτρεπόμενη διατμητική του τάση είναι $\tau_{\text{ελ}} = 450 \text{ kg/cm}^2$.

Λύση.

Επειδή ο ήλος είναι δίτμητος, έπεται ότι κάθε μία απ' τις διατμητικές του επιφάνειες (1-1 και 2-2), που το εμβαδόν τους απαιτείται να είναι

$$F_{\text{αη}} = \frac{\pi d^2}{4} = 0,78 d^2,$$

παραλαμβάνει δύναμη $T = P/2$.

Έτσι η υπάρχουσα διατμητική τάση σε κάθε διατομή θα πρέπει να είναι

$$\tau_{\text{υη}} = \frac{P}{2 F_{\text{αη}}} \leq \tau_{\text{ελ}},$$

$$\text{οπότε} \quad F_{\text{αη}} \geq \frac{P}{2 \tau_{\text{ελ}}} = \frac{6.000}{2 \cdot 450} = 6,67 \text{ cm}^2.$$

Το εμβαδό αυτό, που αντιστοιχεί σε κύκλο με διάμετρο

$$d = \sqrt{\frac{6,67}{0,78}} = 2,92 \text{ cm},$$

μας οδηγεί στην εκλογή ήλου με διάμετρο $d = 30 \text{ mm}$.

2. Ο σύνδεσμος του σχήματος αποτελείται από ισοπαχή ελάσματα και φέρει εφελκυστική δύναμη $P = 10 \text{ t}$.

Με δοσμένες τις χαρακτηριστικές τιμές των επιτρεπομένων τάσεων, δηλαδή:

επιτρεπόμενη διατμητική τάση ήλου $\tau_{ελ} = 500 \text{ kg/cm}^2$

-||- εφελκυστική -||- ελασματος $\sigma_{ελ} = 1.400$ -||-

-||- σύνθλιψη άντυνας -||- $q_{ελ} = 1.000$ -||-,

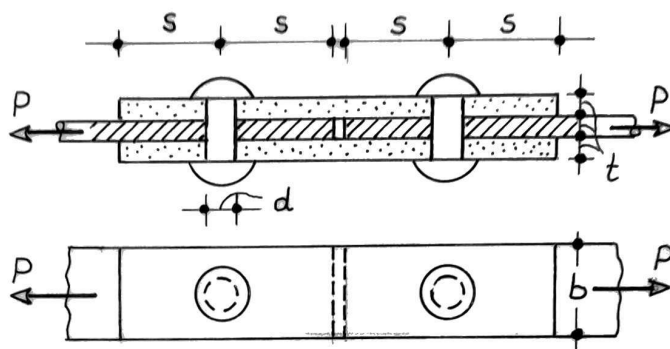
να υπολογιστούν

α) Οι διαμέτροι των ήλων και

β) Οι διαστάσεις των συνδεομένων ελασμάτων.

Λύση.

α) Απ' τη διαμόρφωση του συνδέσμου, παρατηρούμε ότι ολόκληρη η δύναμη P του αριστερού ή δεξιού τμήματος παραλαμβάνεται απ' τον αντίστοιχο ήλο, που είναι δίτμητος.



Αν λοιπόν $F_{ελ}$ είναι η διατομή των ήλων για την εξαεφάλιση της διατμητικής τους αντοχής, θα πρέπει

$$\tau_{υη} = \frac{P}{2F_{ελ}} \leq \tau_{ελ},$$

δηλαδή
$$F_{ελ} \geq \frac{P}{2\tau_{ελ}} = \frac{10.000}{2 \cdot 500} = 10 \text{ cm}^2.$$

Άρα
$$\frac{\pi d^2}{4} \geq 10 \text{ cm}^2 \quad \text{ή} \quad d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 10}{\pi}} = 3,57 \text{ cm},$$

οπότε εκλέγουμε την πλησιέστερη προς τα άνω διάμετρο $d = 36 \text{ mm}$.

β) Αν τώρα t είναι το πάχος των ελασμάτων, θα πρέπει τούτο να είναι αρκετό ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος σύνθλιψης της άντυνας της οπής.

Κι επειδή ο κίνδυνος αυτός βρίσκεται κύρια στο ενδιαμέσο ελάσμα που φέρει όλη τη δύναμη, ο έλεγχος σύνθλιψης άντυνας πρέπει να γίνει μόνο σ' αυτό. Έτσι θα έχουμε:

$$q_{\nu\eta} = \frac{P}{t \cdot d} \leq q_{\epsilon\eta},$$

οπότε
$$t \geq \frac{P}{d q_{\epsilon\eta}} = \frac{10.000}{3,6 \cdot 1000} = 2,78 \text{ cm}.$$

Εκλέγεται λοιπόν πάχος ελασμάτων $t = 28 \text{ mm}$.

Όσον αφορά το πλάτος b των συνδεομένων ελασμάτων, θα πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε, η ωφέλιμη διατομή F_w του ενδιαμέσου πάλι ελάσματος που απομένει μετά την αφαίρεση της οπής, να μπορεί να παραλάβει ολόκληρο το φορτίο εφελκυσμού. Δηλαδή

$$\sigma_{\nu\eta} = \frac{P}{F_w} \leq \sigma_{\epsilon\eta},$$

οπότε
$$F_w \geq \frac{P}{\sigma_{\epsilon\eta}} = \frac{10.000}{1.400} = 7,14 \text{ cm}^2.$$

Αλλά είναι $F_w = (b - d) \cdot t.$

Άρα $b t = F_w + d \cdot t$ ή $b = \frac{F_w}{t} + d = \frac{7,14}{2,8} + 3,6 = 6,15 \text{ cm},$

οπότε εκλέγεται πλάτος ελασμάτων $b = 62 \text{ mm}$.

Τέλος για ν' αποφύγουμε τον κίνδυνο σχισίματος του ελάσματος, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε μία ελάχιστη απόσταση s μεταξύ του κέντρου του ήλου και του άκρου του ελάσματος.

Αν για τον έλεγχο σε διάσχιση λάβουμε επιτρεπόμενη τάση

$$\sigma_{s\epsilon\eta} = 0,5 \cdot \sigma_{\epsilon\eta} = 700 \text{ κρ/cm},$$

τότε το απαιτούμενο μήκος s θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\sigma_{s\nu\eta} = \frac{P}{2 \cdot s \cdot t} \leq \sigma_{s\epsilon\eta},$$

οπότε
$$s \geq \frac{P}{2 \cdot t \cdot \sigma_{s\epsilon\eta}} = \frac{10.000}{2 \cdot 2,8 \cdot 700} = 2,55 \text{ cm}.$$

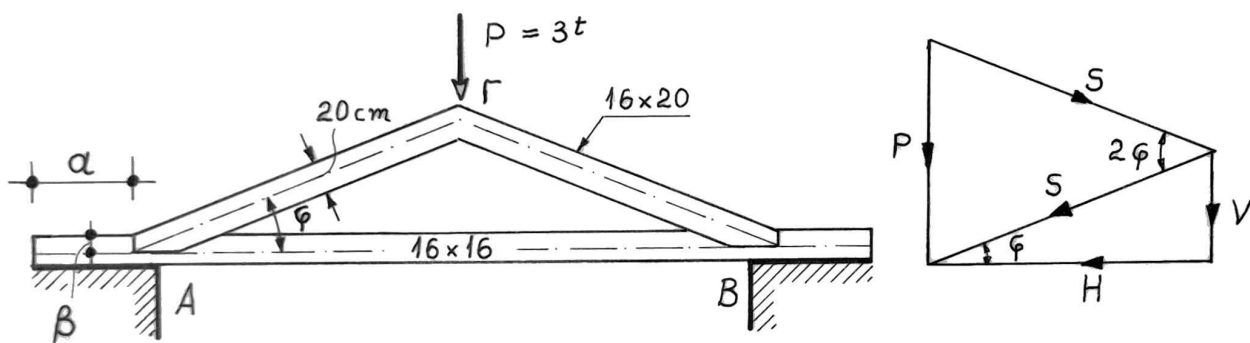
3. Για τη στήριξη της ξύλινης κατασκευής του εχήματος, όπου η γωνία κλίσεως του αμείβοντος με την οριζόντια είναι $\varphi = 22^\circ$, ζητείται να υπολογιστούν:

α) Η απόσταση a που είναι απαραίτητη για ν' αναλάβει τη διάτμηση που προέρχεται απ' την οριζόντια συνιστώσα του αμείβοντος, και

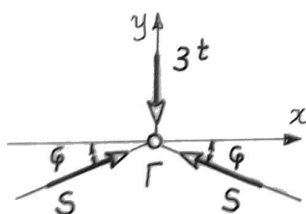
β) Το απαιτούμενο για τον ίδιο σκοπό βάθος εντορμίας β .

Αμελώντας την τριβή που αναπτύσσεται ανάμεσα στις συνδεδεμένες επιφάνειες, οι χαρακτηριστικές τιμές αντοχής του ξύλου παράλληλα προς τις ίνες του, να ληφθούν: $\tau_{ελ} = 9 \text{ κρ/σμ}^2$, $\sigma_{ελ.θλ} = 85 \text{ κρ/σμ}^2$.

Λύση.



α) Ο υπολογισμός της οριζόντιας συνιστώσας H του αμείβοντος μπορεί να γίνει είτε γραφικά με τη βοήθεια δυναμοπολυγώνου, όπου, μετά την ανάλυση της P στις δύο γνωστές διευθύνσεις και τον προσδιορισμό της S , λαμβάνεται η οριζόντιά της προβολή H , είτε αναλυτικά απ' την ισορροπία του κόμβου Γ



$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -3 + 2S \eta \mu \varphi = 0$$

$$\text{Άρα } S = \frac{3}{2 \eta \mu 22^\circ} = 4^t,$$

$$\text{και συνεπώς } S_x = H = 4 \cdot \sigma \nu 22^\circ = 3,7^t.$$

Για την ασφάλεια σε διάτμηση, θα πρέπει

$$\tau_{υη} = \frac{H}{F_{αη}} \leq \tau_{ελ}, \quad \text{όπου } F_{αη} = 16 \cdot a \text{ σμ}^2.$$

$$\text{Άρα } 16 \cdot a \geq \frac{H}{\tau_{\text{ελ}}} \quad \text{ή} \quad a \geq \frac{H}{16 \tau_{\text{ελ}}} = \frac{3.700}{16 \cdot 9} = 25,7 \text{ cm.}$$

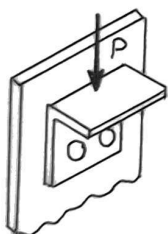
β) Αν β είναι το απαιτούμενο βάθος της εντορμίας, τότε θα πρέπει να είναι αρκετό ώστε η θλιπτική τάση που αναπτύσσεται τοπικά στο κατακόρυφο τοίχωμά της (εμβαδού $16b$), λόγω της H , να μην ξεπερνάει την επιτρεπόμενη. Δηλαδή

$$\sigma_{\text{υλ.θλ.}} = \frac{H}{16 \cdot b} \leq \sigma_{\text{ελ.θλ.}},$$

$$\text{οπότε} \quad b \geq \frac{H}{16 \cdot \sigma_{\text{ελ.θλ.}}} = \frac{3.700}{16 \cdot 85} = 2,72 \text{ cm.}$$

Ασκήσεις.

① Στην πρακτική των κατασκευών συχνά χρησιμοποιούμε ξύλινους ή μεταλλικούς τάκους προκειμένου να στηρίζουμε οριζόντια ράφια, δοκούς κ.λ.π.



Στην κατασκευή του εχήματος δύο ή λοι διαμέτρου $d = 3 \text{ mm}$ παραλαμβάνουν μέσω τάκου κατακόρυφη δύναμη P .

Αν η μέση επιτρεπόμενη τιμή της διατμητικής τάσης των ήλων είναι $\tau_{\text{ελ}} = 450 \text{ κρ/cm}^2$ να υπολογιστεί η P_{max} .

Απάντηση: $P_{\text{max}} = 63,5 \text{ κρ.}$

② Η κατασκευή του εχήματος αποτελείται από χαλύβδινο κυλινδρικό στύλο ο οποίος φέρει εγκάρσια πλάκα.

Η σύνδεση γίνεται με περιμετρική ηλεκτροσυγκόλληση (εξωρραφή) πάνω - κάτω, όπως φαίνεται στη λεπτομέρεια.

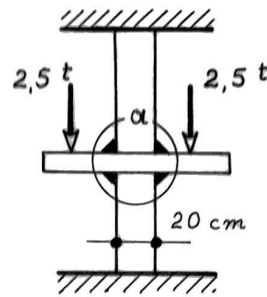
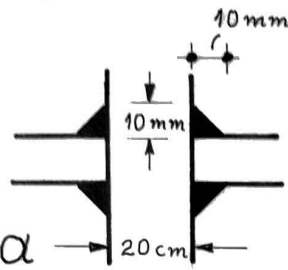
Με τη διαστασιολόγηση του εχήματος να υπολογιστεί η μέση διατμητική τάση που αναπτύσσεται ανάμεσα στη συ-

γκόλληση και το στυλό.

Απάντηση:

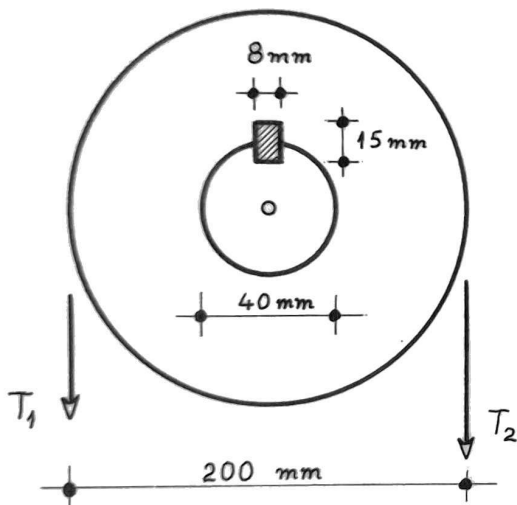
$$\tau_{\text{υη}} = 15,9 \text{ κρ/σμ}^2$$

Λεπτομέρεια α



③. Για να μπορεί μία τροχαλία να μεταφέρει την περιτροφική της κίνηση μέσω άξονα, προσαρμόζεται, όπως φαίνεται στο σχήμα, μία εφήνα σχήματος ορθογωνίου παρ/πέδου.

Με τη διαστασιολόγηση του σχήματος, αν οι εκατέρωθεν κατακόρυφες δυνάμεις του ιμάντα της τροχαλίας είναι $T_1 = 200 \text{ κρ}$ και $T_2 = 300 \text{ κρ}$, η δε εφήνα έχει βάθος 60 mm , να βρεθεί η μέση διατμητική τάση που θ' αναπτυχθεί στη διατμητική επιφάνεια της εφήνας.



Απάντηση:

$$\tau_{\text{υη}} = 104,2 \text{ κρ/σμ}^2$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΣΤΡΕΨΗ

1. Οι εσωτερικές δυνάμεις και οι τάξεις, γενικά.

Τη στρέψη γνωρίσαμε ήδη σαν καταπόνηση στη παρ. 3γ, σελ. 9.

Μιά ράβδος λοιπόν με ευθύγραμμο άξονα θα λέμε ότι καταπονείται σε στρέψη όταν πάνω σ' αυτή ενεργούν ζεύγη δυνάμεων που τα επίπεδά τους είναι κάθετα στον άξονα.

Έτσι, τα ζεύγη αυτά των δυνάμεων προκαλούν σε κάθε διατομή της ράβδου ροπή στρέψης, που είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των προς τα αριστερά ή δεξιά της διατομής ζευγών.

Η δράση της ροπής στρέψης πάνω στη διατομή της ράβδου, εκδηλώνεται με την ανάπτυξη διατμητικών τάσεων στη διατομή, ενώ η αντίστοιχη παραμόρφωση είναι η στροφή της διατομής ως προς τη γειτονική της (βλ. 28α).

Τα δύο μεγάλα λοιπόν θέματα που μπαίνουν στη μελέτη της στρέψης, είναι ο προσδιορισμός των διατμητικών τάσεων τ , που θα τις ονομάζουμε πιά τάξεις στρέψης, και ο υπολογισμός της γωνίας στροφής των διατομών.

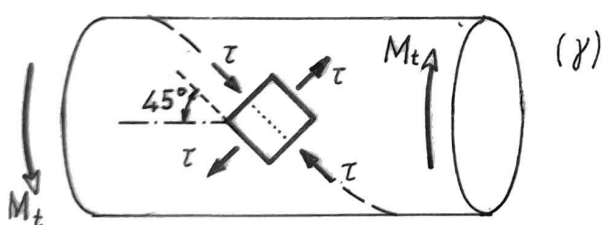
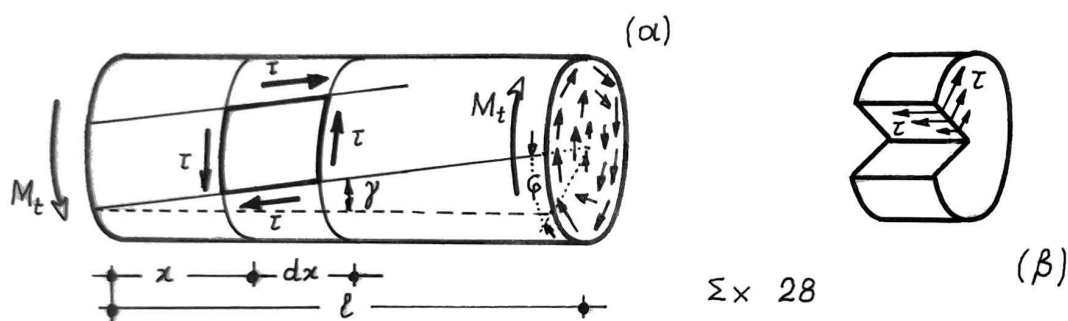
Τα προβλήματα αυτά βρίσκουν ικανοποιητικές λύσεις μόνον όταν η διατομή της ράβδου έχει απλό γεωμετρικό σχήμα (κύκλος, έλλειψη, ορθογώνιο κ.λ.π.). Ωστόσο εμείς θα εξετάσουμε βασικά τη στρέψη σε κυκλικής διατομής ράβδους.

Στις περιοχές του περιγράμματος της διατομής οι τάξεις είναι εφαιπτομενικές. Όσο όμως πλησιάζουμε στο κεντροειδές της διατομής, οι τάξεις αλλάζουν μέγεθος και φορέα κατά τρόπο που εξαρτάται απ' τη μορφή της διατομής, πάντως ελαττούμενες μέχρι μηδενισμού τους,

όπως συμβαίνει στο λεγόμενο "μηδενικό σημείο" της διατομής, που είναι το κεντροειδές της (βλ. 28α).

Οι διατμητικές τάξεις που αναπτύσσονται στη διατομή, συνοδεύονται, σύμφωνα με την πρόταση του Couchy βελ. 16, και από ίσες διατμητικές τάξεις που αναπτύσσονται σε διατομές που περιέχουν τον άξονα της ράβδου, παράλληλα προς αυτόν (βλ. 28β).

Έτσι υλικά, όπως το ξύλο, που η διατμητική τους αντοχή κατά την έννοια του μήκους είναι μικρότερη της αντίστοιχης αντοχής κατά την έννοια του πλάτους, σχηματίζουν τις πρώτες ρωγμές λόγω στρέψης στην επιφάνειά τους, κατά την διεύθυνση του άξονα.



Επίσης, η εμφάνιση διατμητικών τάξεων στις διατομές x και $x+dx$ (βλ. 28α), δημιουργεί στην παράλληλη επιφάνεια της ράβδου την περίπτωση καθαρής διάτμησης, που όπως είναι γνωστό (βλέπε ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ βελ. Π1), ισοδυναμεί με την παρουσία ίσων εφελκυστικών και θλιπτικών ορθών τάξεων, έντασης τ , σε στοιχείο που κλίνει 45° ως προς τον άξονα της ράβδου (βλ. 28γ).

Έτσι υλικά, όπως η κιμωλία, που η αντοχή τους σε εφελκυσμό είναι μικρότερη από την αντοχή τους σε διάτμηση, θραύονται λόγω στρέψης, σχηματίζοντας ελικοειδή διατομή υπό γωνία 45° .

Η στρεπτική παραμόρφωση, που συνίσταται στη στρόφι των διατομών μεταξύ τους, έχει σαν αποτέλεσμα, ευθείες που αρχικά

ήταν παράλληλες προς τον άξονα, να μετατρέπονται σε ελικοειδείς καμπύλες.

Και οι παραμορφώσεις αυτές είναι τόσο μικρές, ώστε σε σχέση με τις διατμητικές τάσεις που προκαλούν, να ισχύει πάντα ο τύπος του Hooke για την διάτμηση, που γνωρίσαμε στη βελ. 40:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}. \quad (1)$$

2. Τάσεις - παραμορφώσεις σε κυλινδρικούς φορείς.

Ο υπολογισμός των τάσεων και των παραμορφώσεων που εμφανίζονται σε ράβδους κυκλικής η δακτυλιοειδούς διατομής στηρίζεται στις παρακάτω παραδοχές:

1. Όλες οι διατομές της ράβδου παραμένουν επίπεδες και μετά την παραμόρφωση. Επίσης διατηρούν το σχήμα τους, το μέγεθος και την μεταξύ τους απόσταση. Αυτό αποδεικνύει για άλλη μια φορά (πέρα απ' την περίπτωση της καθαρής διάτμησης), την απουσία ορθών τάσεων στις εγκάρσιες και διαμήκεις τομές της ράβδου.

2. Κάθε διατομή περιστρέφεται σαν απόλυτα στερεός δίσκος. Αυτό σημαίνει ότι η διατομή περιστρέφεται σαν σύνολο, δηλαδή οι ακτίνες της παραμένουν ευθείες.

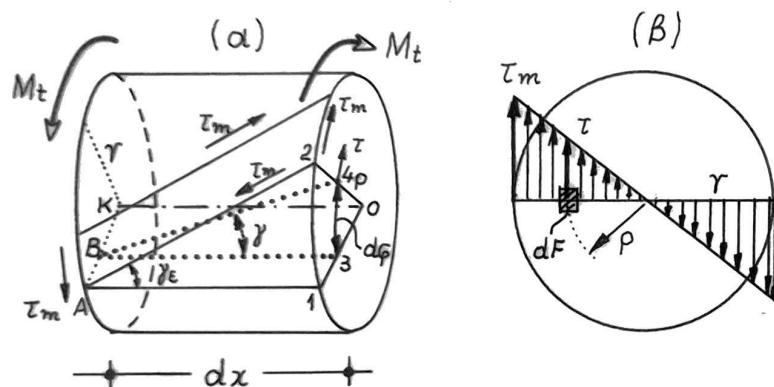
Τα διανύσματα των τάσεων στρέψης θα είναι επομένως εφαπτόμενα σε ομόκεντρους κύκλους, που γράφονται με κέντρο το κεντροειδές της διατομής.

Υστερα από τα παραπάνω, θεωρούμε ράβδο κυκλικής διατομής ακτίνας r , μήκους l , πάνω στην οποία ενεργεί σταθερή ροπή στρέψης M_t , δηλαδή μία ράβδο που καταπονείται σε καθαρή στρέψη, αναζητώντας τη διατμητική τάση τ τυχόντος σημείου, ως και τη στρέψη ϕ της διατομής του ως προς την αρχική.

α. Προσδιορισμός της διατμητικής τάσης τ .

Αναφερόμενοι στο σχ 28α, παρατηρούμε ότι η στρεπτική ροπή M_t προκαλεί την περιστροφή της ακραίας διατομής ως προς την αρχική της, κατά μία μικρή γωνία ϕ , που είναι γνωστή σαν γωνία περιστροφής.

Αποκόπτοντας ένα στοιχειώδες τμήμα της ράβδου μήκους dx , και εξετάζοντας τη σχετική περιστροφή $d\phi$ της δεξιάς διατομής ως προς την αριστερή, διαπιστώνουμε, σχ 29α, τα εξής:



Σχ. 29

Η ακτίνα $O1$ πήρε μετά την παραμόρφωση, τη θέση $O2$.

Επίσης η ευθεία $A1$, που αρχικά ήταν παράλληλη προς τον άξονα, πήρε τελικά τη θέση $A2$ σχηματίζοντας γωνία

γ_ϵ με την $A1$.

Κατά τον ίδιο τρόπο, η ευθεία $B3$, που απέχει απόσταση ρ από τον άξονα KO , πήρε τελικά τη θέση $B4$, σχηματίζοντας γωνία γ με την $B3$. Είναι φανερό ότι:

$$\epsilon\gamma_\epsilon \approx \gamma_\epsilon = \frac{(12)}{dx} = \frac{r \cdot d\phi}{dx} = r \partial_1, \text{ και} \quad (2)$$

$$\text{γενικά: } \epsilon\gamma \approx \gamma = \frac{(34)}{dx} = \frac{\rho \cdot d\phi}{dx} = \rho \partial_1, \quad (3)$$

$$\text{όπου: } \partial_1 = \frac{d\phi}{dx}. \quad (4)$$

Η ποσότητα ∂_1 εκφράζει τη γωνία περιστροφής δύο διατομών που απέχουν μοναδιαία απόσταση ($dx=1$) και γι' αυτό ονομάζεται αν η γ μ έ ν η γ ω ν ί α σ τ ρ ο φ ή ς.

Είναι φανερό ότι η γωνία ϕ και επομένως και η $d\phi/dx$ είναι συναρτήσεις του x . Στην περίπτωση όμως της καθαρής στρέψης ο λόγος $d\phi/dx$ είναι σταθερός σε όλο το μήκος της ράβδου, που έχει την ίδια στρεπτική ροπή. Επομένως η (4), γίνεται:

$$\partial_1 = \frac{\phi}{l}. \quad (5)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (3), προκύπτει:

$$\gamma = \rho \cdot \partial_1 = \rho \frac{\phi}{l} \quad \text{ή} \quad \gamma = \phi \frac{\rho}{l} \quad (6)$$

Η σχέση (6) δείχνει ότι από όλες τις ευθείες (ίνες) της ράβδου, εκείνες που σχηματίζουν τη μεγαλύτερη γ είναι οι γενέτειρές της, όπου $\rho = r$.

Ισχύοντας όμως του νόμου του Hooke για τη διάτμηση, είναι:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \rho \partial_1 \quad \text{και συνεπώς:} \quad \tau = \rho \cdot G \cdot \partial_1 \quad (7)$$

Η σχέση (7) λέει ότι η διατμητική τάση και η ανηγμένη γωνία στρέψης μεταβάλλονται μεταξύ τους γραμμικά με την απόσταση ρ από το κέντρο της κυκλικής διατομής, έχοντας μέγιστες τιμές τ_m σε σημεία της εξωτερικής επιφάνειας. Η κατανομή των διατμητικών τάσεων κατά μήκος μιάς διαμέτρου της διατομής φαίνεται στο σχ. 29β.

Θεωρώντας λοιπόν τις ίνες της ράβδου που ανήκουν στην ίδια ομόκεντρη περιφέρεια της διατομής ($\rho = \text{σταθ.}$), η διατμητική τάση σ' αυτές μεταβάλλεται ανάλογα προς την ανηγμένη γωνία στρέψης, όπως και στον εφελκυσμό.

Η σχέση που συνδέει την στρεπτική ροπή M_t με τη γωνία στρέψης ϕ , μπορεί τώρα να καθοριστεί από τη συνθήκη ότι η συνισταμένη ροπή των στοιχειωδών δυνάμεων που προέρχονται απ' τις διατμητικές τάσεις ως προς το κέντρο της διατομής ισούται με τη ροπή στρέψης M_t .

Πραγματικά, στο στοιχείο επιφάνειας dF , (σχ. 29β), που απέχει

απόσταση ρ απ' το κέντρο της διατομής, ενεργεί στοιχειώδης δύναμη $\tau \cdot dF$, ενώ η ροπή της προς το κέντρο του κύκλου είναι $\rho \cdot \tau \cdot dF$. Άρα η ροπή όλων των στοιχειωδών δυνάμεων, θα είναι:

$$M_t = \int_F \rho \cdot \tau \cdot dF$$

ή θέτοντας την τιμή της τ απ' τη σχέση (7), παίρνουμε

$$M_t = \int_F \rho^2 G \theta_1 dF = G \cdot \theta_1 \cdot \int_F \rho^2 dF = G \cdot \theta_1 \cdot J_p, \quad (8)$$

όπου J_p η πολική ροπή αδράνειας της διατομής ως προς πόλο το κέντρο του κύκλου.

Απ' τη σχέση (8) προκύπτει ότι:

$$\theta_1 = \frac{M_t}{G \cdot J_p}, \quad (9)$$

που δείχνει ότι η ανηγμένη γωνία στροφής θ_1 , είναι ανάλογη προς τη στρεπτική ροπή M_t και αντιετρόφως ανάλογη προς το γινόμενο $G \cdot J_p$, που είναι γνωστό σαν μέτρο δυστρεψίας του σώματος.

Αντικαθιστώντας ήδη την τιμή της θ_1 στην (7), παίρνουμε τελικά,

$$\tau = \frac{M_t}{J_p} \cdot \rho. \quad (10)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι η πολική ροπή αδράνειας κυκλικής διατομής είναι:

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2},$$

η (10) γίνεται:

$$\tau = \frac{2 \cdot M_t}{\pi r^4} \cdot \rho. \quad (11)$$

Η μέγιστη διατμητική τάση $\tau_{\max}$ θα εμφανιστεί, όπως είπαμε πριν, στην περίμετρο της διατομής, όπου $\rho = r$, και θα είναι:

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_t}{\pi r^3}. \quad (12)$$

Αν η ράβδος είναι **δακτυλιοειδούς** και όχι κυκλικής διατομής, με εσωτερική και εξωτερική ακτίνα r και R αντίστοιχα, τότε, επειδή

$$J_{P_\delta} = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4), \quad (13)$$

η διατμητική τάση θα είναι

$$\tau = \frac{M_t}{J_{P_\delta}} \cdot \rho \quad (r < \rho < R) \quad (14)$$

με μέγιστη τιμή στα σημεία της εξωτερικής περιμέτρου της διατομής, όπου $\rho = R$, την

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_{P_\delta}} \cdot R = \frac{M_t}{J_{P_\delta}/R} = \frac{M_t}{W_{P_\delta}} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{2} R^3 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right]}. \quad (15)$$

Το μέγεθος W_{P_δ} , που είναι το πηλίκον της πολικής ροπής αδράνειας προς την απόσταση (του η) των ακροτάτων σημείων της διατομής από το κέντρο της, ονομάζεται **πολική ροπή αντίστασης** της διατομής και εκφράζεται σε μονάδες μήκους³.

Σημειώνεται ότι για την κυκλική διατομή είναι

$$W_{P_k} = \frac{\pi r^4}{2} / r = \frac{\pi r^3}{2},$$

και συνεπώς, παρατηρώντας και τη σχέση (12), ανεξάρτητα απ' το είδος της διατομής της ράβδου, η μέγιστη διατμητική της τάση μπορεί γενικά να εκφράζεται με τη σχέση

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_P}. \quad (16)$$

β. Προσδιορισμός της γωνίας στρέψης ϕ .

Η ολική γωνία στρέψης ϕ των ακραίων διατομών της ράβδου προσδιορίζεται πολύ απλά αν θέσουμε την τιμή της θ_1 απ' τη σχέση (9) στη σχέση (5). Πραγματικά, είναι:

$$\theta_1 = \frac{M_t}{G \cdot J_p} = \frac{\phi}{l}, \quad \text{άρα} \quad \phi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot J_p} = \frac{2 M_t \cdot l}{G \cdot \pi \cdot r^4}. \quad (17)$$

Η γωνία ϕ είναι καθαρός αριθμός και εκφράζεται σε ακτίνια.

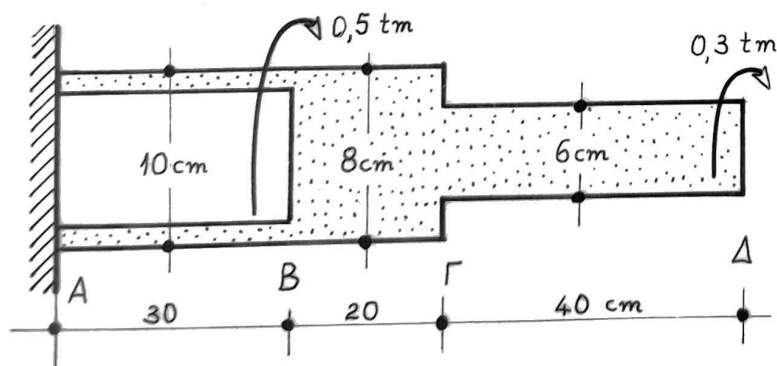
Η ποσότητα $G \cdot J_p / l$ ονομάζεται *δυοστρεγία* της ράβδου και παριστάνει τη στρεπτική ροπή που απαιτείται για να περιστραφούν οι ακραίες διατομές της ράβδου κατά μοναδιαία γωνία στρώφης μεταξύ τους.

Σε αντιστοιχία προς τις επιτρεπόμενες τάξεις, ορίζεται και για τη θ_1 μία επιτρεπόμενη ανηγμένη γωνία στρώφης, που συμβολίζεται με $\theta_{1\text{ελ}}$.

Η τιμή της $\theta_{1\text{ελ}}$ είναι χρήσιμη στις διάφορες μηχανολογικές κατασκευές που καταπονούνται σε στρέψη, π.χ. ατράκτους, όπου η τιμή της συνήθως είναι $0,25^\circ/\text{m}$.

Παραδείγματα.

1. Η ράβδος του σχήματος είναι κυλινδρική - βωληνωτή κατά τμήματα και δέχεται τις στρεπτικές ροπές που εικονίζονται στις αντίστοιχες διατομές.



Αν το μέτρο διάτμησης του υλικού είναι $G = 800.000 \text{ κρ/см}^2$, να υπολογιστούν:

α) Οι μέγιστες διατμητικές τάξεις που εμφανίζονται στα τμήματα AB, BG, ΓΔ και

β) Η ολική στρώφη των ακραίων διατομών A και Δ της ράβδου.

Λύση.

α) Είναι φανερό ότι η στρεπτική ροπή που εμφανίζεται στη ράβδο έχει σταθερή, αλλά διαφορετική σε κάθε τμήμα τιμή. Η έννοια του τμήματος ταυτίζεται εδώ με το μήκος της ράβδου που περιλαμβάνεται μεταξύ των διατομών άκσης των στρεπτικών ροπών, και όχι, όπως στην εκφώνηση, με το μήκος εκείνο που χαρακτηρίζεται από σταθερή διατομή της ράβδου.

Θεωρώντας θετικές τις δεξιόστροφες ροπές και παίρνοντας το αλγεβρικό τους άθροισμα από δεξιά (για ν' αποφύγουμε αλ- λωστε τον προσδιορισμό της ροπής στήριξης M_A), η στρεπτική ροπή που αντιστοιχεί στο κάθε τμήμα, θα είναι:

$$\text{Τμήμα } ΒΔ: M_{tΒΔ} = 0,3tm = 0,3t \cdot 1m = 300 \text{ κρ} \cdot 100 \text{ cm} = 30.000 \text{ κρ} \cdot \text{cm}$$

$$\text{"-"} \quad \text{AB: } M_{tAB} = 0,3 + 0,5 = 0,8tm = \dots = 80.000 \quad \text{"-"}.$$

Εξ άλλου η πολική ροπή αδράνειας για καθένα απ' τα τμήματα σταθερής διατομής της ράβδου είναι:

$$J_{P_{AB}} = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2} (5^4 - 4^4) = 579,62 \text{ cm}^4$$

$$J_{P_{BG}} = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot 4^4}{2} = 402,12 \text{ cm}^4$$

$$J_{P_{GD}} = \frac{\pi \cdot \rho^4}{2} = \frac{\pi \cdot 3^4}{2} = 127,23 \text{ cm}^4.$$

Επομένως οι μέγιστες διατμητικές τάσεις που εμφανίζονται στα τμήματα AB, BG και ΓΔ αντίστοιχα είναι:

$$\tau_{AB} = \frac{M_{tAB} \cdot R}{J_{P_{AB}}} = \frac{80.000 \cdot 5}{579,62} = 690,1 \text{ κρ/cm}^2$$

$$\tau_{BG} = \frac{M_{tBG} \cdot r}{J_{P_{BG}}} = \frac{30.000 \cdot 4}{402,12} = 298,42 \quad \text{"-"}.$$

$$\tau_{GD} = \frac{M_{tGD} \cdot \rho}{J_{P_{GD}}} = \frac{30.000 \cdot 3}{127,23} = 707,38 \quad \text{"-"}.$$

β) Η ολική στρόφη των ακραίων διατομών της ράβδου θα βρεθεί σαν αλγεβρικό άθροισμα των επί μέρους στροφών,

δηλαδή των στρεφών που εμφανίζονται μεταξύ των ακραίων διατομών κάθε τμήματος σταθερής πολικής ροπής αδράνειας.

Οι επί μέρους αυτές στρεφές είναι αποτέλεσμα των (προσημασμένων) στρεπτικών ροπών που δρούν στο κάθε τμήμα.

Θεωρώντας και εδώ θετικές τις δεξιόστροφες στρεφές θα είναι:

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\Delta\Gamma} + \varphi_{\Gamma\beta} + \varphi_{\beta\Lambda}$$

$$\text{Αλλά, είναι: } \varphi_{\Delta\Gamma} = \frac{M_{t\Delta\Gamma} \cdot l_{\Delta\Gamma}}{G \cdot J_{P\Delta\Gamma}} = \frac{30.000 \cdot 40}{800.000 \cdot 127,23} = 11,79 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_{\Gamma\beta} = \frac{M_{t\Gamma\beta} \cdot l_{\Gamma\beta}}{G \cdot J_{P\Gamma\beta}} = \frac{30.000 \cdot 20}{800.000 \cdot 402,12} = 1,86 \cdot 10^{-3} \text{ --}$$

$$\varphi_{\beta\Lambda} = \frac{M_{t\beta\Lambda} \cdot l_{\beta\Lambda}}{G \cdot J_{P\beta\Lambda}} = \frac{80.000 \cdot 30}{800.000 \cdot 579,62} = 5,17 \cdot 10^{-3} \text{ --}$$

$$\text{Άρα } \varphi_{\alpha\beta} = (11,79 + 1,86 + 5,17) \cdot 10^{-3} = 0,01882 \text{ rad}$$

$$\dot{n} \quad \varphi_{\alpha\beta} = 0,01882 \frac{180^\circ}{\pi} = 1,08^\circ = 1^\circ 4' 44''$$

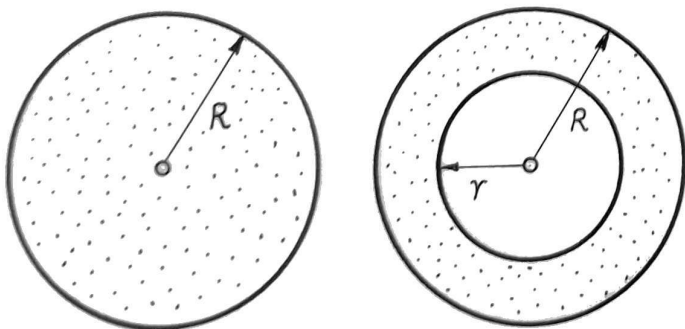
2. Οι δύο ράβδοι του σχήματος (κυλινδρική και βωληνωτή) είναι κατασκευασμένες απ' το ίδιο υλικό, έχουν το ίδιο μήκος l , την ίδια εξωτερική ακτίνα και φέρουν την ίδια στρεπτ. ροπή T .

Αν ο λόγος της εσωτερικής προς την εξωτερική ακτίνα της βωληνωτής ράβδου είναι $\lambda = r/R = 0,6$ να συγκρίδουν:

α) Οι μέγιστες διατμητικές τάξεις που αναπτύσσονται στις δύο ράβδους,

β) Οι γωνίες περιστροφής των ακραίων διατομών τους,

γ) Τα βάρη τους.



Λύση.

α) Αν J_{P_K} και J_{P_6} είναι αντίστοιχα η πολική ροπή αδράνειας της κυκλικής και ωληνωτής διατομής, επειδή

$$J_{P_K} = \frac{\pi R^4}{2} \quad \text{και} \quad J_{P_6} = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) = \frac{\pi R^4}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right] = J_{P_K} (1 - \lambda^4),$$

έπεται ότι ο λόγος των μέγιστων διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται στη ωληνωτή και κυλινδρική ράβδο, θα είναι

$$\frac{\tau_{6 \max}}{\tau_{K \max}} = \frac{\frac{T \cdot R}{J_{P_6}}}{\frac{T \cdot R}{J_{P_K}}} = \frac{J_{P_K}}{J_{P_6}} = \frac{J_{P_K}}{J_{P_K} (1 - \lambda^4)} = \frac{1}{1 - \lambda^4} = 1,15,$$

β) που είναι ο ίδιος με το λόγο των γωνιών περιστροφής των ακραίων διατομών τους, διότι

$$\frac{\theta_6}{\theta_K} = \frac{\theta_{16} \cdot l}{\theta_{1K} \cdot l} = \frac{\frac{T}{G \cdot J_{P_6}}}{\frac{T}{G \cdot J_{P_K}}} = \frac{J_{P_K}}{J_{P_6}} = \frac{1}{1 - \lambda^4} = 1,15.$$

γ) Τα βάρη των δύο ράβδων είναι ανάλογα προς τις διατομές τους.

Αν λοιπόν F_K και F_6 είναι αντίστοιχα η διατομή της κυλινδρικής και ωληνωτής ράβδου, επειδή

$$F_K = \pi R^2 \quad \text{και} \quad F_6 = \pi (R^2 - r^2) = \pi R^2 (1 - \lambda^2) = 0,64 F_K,$$

έπεται ότι το βάρος της ωληνωτής ράβδου θα είναι το 64% του βάρους της κυλινδρικής.

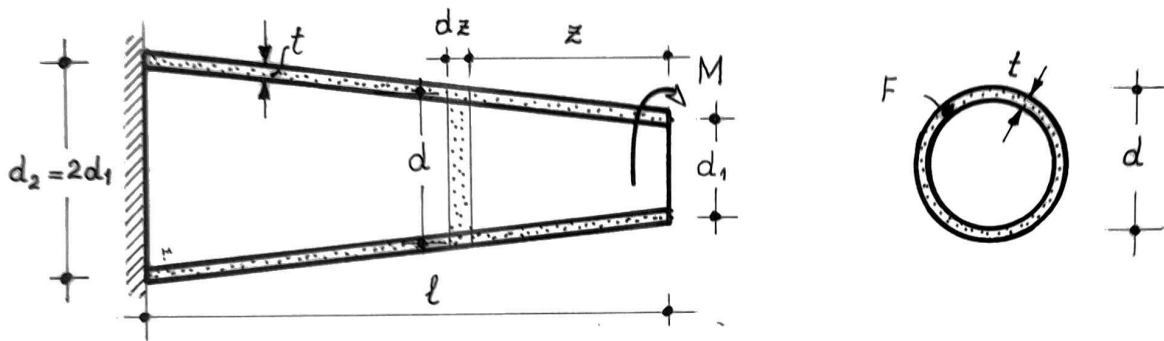
Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν καθαρά το βασικό πλεονέκτημα που εμφανίζεται στις ωληνωτές διατομές που καταπονούνται σε στρέψη.

Πραγματικά στο παράδειγμα αυτό η ωληνωτή ράβδος έχει 15% μεγαλύτερη διατμητική τάση και γωνία περιστροφής, αλλά 36% λιγώτερο βάρος.

Φυσικά οι αναλογίες αυτές αλλάζουν για διαφορετικό λόγο εσωτερικής και εξωτερικής ακτίνας (ή διαμέτρου).

3. Η ράβδος του σχήματος είναι σωληνωτή, μεταβλητής διαμέτρου και σταθερού αλλά μικρού πάχους.

Αν G είναι το μέτρο διατμήσης του υλικού, με τη σημειούμενη διαστασιολόγηση και φόρτιση, να υπολογιστεί η ολική γωνία στροφής των ακραίων διατομών της ράβδου.



Λύση.

Η στρεπτική ροπή M είναι σταθερή σ' όλο το μήκος της ράβδου. Όμως η ανηγμένη γωνία στροφής, λόγω της μεταβλητής διατομής, δεν είναι σταθερή.

Έστω $d\theta$ η γωνία στροφής που εμφανίζεται σε στοιχειώδες τμήμα της ράβδου, μήκους dz , που απέχει απόσταση z απ' την ακραία διατομή. Τότε θα είναι

$$d\theta = \frac{M \cdot dz}{G \cdot J_p}, \quad (\alpha)$$

όπου J_p η πολική ροπή αδράνειας της διατομής του στοιχειώδους τμήματος, η οποία, λόγω του μικρού πάχους της, εξ ορισμού είναι

$$J_p = F \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi d t \frac{d^2}{4} = \frac{\pi}{4} d^3 t.$$

Η ολική γωνία στροφής θ , θα προκύψει ολοκληρώνοντας τη σχέση (α) σ' όλο το μήκος l της ράβδου. Δηλαδή

$$\theta = \int_0^l d\theta = \int_0^l \frac{M \cdot dz}{G \frac{\pi}{4} d^3 t} = \frac{4M}{\pi G t} \int_0^l \frac{dz}{d^3} \quad (\beta)$$

$$\text{όπου } d = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} z.$$

$$\text{Θέτω } y = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} z, \text{ οπότε } dy = \frac{d_2 - d_1}{l} dz$$

$$\text{και } dz = \frac{l}{d_2 - d_1} dy.$$

Άρα η (β) γίνεται

$$\vartheta = \frac{4M}{\pi G t} \cdot \frac{l}{d_2 - d_1} \int_0^l \frac{dy}{y^3} = \frac{4Ml}{\pi G t (d_2 - d_1)} \left[\frac{y^{-2}}{-2} \right]_0^l$$

Διατηρώντας τα όρια του ολοκληρώματος αντικαθιστώ την y , οπότε

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{4Ml}{-2\pi G t (d_2 - d_1)} \left[\left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} z \right)^{-2} \right]_0^l \\ &= \frac{2Ml}{-\pi G t (d_2 - d_1)} \left[\left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} l \right)^{-2} - d_1^{-2} \right] \\ &= \frac{2Ml (d_1^{-2} - d_2^{-2})}{\pi G t (d_2 - d_1)}. \end{aligned}$$

Και επειδή $d_2 = 2d_1$,

$$\vartheta = \frac{2Ml}{\pi G t d_1} \cdot \left(\frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{4d_1^2} \right) = \frac{2Ml}{\pi G t d_1} \cdot \frac{3}{4d_1^2}$$

$$\text{ή τελικά } \vartheta = \frac{3Ml}{2\pi G t d_1^3}.$$

3. Έλεγχος αντοχής.

Ο έλεγχος των τάσεων, καθώς και των γωνιών στρέψης, που εξασφαλίζουν, σε μία στρεπτικά καταπονούμενη ράβδο, τόσο την αντοχή της, όσο και την απουσία απαράδεκτων παραμορφώσεων γίνεται με την ικανοποίηση των σχέσεων

$$\tau_{\nu n} = \tau_{\max} \leq \tau_{\epsilon n} \quad (18)$$

$$\vartheta_{\nu n} = \vartheta_1 \leq \vartheta_{1\epsilon n}. \quad (19)$$

6. Στρεπτική καταπόνηση σε περιστρεφόμενους άξονες (κ. ατράκτους).

Όπως ήδη αναφέραμε, η επιβολή της $\theta_{1\epsilon\pi}$ αφορά τις ράβδους κυκλικής διατομής που υφίστανται στρεπτική καταπόνηση. Τέτοιες ράβδοι είναι οι περιστρεφόμενοι άξονες (κ. ατράκτοι).

Όταν ένας περιστρεφόμενος άξονας έχει μεγάλο μήκος, τότε υποφέρει συνήδως από κινήσεις ταλάντωσης, που εκτός του ότι είναι ενοχλητικές, μπορούν να έρθουν σε συντονισμό με περιοδικές εξωτερικές επιδράσεις οπότε η ασφάλεια της εγκατάστασης μπαίνει σε σοβαρό κίνδυνο.

Γι' αυτό, πέρα από την δυσκαμυγία, επιβάλλεται να έχει η ατράκτος και επαρκή δυστρευγία.

Για την επάρκεια της δυστρευγίας, ο προσδιορισμός της διαμέτρου της ατράκτου θα γίνει με την προϋπόθεση ότι αλληλεύουν και οι δύο σχέσεις, (16) και (17).

Επειδή προσορισμός των ατράκτων είναι να μεταφέρουν ισχύ, θα πρέπει να θυμηθούμε ότι η ισχύς N είναι το έργο W που παράγεται στη μονάδα του χρόνου t , δηλαδή:

$$N = \frac{W}{t} = \frac{P \cdot S}{t} \quad (18)$$

όπου P η προβολή της δύναμης πάνω στην ευθεία μετακίνησης του σημείου εφαρμογής της και S ο δρόμος που αυτό διατρέχει.

Επειδή το πηλίκο S/t έχει την έννοια της ταχύτητας, η ισχύς γράφεται και

$$N = P \cdot v \quad (\text{κρ} \cdot \text{m/sec}) \quad (19)$$

Στην πράξη η ισχύς εκφράζεται σε ίππους HP ($1 HP = 75 \text{ κρ} \cdot \text{m/sec}$), οπότε η σχέση (19) γίνεται:

$$N_{HP} = \frac{P \cdot v}{75} \quad (20)$$

Όταν ένα σώμα περιστρέφεται γύρω από άξονα με n στροφές ανά πρώτο λεπτό, τότε η γραμμική του ταχύτητα σε απόσταση R (m) από τον άξονα, είναι:

$$v = \frac{2\pi \cdot n \cdot R}{60} \text{ m/sec.} \quad (21)$$

Επομένως η σχέση (20), γίνεται:

$$N_{HP} = \frac{2\pi \cdot n \cdot R \cdot P}{75 \cdot 60} = \frac{M_t \cdot \pi \cdot n}{2250} \text{ κρ} \cdot \text{m/sec} \quad (22)$$

Από τη σχέση (22) προκύπτει ότι για δοσμένη ισχύ, η απαιτούμενη στρεπτική ροπή, είναι:

$$M_t = 71.620 \frac{N}{n} \text{ (κρ} \cdot \text{cm)} \quad (23)$$

Επομένως η μέγιστη τάση στρέψης σε άξονα που μεταβιβάζει ισχύ N ίππων, σύμφωνα με τη σχέση (14), είναι:

$$\tau_{max} = \frac{2M_t}{\pi r^3} = \frac{16M_t}{\pi D^3} = \frac{36 \cdot 10^5 N}{\pi^2 D^3 n} \text{ (κρ/cm}^2\text{)} \quad (24)$$

Η ανηγμένη γωνία στρέψης θ_1 , που προκύπτει απ' τη σχέση (10) είναι αντίστοιχα:

$$\theta_1 = \frac{M_t}{G \cdot J_p} = \frac{72 \cdot 10^5 \cdot N}{\pi^2 \cdot D^4 \cdot G \cdot n} \text{ σε ακτίνια} \quad (25)$$

$$\text{ή } \theta_1^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \theta_1 = \frac{1296 \cdot 10^6 \cdot N}{\pi^3 D^4 \cdot G \cdot n} \text{ σε μοίρες} \quad (26)$$

Σ' όλους τους παραπάνω τύπους η ισχύς δίνεται σε ίππους. Όταν δίνεται σε kW πρέπει να μετατρέπεται σε ίππους, σύμφωνα με τη γνωστή σχέση:

$$1 \text{ HP} = 0,736 \text{ kW} \quad \text{ή} \quad 1 \text{ kW} = 1,36 \text{ HP.} \quad (27)$$

Οι περιστρεφόμενοι άξονες (άτρακτοι) καταπονούνται σε στρέψη και κάμψη. Συνήθως η καμπτική ροπή που δέχεται ο άξονας δεν είναι γνωστή. Γνωστή όμως είναι η στρεπτική ροπή, που

προκύπτει απ' τη μεταβιβαζόμενη ισχύ και τον αριθμό ετροφών σύμφωνα με τη σχέση (23).

Εξ αιτίας αυτού του γεγονότος, η απαιτούμενη διάμετρος υπολογίζεται αρχικά με μόνο κριτήριο τη ροπή στρέψης, αλλά η τιμή της $\tau_{\text{ελ}}$ λαμβάνεται χαμηλή (περίπου η μισή απ' αυτή που ισχύει για το αντίστοιχο υλικό).

Όμως η διάμετρος που θα εκλεγεί, ελέγχεται εκ των υστέρων με εύνδετη καταπόνηση κάμψης και στρέψης, ώστε να εξασφαλίζεται η ασφαλής λειτουργία της ατράκτου.

5. Στρέψη ράβδων ΜΗ κυκλικής διατομής.

Στη βελ. 61, για τον προσδιορισμό των τάσεων και παραμορφώσεων που εμφανίζονται σε ράβδους κυκλικής διατομής, θέσαμε σαν προϋποθέσεις ότι:

- 1) Οι διατομές μετά τη στρέψη παραμένουν επίπεδες και
- 2) οι διατομές στρέφονται σαν σύνολο.

Στην περίπτωση ράβδων μὴ κυκλικής διατομής, καμία απ' τις παραπάνω προϋποθέσεις δεν ισχύει.

Εδώ οι μὴ κυκλικές διατομές δὲν παραμένουν επίπεδες, αλλά στρεβλώνονται. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, ευθείες των διατομών αυτών να γίνονται καμπύλες, με αντίστοιχη καμπύλωση και των παραλλελίων επιφανειών των ράβδων.

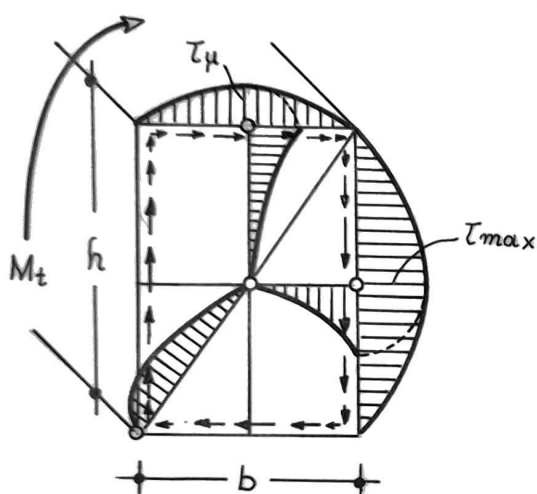
Τα φαινόμενα αυτά οφείλονται στην ανομοιόμορφη κατανομή των τάσεων στη διατομή, χωρίς αυτές να αυξάνουν με την απομάκρυνσή τους απ' το κέντρο της διατομής.

Ο προσδιορισμός των διατμητικών τάσεων για μὴ κυκλικές διατομές που καταπονούνται σε στρέψη είναι πρόβλημα δυσχερέστατο, που δὲν λύνεται με τις στοιχειώδεις αρχές και μεθόδους της αντοχής των υλικών. Παρακάτω θα εξετάσουμε μόνο την ορθογωνική και τριγωνική διατομή.

α) Ορθογωνική διατομή.

Εδώ οι διατμητικές τάσεις βαίνουν αυξανόμενες πάνω στις διαμέρους. Στις διαγώνιες όμως, ενώ αυξάνονται αρχικά, ελαττώνονται στη συνέχεια, γιὰ να μηδενιστούν στις κορυφές (βλ. 30).

Αυστηρή διερεύνηση του προβλήματος δόθηκε γιὰ πρώτη φορά το 1854 από τον Γάλλο de Saint-Venant, που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η μέγιστη διατμητική τάση αναπτύσσεται στο μέσο της μεγαλύτερης πλευράς του ορθογωνίου.



Σχ. 30

Αν λοιπόν b και h είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου με $h > b$, η μέγιστη διατμητική τάση $\tau_{\max}$, εμφανίζεται στο μέσο της πλευράς h , και είναι:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha \cdot b h^2}, \quad (28)$$

η αντίστοιχη τ_μ της πλευράς b ,

$$\text{είναι: } \tau_\mu = \eta \cdot \tau_{\max} \quad (29)$$

και η ανηγμένη γωνία στρώσης θ_1 σε ακτίνια:

$$\theta_1 = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_t}{G \cdot \beta \cdot b \cdot h^3}. \quad (30)$$

Οι συντελεστές α , β και η εξαρτώνται απ' το λόγο h/b των πλευρών του ορθογωνίου και δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

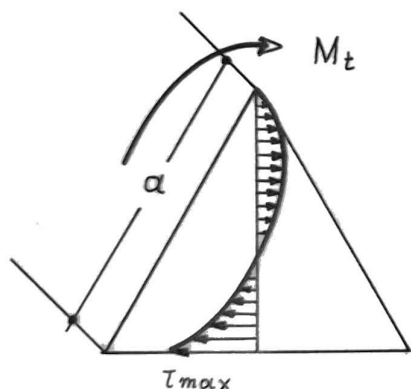
h/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
η	1.000	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.742	0.742	0.742

β. Τριγωνική διατομή.

Στην περίπτωση της τριγωνικής διατομής η κατανομή των τάσεων παρουσιάζει μία ομοιότητα αντιστοιχίας με εκείνη της ορθογωνικής διατομής, εμφανίζοντας τις μέγιστες διατμητικές τάσεις στα κοντινότερα προς το κεντροειδές σημεία της περιμέτρου.

Συγκεκριμένα οι τάσεις εμφανίζονται μέγιστες στα μέσα των πλευρών (όπως και στις πλευρές του ορθογωνίου), και, μηδενιζόμενες στο κεντροειδές, παίρνουν αντίθετες τιμές αυξανόμενες αρχικά και στη συνέχεια ελαττούμενες μέχρι μηδενισμού των στις απέναντι κορυφές (όπως στις διαγώνιες του ορθογωνίου).

Κατά το $1/3$ δηλαδή της διαμέσου η κατανομή των τάσεων μοιάζει με εκείνη προς τα μέσα των πλευρών του ορθογωνίου, ενώ κατά τα $2/3$ με την αντίστοιχη των διαγωνίων (βλ. 31).



Σχ. 31

Στην περίπτωση ράβδου με διατομή ισοπλευρο τρίγωνο πλευράς a , οι μέγιστες τάσεις στρέψης $\tau_{\max}$ στα μέσα των πλευρών, δίνονται απ' τη σχέση:

$$\tau_{\max} = \frac{20 M_t}{a^3}, \quad (31)$$

ενώ η ανηγμένη γωνία στρέψης θ_1 ,

$$\text{είναι:} \quad \theta_1 = \frac{80 \cdot M_t}{a^4 \cdot G \cdot \sqrt{3}}. \quad (32)$$

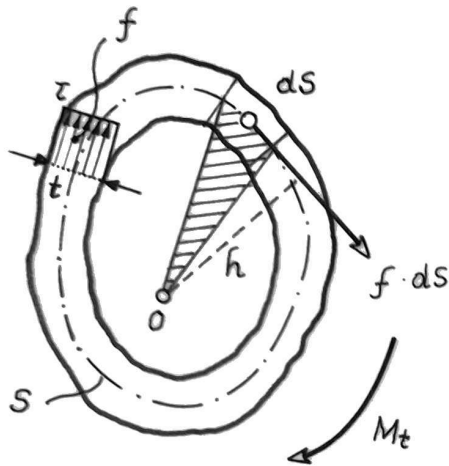
Γενικά για ράβδους μή κυκλικής διατομής, είναι:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} \quad \text{και} \quad \theta_1 = \frac{M_t}{G \cdot J_p}. \quad (33)$$

Το μέγεθος W_p , που ονομάζεται πολική ροπή αντίστασης της διατομής, είναι $W_p = J_p / e$, όπου e η απόσταση του πιο μακρινού σημείου της περιμέτρου (όχι κορυφή).

6. Στρέψη ράβδων με κλειστή διατομή λεπτού πάχους. Διατμητική ροή.

Χαρακτηριστικό των ράβδων με τέτοιες διατομές είναι ότι έχουν τη δυνατότητα να παραλαμβάνουν μεγάλες στρεπτικές ροπές.



Σχ. 32

Θεωρούμε μία στρεπτικά καταπονούμενη ράβδο με την διατομή του σχ. 32.

Η διατομή αυτή, σταθερή β' όλο το μήκος της ράβδου, χαρακτηρίζεται από λεπτό μεταβαλλόμενο πάχος t , και μία ενδιάμεση γραμμή s .

Κατά μήκος της s η διατμητική τάση τ δεν είναι σταθερή. Όμως,

το διάνυσμα της τ εφάπτεται β' όλα τα σημεία της s .

Λόγω του μικρού πάχους της διατομής, δεχόμαστε ότι η διατμητική τάση τ παραμένει σταθερή κατά την έννοια του πάχους.

Αν λοιπόν τ η διατμητική τάση και t το αντίστοιχο πάχος της διατομής σε τυχόν σημείο της s , το γινόμενο:

$$f = \tau \cdot t \quad (\alpha)$$

ονομάζεται **διατμητική ροή** και εκφράζεται σε κρ/cm , όπως δηλαδή και το συνεχές φορτίο δοκού.

Ο Γερμανός μηχανικός R. Bredt απέδειξε το 1896 ότι η διατμητική ροή f είναι **σταθερή** για όλα τα σημεία της γραμμής s και ότι παρουσιάζει απόλυτη αναλογία προς τη ροή υγρού σε ανοικτό αγωγό, που έχει σχήμα όμοιο προς τη διατομή της ράβδου.

Στο μέγεθος f αντιστοιχεί η παροχή Q στο υγρό του αγωγού, στην τ η ταχύτητα v του υγρού και στο t το εμβαδόν της διατομής F του ανοικτού αγωγού. ($Q = v \cdot F$).

α. Υπολογισμός των διατμητικών τάσεων.

Επανερχόμενοι στο σχ. 32, παίρνουμε πάνω στη γραμμή s ένα στοιχειώδες τμήμα της dS .

Στην αντίστοιχη επιφάνεια $t \cdot dS$ ενεργεί η στοιχειώδης διατμητική δύναμη:

$$\tau \cdot t \cdot dS = f \cdot dS$$

Η ροπή της δύναμης αυτής ως προς ένα σημείο O στο εσωτερικό της διατομής, είναι:

$$dM_t = h \cdot f \cdot dS \quad (\beta)$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (β) σ' όλο το μήκος της s , θα πάρουμε προφανώς τη στρεπτική ροπή της διατομής:

$$M_t = \int_s h \cdot f \cdot dS = f \cdot \int_s h \cdot dS \quad (\gamma)$$

Όμως στη σχέση (γ) , το γινόμενο $h \cdot dS$ παριστάνει το διπλάδιο εμβαδόν του διαγραμμένου τριγώνου.

Άρα το ολοκλήρωμά του θα εκφράζει το διπλάδιο εμβαδόν που περικλείεται απ' τη γραμμή s . Δηλαδή:

$$\int_s h \cdot dS = 2 F_m$$

Έτσι η σχέση (γ) γίνεται:

$$M_t = f \cdot 2 F_m = \tau \cdot t \cdot 2 F_m \quad (34)$$

Η σχέση (34) επιτρέπει τον υπολογισμό της διατμητικής τάσης σε κάθε θέση της γραμμής s .

Η μέγιστη τάση τ_{max} , όπως φαίνεται απ' τη σχέση (α) , εμφανίζεται σε διατομή που έχει το μικρότερο πάχος, t_{min} , και είναι:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2 \cdot t_{min} \cdot F_m} \quad (35)$$

β. Έκφραση της γωνίας στρώσης.

Η ανηγμένη γωνία στρώσης θα προσδιορίζεται απ' τον φερόμενο σαν δεύτερο τύπο του Bredt (ο πρώτος είναι η σχέση 35).

$$\vartheta_1 = \frac{M_t}{4G F_m^2} \int_s \frac{ds}{t} \quad (36)$$

Η απόδειξη αυτού του τύπου παραλείπεται γιατί ξεφεύγει από τα όρια του γνωστικού μας επιπέδου.

γ. Παράδειγμα.

Σε χαλύβδινη δοκό μήκους $\ell = 1,5 \text{ m}$ και διατομής όπως στο σχήμα 33, ενεργεί στρεπτική ροπή $M_t = 1,2 \text{ t.m}$.

Να ευρεθεί η μέγιστη διατμητική τάση και η γωνία στρώσης των ακραίων διατομών της. (Δίνεται $G = 825.000 \text{ kp/cm}^2$).

Λύση.

Σύμφωνα με τον πρώτο τύπο του Bredt, οι μέγιστες διατμητικές τάσεις θα εμφανιστούν στις θέσεις της διατομής με το μικρότερο πάχος. Άρα θα είναι:

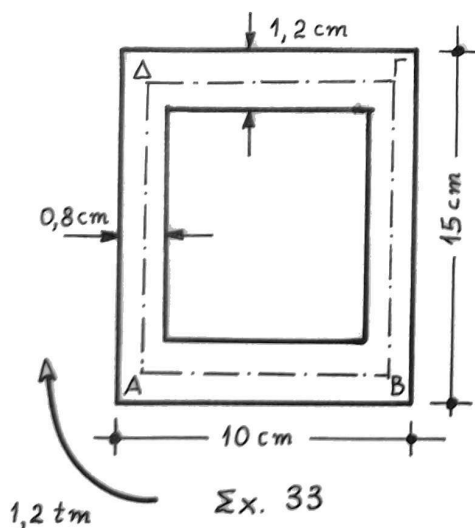
$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 t_{\min} F_m} = \frac{120000}{2 \cdot 0,8 \cdot (9,2 \cdot 13,8)} = 591 \text{ kp/cm}^2$$

Απ' τον δεύτερο τύπο του Bredt, (σχέση 36), υπολογίζουμε πρώτα το $\int_s \frac{ds}{t}$.

Είναι:

$$\begin{aligned} \int_s \frac{ds}{t} &= 2 \int_{AB} \frac{ds}{1,2} + 2 \int_{BG} \frac{ds}{0,8} = \\ &= \frac{2}{1,2} [s]_{AB} + \frac{2}{0,8} [s]_{BG} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{1,2} \cdot 9,2 + \frac{2}{0,8} \cdot 13,8 = 15,33 + 49,83 = 65,16$$



Επομένως :

$$\vartheta_1 = \frac{M_t}{4G \cdot F_m^2} \cdot 65,16 = \frac{120000}{4 \cdot 825000 \cdot (9,2 \cdot 13,8)^2} \cdot 65,16 =$$

$$= 1,47 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm.}$$

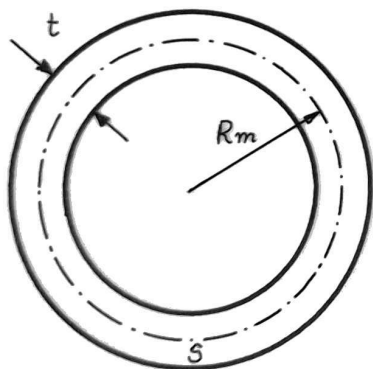
Άρα :

$$\varphi = \vartheta_1 \cdot l = 1,47 \cdot 10^{-4} \cdot 150 = 0,022 \text{ rad}$$

$$\text{ή } \varphi^\circ = \frac{180}{\pi} \cdot \varphi = \frac{180}{\pi} \cdot 0,022 = 1,26^\circ$$

7. Στρέψη ράβδων με λεπτή σωληνωτή διατομή.

Η στρεπτική καταπόνηση των ράβδων αυτού του είδους, που εμφανίζεται συχνότερα στην πράξη, αποτελεί ειδική περίπτωση εκείνης που εξετάσαμε ήδη στην προηγούμενη παράγραφο.



Σχ. 34

Εδώ οι διατμητικές τάσεις έχουν σταθερή τιμή αφού το πάχος t είναι πολύ μικρό, και εφάπτονται της γραμμής s , δηλ. της διατομής.

Ο προσδιορισμός τους, που είναι ανάλογος με τον προηγούμενο, οδηγεί στη σχέση :

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi R_m^2 t} \quad (37)$$

Επίσης, η ανηγμένη γωνία στρέψης είναι :

$$\vartheta_1 = \frac{M_t}{2\pi G R_m^3 t} \quad (38)$$

Επισημαίνεται ότι η περίπτωση αυτή διαφέρει από εκείνη των ράβδων δακτυλιοειδούς διατομής (ακτίνων R, r) όπου :

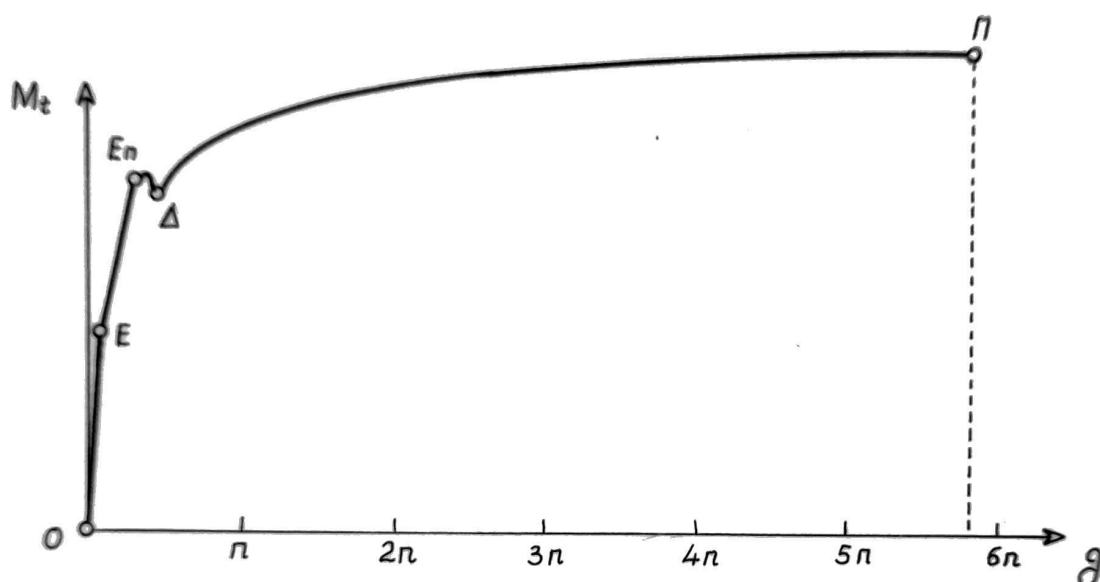
$$J_p = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) \quad \left. \vphantom{J_p} \right\} \text{ και } \tau_{\max} = M_t / W_p \quad (39)$$

$$W_p = \frac{J_p}{R} = \frac{2J_p}{D} = \frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) \quad \left. \vphantom{W_p} \right\} \vartheta_1 = M_t / G J_p \quad (40)$$

8. Το πείραμα της στρέψης.

Αν εκτελέσουμε το πείραμα της στρέψης σε ένα κυλινδρικό δοκίμιο, παρατηρούμε στην αρχή απότομη αύξηση της στρεπτικής ροπής χωρίς ν' αναπτυχθεί μεγάλη στρεπτική παραμόρφωση.

Αν σε κάποιο σημείο της περιοχής αυτής αποφορτίσουμε το δοκίμιο, επανέρχεται τότε στην αρχική του θέση, χωρίς να εμφανίζεται καμιά παραμένουσα παραμόρφωση.



Σχ. 35

Η περιοχή αυτή OE , που χαρακτηρίζεται από ανάλογη μεταβολή των μεγεθών M_t και θ ονομάζεται **π ε ρ ι ο χ ή ε λ α σ τ ι κ ό τ η τ α ς** του υλικού, και ισχύει ο νόμος του Hooke $\tau = \gamma \cdot G$.

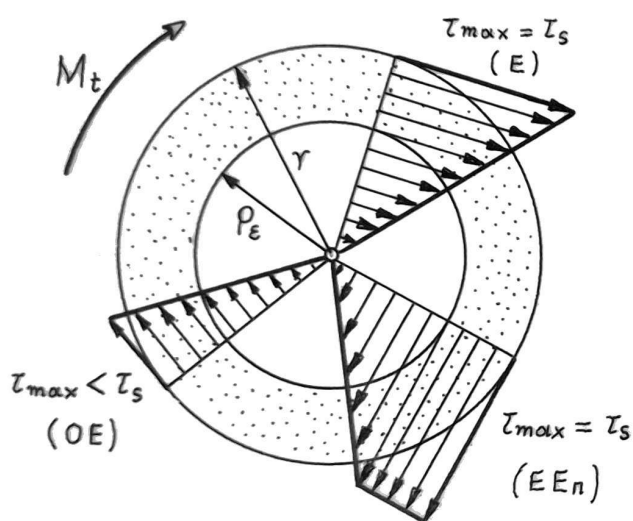
Όταν η μέγιστη διατμητική τάση, που όπως είναι γνωστό, αναπτύσσεται στην παράπλευρη επιφάνεια, φθάσει την τιμή της τάσης διαρροής τ_s του υλικού, τότε μικρή εξωτερική κυλινδρική στρώση απ' το υλικό αρχίζει να μπαίνει στην πλαστική περιοχή (σχ. 36)

Με την αύξηση της ροπής, ολοένα και παχύτερες στρώσεις εισέρχονται στην πλαστική περιοχή, με αποτέλεσμα η ακτίνα ρ_2 που χωρίζει την ελαστική απ' την πλαστική διατομή, να μικραίνει.

Η κατανομή των τάσεων κατά μήκος μίας ακτίνας της διατομής παύει να είναι τριγωνική όπως ξέρουμε για την ελαστική περιοχή και γίνεται τραπεζοειδής (βλ. 36).

Το διάγραμμα $M_t - \theta$ αρχίζει να δημιουργεί γόνα (σημείο E), αλλά η καμπύλη των ροπών στρέψης - γωνιών παραμόρφωσης εξακολουθεί να είναι ευθεία, με άλλη όμως κλίση.

Η ευθεία αυτή EE_n αντιστοιχεί στην ελαστοπλάστική περιοχή και ερμηνεύεται απ το γεγονός, ότι με την αύξηση του φορτίου υπάρχει ανάλογη αύξηση του πάχους της εξωτερικής πλαστικής στρώσης.



Σχ. 36

Τα παραπάνω ισχύουν μέχρις ότου όλη η διατομή εισέλθει στην πλαστική περιοχή, οπότε η κατανομή των τάσεων θεωρητικά γίνεται ορθογωνική και φθάνουμε στο χαρακτηριστικό σημείο Δ του διαγράμματος στρέψης που αντιστοιχεί το όριο διαρροής του υλικού.

Μετά το πέρασμα της περιοχής διαρροής, που είναι ανάλογη με εκείνη του εφελκυσμού, έχουμε μεγάλη παραμόρφωση του υλικού με μικρή σχετικά αύξηση του φορτίου και τελικά τη θράυση του ύστερα από μερικές στροφές.

9. Ανελαστική δράση.

Σε μία στρεπτικά καταπονούμενη ράβδο κυκλικής διατομής (βλ. 36), η ανελαστική δράση ταυτίζεται με την εμφάνιση της ελαστοπλαστικής περιοχής στο πείραμα στρέψης. Πραγματικά, μετά την εμφάνιση του γόνατος (σημ. E, βλ. 35),

το υλικό του δοκιμίου συμπεριφέρεται αρχικά μέχρι την ακτίνα ρ_E της διατομής (βλ. 36) σαν ελαστικό, ακολουθώντας το νόμο του Hooke, μετά όμως παραμορφώνεται χωρίς αύξηση της τάσης του, συμπεριφερόμενο σαν πλαστικό.

Και στην περίπτωση της ανελαστικής δράσης δεχόμαστε ότι ισχύουν οι παραδοχές 1 και 2 της βελ. 61 που αφορούν την επιπεδότητα των διατομών και τη στρόφη τους σαν σύνολο.

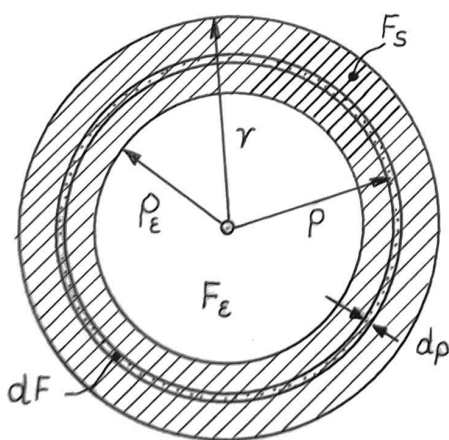
Ο υπολογισμός της στρεπτικής ροπής M_t θα γίνει χωριστά για το τμήμα F_E της διατομής με ακτίνα ρ_E , όπου ισχύει ο νόμος του Hooke και αντιστοιχεί ροπή M_E και χωριστά για τον υπόλοιπο δακτύλιο F_S της διατομής, όπου η τάση διατηρεί σταθερή τιμή $\tau_{\max}$ και αντιστοιχεί ροπή M_S . Δηλαδή θα είναι:

$$M_t = M_E + M_S, \quad (41)$$

$$\text{όπου:} \quad M_E = \frac{J_P \cdot \tau_{\max}}{\rho_E} = \frac{\pi \cdot \rho_E^3}{2} \cdot \tau_{\max} \quad (42)$$

Η ροπή M_S υπολογίζεται αν λάβουμε υπ' όψη ότι σε στοιχειώδη επιφάνεια dF του δακτυλίου (βλ. 37), ενεργεί δύναμη $\tau_{\max} \cdot dF$, της οποίας η ροπή ως προς το κέντρο της διατομής είναι $\rho \cdot \tau_{\max} \cdot dF$.

Το άθροισμα των ροπών όλων των στοιχειωδών αυτών δυνάμεων θα είναι ίσο με την M_S . Δηλαδή θα είναι:



$$M_S = \int_{F_S} \rho \cdot \tau_{\max} \cdot dF = \tau_{\max} \cdot \int_{F_S} \rho \cdot dF \quad (43)$$

$$\text{Αλλά} \quad dF = 2\pi\rho d\rho. \quad \text{Άρα:}$$

$$\int_{F_S} \rho \cdot dF = \int_{\rho_E}^r 2\pi\rho^2 d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho_E}^r = \frac{2\pi}{3} (r^3 - \rho_E^3).$$

$$\text{και συνεπώς:} \quad M_S = \frac{2\pi}{3} (r^3 - \rho_E^3) \tau_{\max}, \quad (44)$$

οπότε η σχέση (41) γίνεται τελικά:

Σχ. 37

$$M_t = \frac{\pi \rho_E^3}{2} \tau_{\max} + \frac{2\pi}{3} (r^3 - \rho_E^3) \tau_{\max} = \frac{\pi}{6} (4r^3 - \rho_E^3) \tau_{\max} \quad (45)$$

Απ' την τελευταία σχέση (45) εύκολα υπολογίζεται η ρ_ε όταν δίνεται η M_t , ή η M_t όταν δίνεται η ρ_ε .

Αν όλα τα σημεία της διατομής εισέλθουν στην πλαστική περιοχή οπότε η κατανομή των τάσεων σε μία ακτίνα γίνεται ορθογωνική με $\tau_{\max} = \tau_s$ και $\rho_\varepsilon = 0$, τότε η σχέση (45) γίνεται:

$$M_t = \frac{2}{3} \pi r^3 \tau_{\max}, \quad (46)$$

και εκφράζει τη ροπή που αντιστοιχεί σε εντελώς πλαστικοποιημένη διατομή, καλούμενη ροπή διαρροής.

Η εστρεπτική ροπή M_{tE} που αντιστοιχεί στο τελευταίο σημείο της περιοχής ελαστικότητας E (χόνυ του διαγράμματος), προκύπτει από τη σχέση (42) όπου $\rho_\varepsilon = r$, και είναι:

$$M_{tE} = \frac{1}{2} \pi r^3 \tau_{\max}. \quad (47)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (46) και (47) διαπιστώνουμε ότι η αύξηση της εστρεπτικής ροπής που εμφανίζεται σ' όλο το στάδιο της πλαστικοποίησης της διατομής, είναι 33,33 %.

Η ανηγμένη γωνία στρέψης ϑ_1 δεν επηρεάζεται από το πλαστικοποιημένο τμήμα F_s της διατομής, αλλά καθορίζεται από το F_e και είναι:

$$\vartheta_1 = \frac{M_t}{G J_p} = \frac{M_e}{G J_p} = \frac{2 M_e}{\pi \rho_\varepsilon^4 \cdot G}, \quad (48)$$

$$\text{ή, λόγω της (42),} \quad \vartheta_1 = \frac{\tau_{\max}}{\rho_\varepsilon \cdot G}. \quad (49)$$

Παράδειγμα.

Χαλύβδινη ράβδος μήκους 3 m και διαμέτρου 10 cm καταπονείται με εστρεπτική ροπή $M_t = 3 \text{ tm}$. Αν η τάση διαρροής σε στρέψη είναι $\tau_s = 1260 \text{ kg/cm}^2$, να υπολογιστούν η $\tau_{\max}$ και η φ_{ϑ_1} . ($G = 800.000 \text{ kg/cm}^2$).

Λύση

Αρχικά ελέγχουμε την κατάσταση της διατομής. Αν δηλαδή τμήμα της είναι πλαστικοποιημένο ή όχι. Η σχέση (14) βελ. 64, δίνει:

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi r^3} = \frac{2 \cdot 300.000}{\pi \cdot 5^3} = 1530 \text{ κρ/cm}^2$$

Άρα ένα τμήμα της διατομής είναι πλαστικοποιημένο, μιάς και η μέγιστη διατμητική τάση που θα εμφανιζόταν κανονικά είναι μεγαλύτερη από την τάση διαρροής. ($1530 > 1260$)

Η σχέση (45) της βελ. 77 γράφεται:

$$300.000 = \frac{\pi}{6} (4 \cdot 5^3 - \rho_\varepsilon^3) \cdot 1.260$$

απ' την οποία προκύπτει: $\rho_\varepsilon^3 = 4 \cdot 5^3 - \frac{300.000 \cdot 6}{\pi \cdot 1.260}$

ή τελικά: $\rho_\varepsilon = 3,6 \text{ cm.}$

Η ανηγμένη γωνία στρώσης υπολογίζεται απ' τη σχέση (49):

$$\vartheta_1 = \frac{1.260}{3,6 \cdot 800.000} = 0,00044 \text{ rad/cm}$$

και επομένως η γωνία στρώσης φ_{ϑ_1} των ακραίων διατομών θα είναι:

$$\varphi_{\vartheta_1} = \vartheta_1 \cdot l = 0,00044 \cdot 300 = 0,132 \text{ rad}$$

ή $\varphi_{\vartheta_1}^\circ = 7^\circ 33' 47''$.

10. Στατικά αόριστα προβλήματα.

Ότι αναφέρθηκε στην παρ. 8 του τρίτου κεφαλαίου, βελ. 54, για τα στατικά αόριστα προβλήματα του εφελκυσμού, ισχύει ανάλογα και στην περίπτωση της στρέψης.

Για τη λύση δηλαδή των προβλημάτων αυτών, χρειάζονται, πέρα από τις συνθήκες ισορροπίας της Στατικής, πρόσθετες συνθήκες συμβιβασμού των παραμορφώσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΚΑΜΨΗ

1. Γενικά.

Στην παρ. 3δ, βελ. 9 του πρώτου κεφαλαίου πήραμε μιὰ γενική εικόνα της κάμψης, σαν καταπόνηση.

Σε τούτο το κεφάλαιο θ' ασχοληθούμε ειδικότερα με τις τάσεις που αναπτύσσονται σε μιὰ καμπτόμενη δοκό και τον υπολογισμό τους, έτσι ώστε να μπορούμε σε κάθε περίπτωση να ελέγχουμε την αντοχή και παραμόρφωση της δοκού κάτω από συγκεκριμένη φόρτιση, τη φορτοικανότητά της ή τη διαστασιολόγηση της διατομής της.

Πρίν όμως ασχοληθούμε με οτιδήποτε για τις τάσεις, θα αναφερθούμε, με κάθε σαφήνεια και συντομία, σε ορισμένες βασικές έννοιες της Στατικής, που αν και γνωστές, θεωρούνται απαραίτητες για τη στήριξη των γνώσεων που απαιτούνται στο πρόβλημα της κάμψης.

α. Η δοκός σαν φορέας.

Η έννοια του φορέα, σαν κατασκευή που φέρει εξωτερικά φορτία και τα μεταφέρει με ασφάλεια στις στηρίξεις του, είναι γενική και αναφέρεται σε όλα τα στερεά σώματα που ισορροπούν κάτω από την επίδραση φορτίων.

Οι φορείς ανάλογα με τη μορφή τους διακρίνονται στους:

1) επίπεδους που είναι σώματα σταθερού ή μεταβλητού, πάντως μικρού πάχους, και απλώνονται σε επίπεδη επιφάνεια, και

2) γραμμικούς που είναι σώματα σταθερής ή μεταβλητής διατομής, της οποίας το κεντροειδές γράφει οποιαδήποτε επίπεδη γραμμή που ονομάζεται **άξονας**.

Οι επίπεδοι φορείς, ανάλογα με τη διεύθυνση των φορτίων που δρουν εξωτερικά διακρίνονται:

1α στους δίσκους όπου τα εξωτερικά φορτία κείνται στο επίπεδο του φορέα και

1β στις πλάκες όπου τα εξωτερικά φορτία είναι κάθετα στο επίπεδο του φορέα.

Οι γραμμικοί φορείς, ανάλογα με τη μορφή του άξονά τους διακρίνονται στους:

2α ευθύγραμμους όταν ο άξονας είναι ευθεία γραμμή,

2β τοξοτούς όταν ο άξονας είναι κυκλικό, παραβολικό ή γενικά καμπύλο τόξο,

2γ πλαισιωτούς όταν ο άξονας είναι οποιαδήποτε τετράγωνη ευθεία και

2δ σύνθετους όταν ο άξονας έχει σύνθετη μορφή, καλύπτοντας περιβόστες της μιάς από τις παραπάνω περιπτώσεις.

Η έννοια της δοκού, που θα μας απασχολήσει παρακάτω, ταυτίζεται με τους ευθύγραμμους γραμμικούς φορείς (περίπτωση 2α), και είναι ένα κατασκευαστικό στοιχείο που μπορεί να φέρει εξωτερικά φορτία οποιασδήποτε μορφής.

Η απλούστερη δοκός αποτελείται από μία πρισματική ράβδο, που στηρίζεται στα άκρα της ελεύθερα πάνω σε δύο στηρίγματα, (βλ. 38α).

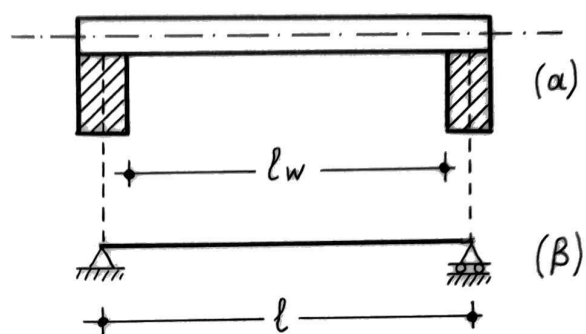
Στην πραγματικότητα η δοκός δεν μπορεί να γυθεί χωρίς πάχος, αλλά ούτε και τα στηρίγματα χωρίς έκταση. Στη θεωρία όμως, μας είναι αρκετό να θεωρούμε τη δοκό μεν σαν

ευθύγραμμο τμήμα που ταυτίζεται με τον άξονά της, ενώ τα στήριγματά βαν γεωμετρικά σημεία.

Έτσι φθάνουμε στην εξιδανικευμένη μορφή της απλής αμφιέρειστης δοκού, (βλ. 38β).

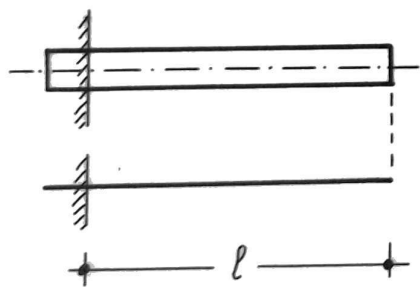
Ακόμα υποθέτουμε πως το ένα στήριγμα της δοκού είναι αμετάθετο, ενώ το άλλο μπορεί να μετακινηθεί στην επιφάνεια στήριξης χωρίς τριβές.

Η απόσταση ανάμεσα στα δύο στήριγματά της δοκού ονομάζεται θεωρητικό άνοιγμα και συμβολίζεται με l γιά να διακρίνεται από το ελεύθερο άνοιγμα l_w που περιβάλλει την εσωτερική απόσταση ανάμεσα απ' τους τοίχους στήριξης.



Σχ. 38

Ένα άλλο είδος δοκού είναι ο πρόβολος.



Σχ. 39

Αποτελείται από μία ράβδο που το ένα της άκρο είναι καλά εντοιχισμένο, ενώ το άλλο της άκρο είναι ελεύθερο, (βλ. 39).

Το μήκος που προεξέχει είναι το μήκος l του προβόλου.

Η απλή αμφιέρειστη δοκός μπορεί να φέρει πρόβολο προς τα αριστερά ή δεξιά, οπότε λέγεται (μονο)προέχουσα. Επίσης μπορεί να φέρει πρόβολο και από τα δύο μέρη, οπότε λέγεται αμφιπροέχουσα.

Αν η δοκός εκτείνεται χωρίς διακοπή πάνω από πολλά στήριγματά, τότε λέγεται συνεχής.

Μερικές φορές η συνέχεια διακόπτεται με αρθρώσεις σε κατάλληλες θέσεις και αριθμό, οπότε η δοκός ονομάζεται

αρθρωτή ή δοκός Gerber.

Τέλος το σώμα των δοκών, άλλοτε είναι ευμπαγές, όπως π.χ. το σώμα μιάς δοκού από οπλισμένο εκυρόδεμα, άλλοτε είναι δικτυωτό, δηλαδή αποτελείται από πολλές ράβδους στο ίδιο επίπεδο που συνδέονται αρθρωτά μεταξύ τους.

Γι' αυτό οι πρώτες ονομάζονται ολόσωμοι δοκοί, ενώ οι δεύτερες δικτυωτές.

Σ' όλες τις παραπάνω περιπτώσεις δοκών ή φορέων, ο προσδιορισμός των τάσεων σαν αποτέλεσμα εσωτερικών δυνάμεων, αποτελεί αντικείμενο μελέτης της Αντοχής των Υλικών και μπορεί να γίνει μόνο αν ληφθούν υπόψη και οι παραμορφώσεις του σώματος.

Αντίθετα ο προσδιορισμός της συνισταμένης των τάσεων που γίνεται πριν από τον υπολογισμό των τάσεων, αποτελεί πρόβλημα της Δομικής Στατικής και γίνεται με τη βοήθεια των στερεοστατικών εξισώσεων ισορροπίας σε αποτεμνόμενο τμήμα του σώματος.

Στις περιπτώσεις αυτές ο φορέας ονομάζεται εσωτερικά στατικά ορισμένος.

Όταν όμως οι τρεις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά για τον προσδιορισμό των εξωτερικών αντιδράσεων, τότε ο φορέας ονομάζεται εξωτερικά στατικά ορισμένος.

Αν τώρα ένας φορέας είναι και εσωτερικά και εξωτερικά στατικά ορισμένος, τότε ονομάζεται απλά στατικά ορισμένος ή ισοστατικός.

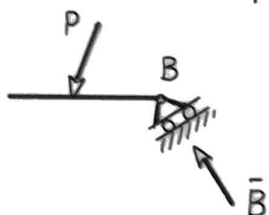
Επειδή οι περιβόητοι φορείς είναι εσωτερικά στατικά ορισμένοι, θεωρούμε έναν φορέα σαν ισοστατικό όταν το πλήθος των αντιδράσεων του (α) δεν ξεπερνά τον αριθμό 3 που είναι οι στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας.

Στην αντίθετη περίπτωση, όπου $\alpha > 3$, ο φορέας ονομάζεται υπερστατικός με βαθμό στατικής αοριβτίας τον αριθμό $\nu = \alpha - 3$.

β. Οι στηρίξεις.

Για τη στήριξη μιάς δοκού είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν τα παρακάτω είδη στηρίξεων:

1. Ελεύθερη έδραση ή κύλιση, (βλ. 40).



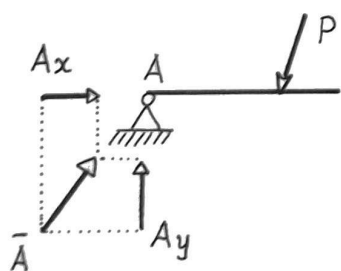
Σχ. 40

Το σημείο στήριξης είναι ελεύθερο να κινείται σε επίπεδη ή άλλη επιφάνεια χωρίς τριβές, καθώς και να περιστρέφεται.

Η αντίδραση είναι δύναμη που περνάει απ' το σημείο στήριξης, κάθετα στην επιφάνεια κύλισης, γιατί κατά την διεύθυνση αυτή αποκλείεται η μετακίνηση του σημείου στήριξης.

Οι μετατοπίσεις που γίνονται στο επίπεδο της κύλισης είναι γενικά πολύ μικρές και οφείλονται στις αναπόφευκτες παραμορφώσεις της δοκού από φορτία ή θερμοκρασιακές μεταβολές.

2. Άρθρωση, (βλ. 41).



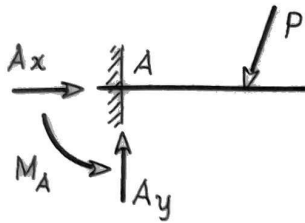
Σχ 41

Εδώ το σημείο στήριξης συνδέεται μόνιμα με το έδαφος ή άλλο στερεό σύστημα, μέσω άρθρωσης που επιτρέπει μόνο την ελεύθερη στροφή της δοκού.

Η αντίδραση επομένως $\bar{A}$, που περνάει απ' την άρθρωση, μπορεί να έχει οποιαδήποτε διεύθυνση, γιαυτό και αναλύεται ορθογώνια σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα A_x και A_y .

3. Πάκτωση, (βλ. 42)

Η στήριξη αυτού του είδους, δεν επιτρέπει καμιά στροφή ή μετακίνηση στο άκρο της δοκού.



Σχ. 42

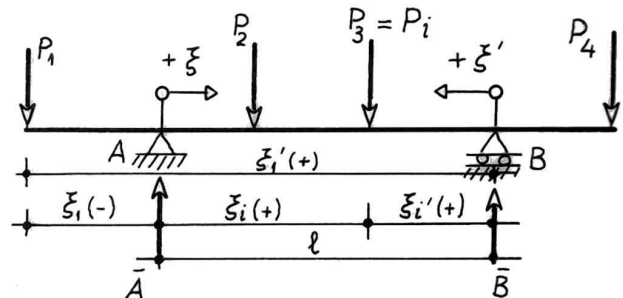
Έτσι, για τις αντιδράσεις, πέρα από την A_x και A_y που συναντήσαμε στην άρθρωση, εμφανίζεται εδώ και η αντίδραση ροπή M_A , που οφείλεται στον αποκλεισμό περιστροφής του φορέα γύρω από το A .

γ. Εξωτερικά φορτία και αντιδράσεις.

1. Όταν μία δοκός βρίσκεται κάτω απ' την ενέργεια διαφόρων φορτίων, τότε τα σημεία στήριξης μεταφέρουν στο έδαφος ορισμένες δυνάμεις. Αλλά τότε, σύμφωνα με την αρχή της αλληλεπίδρασης και το έδαφος ασκεί στη δοκό δυνάμεις αντίθετες, που τις ονομάζουμε αντιδράσεις.

Θεωρούμε τη δοκό του σχ. 43 που φορτίζεται με φορτία P_i κάθετα στον άξονά της.

Οι αντιδράσεις $\bar{A}$ και $\bar{B}$ που θα είναι επίσης κάθετες στον άξονα, προσδιορίζονται από τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών προς τα δύο σημεία στήριξης.



Σχ. 43

Πραγματικά, αν ξ_i και ξ_i' οι αποστάσεις της τυχαίας δύναμης P_i απ' τις δύο στήριξεις, τότε θα είναι:

$$(\Sigma M)_A^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -(-P_1 \xi_1) + P_2 \xi_2 + P_3 \xi_3 + P_4 \xi_4 - \bar{B} \cdot l = 0 \Rightarrow \Sigma P_i \xi_i = \bar{B} \cdot l \quad (1)$$

$$(\Sigma M)_B^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -P_1 \xi_1' - P_2 \xi_2' - P_3 \xi_3' + P_4 (-\xi_4') + \bar{A} l = 0 \Rightarrow \Sigma P_i \xi_i' = \bar{A} l$$

Απ' τις σχέσεις (1) προκύπτουν οι τιμές των αντιδράσεων:

$$\bar{A} = \frac{1}{l} \Sigma P_i \xi_i', \quad \bar{B} = \frac{1}{l} \Sigma P_i \xi_i \quad (2)$$

Στις σχέσεις (1), οι τετμημένες ξ_i και ξ_i' της τυχαίας δύναμης P_i είναι θετικές όταν η P_i ευρίσκεται μεταξύ των A και B .

Η συνθήκη μηδενισμού των κατακόρυφων προβολών των δυνάμεων $\sum y^{\uparrow\downarrow} = 0$ θα δώσει τώρα τη σχέση:

$$\bar{A} + \bar{B} = \sum P_i \quad (3)$$

που χρησιμεύει μόνον για επαλήθευση.

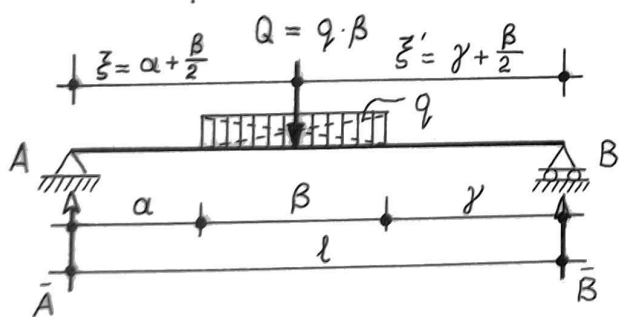
2. Τα φορτία που θεωρήσαμε ως τώρα είναι συγκεντρωμένα, δηλαδή έχουν ένα ορισμένο σημείο εφαρμογής.

Είναι όμως δυνατόν τα φορτία να μη συγκεντρώνουν τη δράση τους σε ένα μόνο σημείο, αλλά να εκτείνονται συνεχώς σ' όλη τη δοκό ή ένα μόνο τμήμα της, κατακόρυφα.

Ένα τέτοιο φορτίο ορίζεται αν γνωρίζουμε την τιμή του q ανά μονάδα μήκους. Έτσι λέμε π.χ. ότι σε μία δοκό ενεργεί φορτίο συνεχές και ομοιόμορφο ή απλά ομοιόμορφο ίσο με $2t/m$, που σημαίνει ότι σε μήκος ενός μέτρου, συγκεντρώνεται φορτίο $2t$ που θεωρείται ότι ενεργεί στο μέσον του μήκους του.

Γραφικά παριστάνεται με ένα ορθογώνιο που η βάση του είναι το φορτιζόμενο μήκος, ενώ το ύψος του, με μια κλίμακα δυνάμεων, η ανά μονάδα μήκους τιμή του φορτίου που ονομάζεται ένταση.

Θεωρούμε τη δοκό του σχ. 44, όπου το ομοιόμορφο φορτίο, έντασης q , ενεργεί ασύμμετρα σε ένα τμήμα της δοκού.



Σχ. 44

Οι αντιδράσεις $\bar{A}$ και $\bar{B}$, άνισες και κάθετες στον άξονα της δοκού, θα προσδιοριστούν με το ίδιο εκκεπτικό της προηγούμενης παραγράφου, αφού πρώτα μετατραπεί

το συνεχές φορτίο σε συγκεντρωμένο, με ένταση $Q = q \cdot \beta$ και φορέα που να περνάει απ' το κεντροειδές της επιφάνειας φόρτισης.

Έτσι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2), έχουμε:

$$\bar{A} = Q \frac{\xi'}{l} = q\beta \frac{\gamma + \frac{\beta}{2}}{l}, \quad \bar{B} = Q \frac{\xi}{l} = q\beta \frac{\alpha + \frac{\beta}{2}}{l} \quad (4)$$

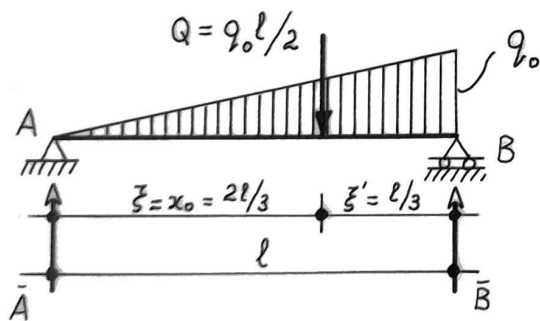
3. Όταν το φορτίο είναι συνεχές αλλά όχι ομοιόμορφο, που σημαίνει ότι η ένταση του συνεχούς φορτίου δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται κατά μήκος της δοκού, τότε βρίσκουμε το εμβαδόν της επιφάνειας φόρτισης που περιβάλλει τη συνισταμένη του συνεχούς φορτίου σε ένταση και στη συνέχεια προσδιορίζουμε το κεντροειδές της επιφάνειας φόρτισης, απ' όπου περνάει ο φορέας της συνισταμένης.

Έτσι, αν Q είναι η ένταση της συνισταμένης (εμβαδόν της επιφάνειας φόρτισης) και x_0 η απόσταση του φορέα της (κεντροειδές) απ' το αριστερό στήριγμα A , τότε θα είναι:

$$\bar{A} = Q \frac{l - x_0}{l}, \quad \bar{B} = Q \frac{x_0}{l}.$$

Έστω για παράδειγμα η δοκός AB του σχ. 45 που φορτίζεται με τριγωνικό φορτίο και έχει ακραία τιμή στο στήριγμα B ίση με q_0 .

Η συνισταμένη του φορτίου αυτού έχει ένταση ίση με το εμβαδό της τριγωνικής επιφάνειας φόρτισης, δηλαδή:



Σχ. 45

$$Q = \frac{1}{2} q_0 l,$$

και θα βρίσκεται σε απόσταση από το A ίση προς την τετμημένη του κεντροειδούς του τριγώνου, δηλ. $2l/3$. Άρα οι αντιδράσεις θα είναι:

$$\bar{A} = \frac{Q \cdot x'}{l} = \frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{l}{3l} = \frac{q_0 l}{6} \quad \text{και} \quad \bar{B} = Q \frac{x}{l} = \frac{q_0 l}{3} \quad (5)$$

Σημείωση: Αν στις παραπάνω περιπτώσεις εμφανιστούν σαν εξωτερικά φορτία και συγκεντρωμένες ροπές, τότε αυτές προστίθενται αλγεβρικά (ανάλογα με τη φορά τους) στις συνθήκες (1), χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η θέση εφαρμογής τους.

δ. Τα φορτία διατομής.

Σαν κατασκευαστικό στοιχείο η δοκός συναντιέται πάρα πολύ συχνά στην πράξη.

Μπορεί να πάρει δυνάμεις και κατά την διεύθυνση του άξονά της και κάθετα σ' αυτόν. Μπορεί δηλαδή να ενταθεί όχι μόνο αξονικά, αλλά τμητικά, καμπτικά ή στρεπτικά, δηλαδή σύνθετα.

Η παρουσία των εξωτερικών φορτίων, εφ' όσον βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που περιέχει τον άξονα της δοκού, έχει σαν συνέπεια την εμφάνιση σε τυχούσα διατομή τριών γενικά εντατικών μεγεθών, που ονομάζονται **φορτία διατομής**.

Τα φορτία διατομής, που συμβολίζονται με τα γράμματα N , Q , M είναι αντίστοιχα:

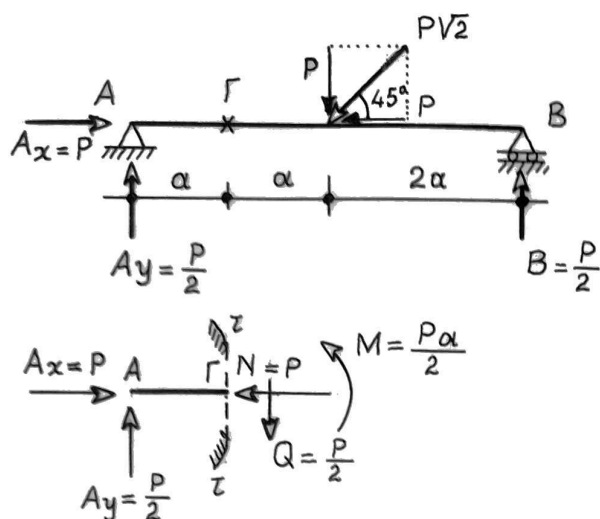
1. Η αξονική ή ορθή δύναμη (N)
2. Η τέμνουσα δύναμη (Q) και
3. Η ροπή κάμψης ή καμπτική ροπή (M).

Αν υπολογίσουμε τα N , Q , M σε κάθε διατομή του φορέα και, με κάποια κλίμακα, σχεδιάσουμε τις τεταγμένες των τιμών τους κατά μήκος του φορέα, θα πάρουμε τότε τα διαγράμματα των εντατικών μεγεθών (N), (Q), (M).

Αν ο φορέας είναι στο χώρο, τότε εκτός απ' την καμπτική ροπή σε τυχούσα διατομή, εμφανίζεται και ροπή στρέψης M_t .

Γιά να γνωρίσουμε τα φορτία διατομής, θεωρούμε την αμφιέριστη δοκό του σχ. 46, που φορτίζεται στο μέσον της με φορτίο $P\sqrt{2}$ υπό γωνία 45° .

Αν αναλύσουμε την $P\sqrt{2}$ σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα, κάθε μία ίση με P , μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά τις αντιδράσεις, χρησιμοποιώντας τις τρεις γνωστές στερεοστατικές συνθήκες ισορροπίας:



Σχ. 46

$$(\Sigma M)_A^+ = 0 \Rightarrow P \cdot 2\alpha - B \cdot 4\alpha = 0$$

$$\Rightarrow B = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma y^+ = 0 \Rightarrow Ay - P + \frac{P}{2} = 0$$

$$\Rightarrow Ay = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma x^+ = 0 \Rightarrow Ax - P = 0 \Rightarrow Ax = P.$$

Απομονώνοντας τώρα το τμήμα ΑΓ με την τομή ττ, ως εξετάσουμε την ισορροπία του.

Για να εξασφαλίσουμε το αμετακίνητο του τμήματος κατά την οριζόντια έννοια και να ισχύει επομένως η συνθήκη $\Sigma x^+ = 0$, θα πρέπει στο κεντροειδές της διατομής Γ και κάθετα προς αυτή να ασκηθεί δύναμη $N = P$ ίση και αντίθετη της $Ax = P$.

Η δύναμη αυτή, που ενεργεί παράλληλα προς τον άξονα του φορέα στη θέση της διατομής, είναι η α ξ ο ν ι κ ή ή ο ρ θ ή δ ύ ν α μ η (N).

Όμοια, για να εξασφαλίσουμε το αμετακίνητο του τμήματος κατά την κατακόρυφη έννοια και να ισχύει η συνθήκη $\Sigma y^+ = 0$, θα πρέπει πάνω στη διατομή πάντα Γ να τοποθετηθεί η δύναμη $Q = P/2$ ίση και αντίθετη της $Ay = P/2$.

Η δύναμη αυτή, που ενεργεί κάθετα στον άξονα του φορέα στη θέση της διατομής, είναι η τ έ μ ν ο υ θ α δύναμη (Q).

Τέλος για να εξασφαλίσουμε το άστρεπτο του τμήματος ΑΓ, ώστε να ισχύει η συνθήκη $(\Sigma M)_\Gamma^+ = 0$, θα πρέπει στο κεντροειδές της διατομής Γ να εμφανισθεί ροπή $M = P\alpha/2$ ίση και αντίθετη με εκείνη που δημιουργεί στην ίδια διατομή (Γ) η αντίδραση Ay , που είναι $M' = Ay \cdot \alpha = P\alpha/2$.

Η ροπή αυτή, είναι η ρ ο π ή κ ά μ υ η ς ή κ α μ π τ ι κ ή ρ ο π ή (M).

ε. Σήμανση και υπολογισμός των N, Q, M .

Για τον προσδιορισμό ενός εντατικού μεγέθους N ή Q ή M μιάς διατομής, υπολογίζεται το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων (εξωτερικών φορτίων και αντιδράσεων) που βρίσκονται αριστερά ή δεξιά της διατομής και επηρεάζουν το συγκεκριμένο μέγεθος.

Το κριτήριο για την από αριστερά ή δεξιά επιλογή, είναι ο μικρότερος αριθμός δυνάμεων ή ροπών αντίστοιχα που συμμετέχουν στον υπολογισμό.

Όταν σε μία συγκεκριμένη διατομή του φορέα ασκείται:

- α) συγκεντρωμένη δύναμη που είναι κάθετη στη διατομή (αξονικά)
- β) -||- -||- που κείται στη διατομή (τμητικά)
- γ) -||- ροπή,

τότε στη διατομή αυτή είναι αδύνατος αντίστοιχα ο προσδιορισμός της:

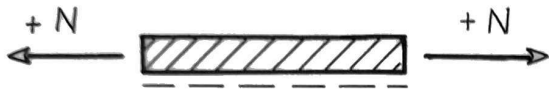
- α) αξονικής δύναμης N
- β) τέμνουσας -||- Q
- γ) καμπτικής ροπής M .

Στην περίπτωση αυτή, ο προσδιορισμός του υπόψη εντατικού μεγέθους γίνεται για την αριστερή ή δεξιά παρειά (πλευρά) της διατομής, οπότε παρουσιάζεται διαφορά στην τιμή τους ίση με την τιμή του συγκεντρωμένου φορτίου στη διατομή.

Το φαινόμενο αυτό, για το αντίστοιχο διάγραμμα (N) ή (Q) ή (M) είναι γνωστό σαν άλμα.

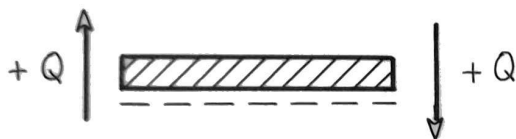
Από τα παραπάνω, είναι φανερό ότι για τον προσδιορισμό ενός εντατικού μεγέθους σε μία διατομή, θα πρέπει να καθοριστεί με σαφήνεια το πότε μία δύναμη ή ροπή δίνει θετική ή αρνητική τιμή στο προσδιοριζόμενο εντατικό μέγεθος.

Ανεξάρτητα λοιπόν του αν η οποιαδήποτε δύναμη ή ροπή που προκαλεί σε μία διατομή ένα εντατικό μέγεθος, βρίσκεται αριστερά ή δεξιά της διατομής (ή παρειάς της):



Σχ. 47

διατομή. Αντίθετα, είναι αρνητική όταν τείνει να την θλίψει.



Σχ. 48

δεξιόστροφα ως προς τη διατομή. Αντίθετα, είναι αρνητική όταν τείνει να περιστραφεί αριστερόστροφα (σχ. 48).



Σχ. 49

κάτω ίνα του φορέα στη θέση της διατομής. Αντίθετα, είναι αρνητική όταν τείνει να την θλίψει (σχ. 49).

Η κάτω ίνα του φορέα είναι γνωστή και σαν θετικό όριο, και συμβολίζεται με διακεκομμένη γραμμή.

Στην περίπτωση κατακόρυφου τμήματος του φορέα, η προς τα αριστερά ή δεξιά επιλογή του θετικού ορίου είναι αυθαίρετη.

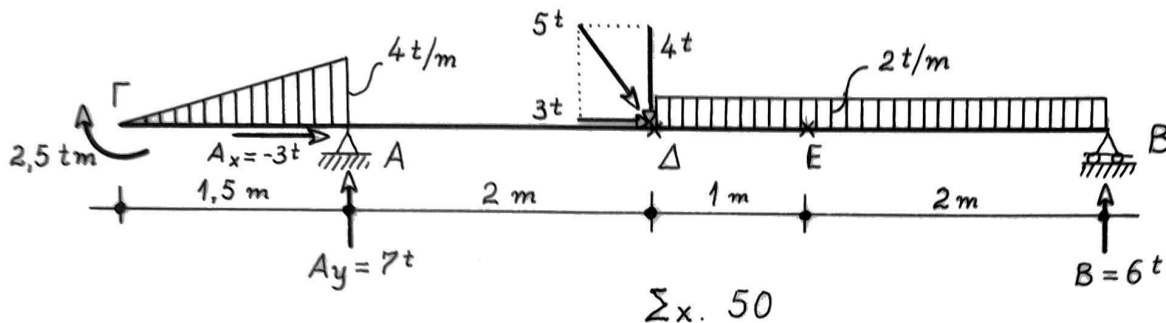
1. Η αξονική δύναμη N που εμφανίζεται σε μία διατομή είναι θετική, όταν η δύναμη που την προκαλεί τείνει να εφελέκψει την

2. Η τέμνουσα δύναμη Q που εμφανίζεται σε μία διατομή είναι θετική, όταν η δύναμη που την προκαλεί τείνει να περιστραφεί

3. Η καμπτική ροπή M που εμφανίζεται σε μία διατομή είναι θετική, όταν η δύναμη ή η ροπή που την προκαλεί τείνει να εφελέκψει την

Παράδειγμα

Στή μονοπροέχουσα δοκό του σχ. 50, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις ετήριξες Α και Β, καθώς και οι τιμές των Ν, Q, Μ στις διατομές Γ, Δ και Ε.



Λύση.

Οι αντιδράσεις θα προκύγουν απ' τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας:

$$(\sum M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 2,5 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 0,5 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3,5 - B \cdot 5 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{B = 6t}}$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow Ay - \frac{4 \cdot 1,5}{2} - 4 - 2 \cdot 3 + 6 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Ay = 7t}}$$

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow Ax + 3 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Ax = -3t}}$$

Το αρνητικό πρόσημο της A_x δηλώνει ότι η βωστή φορά της A_x είναι αντίθετη από κείνη που διαλέξαμε.

Προαιρετικά, μπορούμε να επαληθεύσουμε τις αντιδράσεις A_y και B , ή μόνον την A_y , παίρνοντας τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς τυχόν σημείο του άξονα του φορέα, ή τη ετήριξη Β αντίστοιχα.

$$(\sum M)_B^{\uparrow+} = 2,5 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 5,5 + 7 \cdot 5 - 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0!$$

Διατομή Γ (δυνάμεις από αριστερά).

Λόγω της συγκεντρωμένης ροπής στη διατομή, θα διακρίνουμε διαφορετικές τιμές στις παρειές της μόνο για την καμπτική ροπή, οπότε θα έχουμε:

$$N = 0$$

$$Q = 0$$

$$M^{\alpha\rho} = 0$$

$$M^{\delta\epsilon\xi} = +2,5 \text{ tm.}$$

Διατομή Δ (δυνάμεις από δεξιά).

Λόγω συγκεντρωμένης οριζόντιας και κατακόρυφης δύναμης στη διατομή, θα διακρίνουμε διαφορετικές τιμές στις παρειές της μόνο για την αξονική και την τέμνουσα δύναμη, οπότε θα έχουμε:

$$N^{\alpha\rho} = +3 \text{ t}$$

$$N^{\delta\epsilon\xi} = 0$$

$$Q^{\alpha\rho} = 4 + 2 \cdot 3 - 6 = +4 \text{ t}$$

$$Q^{\delta\epsilon\xi} = 2 \cdot 3 - 6 = 0$$

$$M = -2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 6 \cdot 3 = +9 \text{ tm}$$

Διατομή Ε (δυνάμεις από δεξιά).

Εδώ δεν γίνεται διάκριση τιμών στις παρειές της διατομής για κανένα εντατικό μέγεθος, γιατί δεν εμφανίζεται συγκεντρωμένη οριζόντια ή κατακόρυφη δύναμη ή ροπή.

Το συνεχές φορτίο στη διατομή, δεν θεωρείται συγκεντρωμένη δύναμη, διότι το εμβαδόν της επιφάνειας φόρτισης που αντιστοιχεί στη διατομή είναι μηδέν. Άρα θα έχουμε:

$$N = 0$$

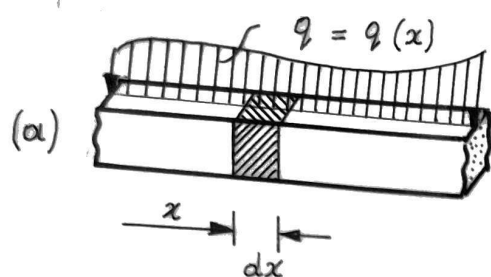
$$Q = 2 \cdot 2 - 6 = -2 \text{ t}$$

$$M = -2 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 8 \text{ tm.}$$

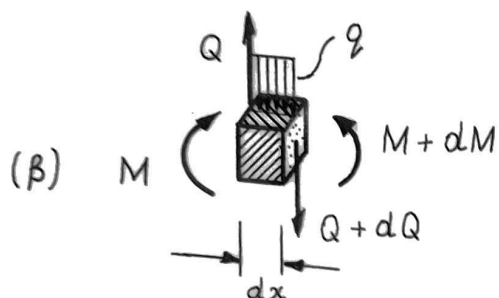
στ. Βασικές σχέσεις ανάμεσα στα μεγέθη q , Q ή M .

Θεωρούμε ένα τμήμα μιάς δοκού που φορτίζεται με συνεχή φόρτιση μεταβλητής έντασης $q = q(x)$, βλ. 51α.

Αν αποκόψουμε απ' τη δοκό ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους dx , με δύο τομές κάθετες στον άξονά της, σε αποστάσεις x και $x+dx$, παρατηρούμε ότι, στο τμήμα dx η ένταση της συνεχούς φόρτισης



Σχ. 51



είναι σταθερή, με τιμή έδω q .

Επίσης, αν Q και M η τέμνουσα δύναμη και η καμπτική ροπή στην αριστερή διατομή του τμήματος (βλ. 51β), τότε στη δεξιά διατομή του, λόγω του ομοιόμορφου φορτίου που μεσολαβεί, τα αντίστοιχα μεγέθη θα εμφανιστούν με αντίθετες φορές, και τιμές έδω $Q + dQ$ και $M + dM$.

Τώρα, στο στοιχειώδες τμήμα που ισορροπεί, η χρησιμοποίηση της συνθήκης μηδενισμού των κατακόρυφων δυνάμεων, δίνει:

$$\sum y^{\uparrow} = 0 \Rightarrow Q - q \cdot dx - Q - dQ = 0, \quad \text{ή} \quad \frac{dQ}{dx} = -q \quad (6)$$

Επίσης, η συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς την αριστερή διατομή του τμήματος, δίνει:

$$(\sum M)^{\curvearrowright} = 0 \Rightarrow M + q \cdot dx \frac{dx}{2} + (Q + dQ)dx - M - dM = 0,$$

απ' την οποία, παραλείποντας τους όρους $q \cdot dx^2/2$ και $dQ \cdot dx$ βαν απειροελά ανώτερης τάξης, προκύπτει η σχέση:

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (7)$$

Οι σχέσεις (6) και (7) συνδυαζόμενες μεταξύ τους, δηλώνουν ότι:

1. Σε αφόρτιστη περιοχή της δοκού, όπου $q = 0$, η τέμνουσα δύναμη Q , βαν ολοκλήρωμα της q , έχει σταθερή τιμή, ενώ η καμπτική ροπή M , βαν ολοκλήρωμα της Q , μεταβάλλεται γραμμικά.

2. Σε περιοχή της δοκού που φορτίζεται ομοιόμορφα, όπου $q = \alpha$ σταδ., η Q μεταβάλλεται γραμμικά σε συνάρτηση

του x , ενώ η M μεταβάλλεται παραβολικά.

3. Σε περιοχή της δοκού που φορτίζεται γραμμικά (τριγωνική ή τραπεζοειδής φόρτιση), όπου $q = \alpha x + \beta$, η Q μεταβάλλεται παραβολικά σε συνάρτηση του x , ενώ η M μεταβάλλεται κατά καμπύλη 3^{ου} βαθμού κ.ο.κ.

Γενικά, αν η εξωτερική φόρτιση σε τμήμα της δοκού είναι συνάρτηση βαθμού ν , τότε η τέμνουσα δύναμη που αντιστοιχεί στο ίδιο τμήμα είναι βαθμού $\nu+1$, ενώ η καμπτική ροπή $\nu+2$.

4. Η M παίρνει ακρότατη τιμή και μάλιστα μέγιστη, όπου μηδενίζεται η Q .

5. Η M σε κάποια διατομή μπορεί να βρεθεί, αν στην τιμή της καμπτικής ροπής άλλης διατομής προωθέσουμε αλγεβρικά το εμβαδόν του διαγράμματος τέμνουσών δυνάμεων που μεσολαβεί ανάμεσα στις δύο διατομές.

Πραγματικά, αν M_0 η καμπτική ροπή στη θέση x_0 και M η αντίστοιχη στη θέση x , η σχέση (7), που γράφεται:

$$dM = Q \cdot dx,$$

μετά από ολοκλήρωση από x_0 έως x , δίνει:

$$\int_{M_0}^M dM = \int_{x_0}^x Q \cdot dx \quad \text{ή} \quad M - M_0 = \int_{x_0}^x Q \cdot dx,$$

$$\text{ή τελικά} \quad M = M_0 + \int_{x_0}^x Q \cdot dx. \quad (8)$$

6. Η κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης του διαγράμματος τέμνουσών δυνάμεων, ισούται με την τιμή της εξωτερικής φόρτισης q που βρίσκεται στην αντίστοιχη προς το σημείο διατομή του φορέα.

Εντελώς ανάλογα, η κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης του διαγράμματος καμπτικών ροπών (M), ισούται με την τιμή της τέμνουσας δύναμης Q που συναντιέται στην αντίστοιχη προς το σημείο διατομή του φορέα.

2. Κατασκευή των διαγραμμάτων Q και M .

Η έννοια του διαγράμματος ενός εντατικού μεγέθους, ταυτίζεται με την γραφική παράσταση των τιμών που λαμβάνει το υπόψη εντατικό μέγεθος σε κάθε διατομή του φορέα.

Η γραφική αυτή παράσταση γίνεται σε ανάλογο προς τη μορφή του φορέα σύστημα αξόνων, όπου ο άξονας των τετμημένων είναι ίδιος με τον άξονα του φορέα, ορίζοντας έτσι τις θέσεις των διατομών, ενώ οι τεταγμένες δίνουν τις αντίστοιχες τιμές του εντατικού μεγέθους.

Παραλείποντας το διάγραμμα (N) λόγω της ευκολίας που παρουσιάζει αλλά και της περιορισμένης χρησιμότητάς του, θ' αναφερθούμε στην κατασκευή των διαγραμμάτων (Q) και (M) , η οποία μπορεί να γίνει:

- α) γραφικά με τη βοήθεια του οχοινοπολυγώνου και
- β) αναλυτικά με τη βοήθεια εξισώσεων.

Η πρώτη μέθοδος συναντιέται συνήθως μόνον στις περιπτώσεις που τα φορτία της δοκού είναι συγκεντρωμένα, χωρίς να εμφανίζεται συγκεντρωμένη ροπή. Κι αυτό γιατί η ύπαρξη συνεχούς φορτίου απαιτεί το χωρισμό του σε μικρότερα τμήματα, που θ' αντικατασταθούν με συγκεντρωμένες δυνάμεις, των οποίων ο αριθμός είναι ανάλογος με την ακρίβεια που επιδιώκουμε.

Η δεύτερη μέθοδος, που κύρια θα μας απασχολήσει παρακάτω, καλύπτει κάθε μορφή ισοστατικής δοκού με οποιαδήποτε φόρτιση.

Τα βήματα που ακολουθούμε για την κατασκευή των διαγραμμάτων Q και M με τη μέθοδο αυτή, είναι:

1. Χωρίζουμε τη δοκό σε τμήματα, με κριτήρια την εμφάνιση:
 - συγκεντρωμένης κατακόρυφης δύναμης (για το διάγραμμα Q), ή
 - συγκεντρωμένης ροπής (για το διάγραμμα M),
 - αρχής ή τέλους ή αλματος στη συνεχή φόρτιση.

Μ' άλλα λόγια, ο νόμος που εκφράζει τη μεταβολή της εξωτερικής φόρτισης, να είναι ο ίδιος σε όλο το τμήμα.

2. Ξεκινώντας απ' το πρώτο τμήμα, αποφασίζουμε το από πού θα λάβουμε τις δυνάμεις (αριστερά ή δεξιά της τυχαίας διατομής) που επηρεάζουν το εντατικό μέγεθος που εξετάζουμε, διαλέγοντας για διευκόλυνση το μικρότερο αριθμό δυνάμεων.

3. Ορίζουμε σε παρένθεση τα όρια α και δ , μέσα στα οποία μπορεί να βρίσκεται η τυχαία διατομή του τμήματος, εάν αποστάσεις των άκρων του από το αριστερό ή δεξιό τέρμα της δοκού που αποφασίσαμε να πάρουμε τις δυνάμεις (βήμα 2).

Αν x η απόσταση της τυχαίας διατομής απ' το τέρμα, θα πρέπει να είναι $(\alpha < x < \delta)$. Εδώ σημειώνονται και τυχόν ιδιότητες του x με τις αποστάσεις α ή δ , που εξαρτώνται από την απουσία συγκεντρωμένης κατακόρυφης δύναμης (για το διάγραμμα Q) ή συγκεντρωμένης ροπής (για το διάγραμμα M).

Στην περίπτωση εκλογής δεξιού τέρματος (βήμα 2), γράφουμε δεξιά της παρένθεσης "από δεξ".

4. Σχηματίζουμε τώρα, συνάρτησει του x , την εξίσωση που εκφράζει την μεταβολή του εντατικού μεγέθους, παίρνοντας απ' τη διατομή και πέρα μέχρι το αριστερό ή δεξιό τέρμα της δοκού, όλες τις:

- κατακόρυφες δυνάμεις και αντιδράσεις (για το διάγραμμα Q)
- συγκεντρωμένες ροπές και ροπές των δυνάμεων και αντιδράσεων ως προς την τυχαία διατομή (για το διαγρ. M).

5. Ελέγχουμε το βαθμό της εξίσωσης που προέκυψε για το εντατικό μέγεθος, ανάλογα με τη μορφή της εξωτερικής φόρτισης στο τμήμα (σχέσεις 6 και 7, βελ. 94).

6. Θέτοντας ήδη στην εξίσωση, όπου x , τα όρια α και δ , προδιορίζουμε τις τιμές του μεγέθους στα άκρα του τμήματος, τις οποίες τοποθετούμε με κατάλληλη κλίμακα στις αντίστοιχες θέσεις

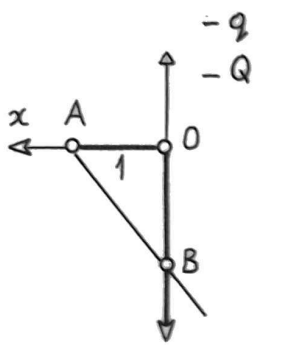
του άξονα των τετμημένων, που σχεδιάσαμε ήδη για την κατασκευή του διαγράμματος.

Αν η γραμμή που εκφράζει τη μεταβολή του μεγέθους είναι ευθεία, ενώνουμε τις τεταγμένες των άκρων της.

Αν όμως είναι καμπύλη, τότε,

7. Κατασκευάζουμε τις εφαπτόμενες της καμπύλης (θεωρητικό 6, βελ. 95) στα χαρακτηριστικά σημεία που προσδιορίσαμε τις τεταγμένες τους, σύμφωνα με τους παρακάτω τρόπους:

α) Σχεδιάζουμε το διπλανό σύστημα αξόνων, που είναι το γνωστό Καρτεσιανό, αλλά με αντίθετες τις φορές των αξόνων.



$$y \equiv \begin{cases} +q & \text{για } (Q) \\ +Q & \text{για } (M) \end{cases}$$

Σχ. 52

Στον άξονα Ox παίρνουμε τμήμα OA ίσο με τη μονάδα μήκους του άξονα των τετμημένων του διαγράμματος που σχεδιάζουμε (ευννηθέτατα είναι ίσος με τον άξονα της δοκού).

Στον άξονα Oy , θέτουμε με την κλίμακα τιμών του διαγράμματος που κατασκευάζουμε, την τιμή B που είναι τιμή:

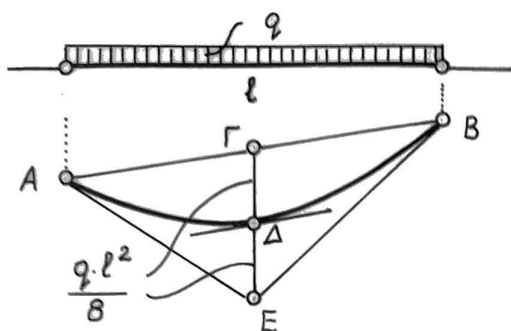
- της εξωτερικής φόρτισης q που αντιστοιχεί στην ίδια τετμημένη του χαρακτηριστικού σημείου (για διάγραμμα Q)
- της τέμνουσας δύναμης Q που αντιστοιχεί στην ίδια τετμημένη του χαρακτηριστικού σημείου (για διάγραμμα M).

Η AB είναι τότε η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο χαρακτηριστικό σημείο του διαγράμματος.

Είναι ευκολονόητο, ότι στις διατομές όπου η q ή η Q είναι μηδέν, η εφαπτομένη του διαγράμματος (Q) ή (M) αντίστοιχα, είναι οριζόντια.

β) Για την κατασκευή του παραβολικού τμήματος που περνάει από δύο σημεία A, B του διαγράμματος (M), όταν είναι γνωστό ότι το τμήμα l του φορέα που είναι ανάμεσα στα ση-

μεία αυτά φορτίζεται με ομοιόμορφο φορτίο q (βλ. 53), τότε:



Σχ. 53

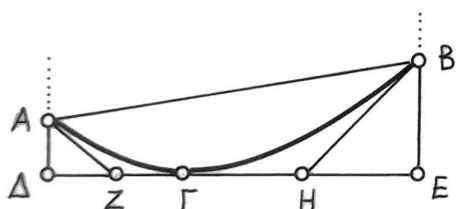
Από το μέσο Γ της AB φέρνουμε κατακόρυφα τμήματα

$$\Gamma\Delta = \Delta E = \frac{q l^2}{8}.$$

Τότε η παραβολή περνάει απ' το σημείο Δ και εφαπτεται των ευθειών AE και BE στα σημεία

A και B αντίστοιχα. Επίσης εφαπτεται στο Δ της ευθείας που είναι παράλληλη προς την AB και περνάει απ' το Δ .

γ) Αν είναι γνωστό ότι η παραπάνω παραβολή περνάει απ' τα σημεία A και B και ότι το Γ είναι ακρότατο της παραβολής, τότε η κατασκευή των εφαπτομένων στα A και B ακολουθεί τον παρακάτω τρόπο, (βλ. 54).



Σχ. 54

Απ' το Γ που είναι ακρότατο, φέρνουμε οριζόντια ευθεία, η οποία τέμνεται απ' τις κατακόρυφες που περνούν απ' τα A και B , στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

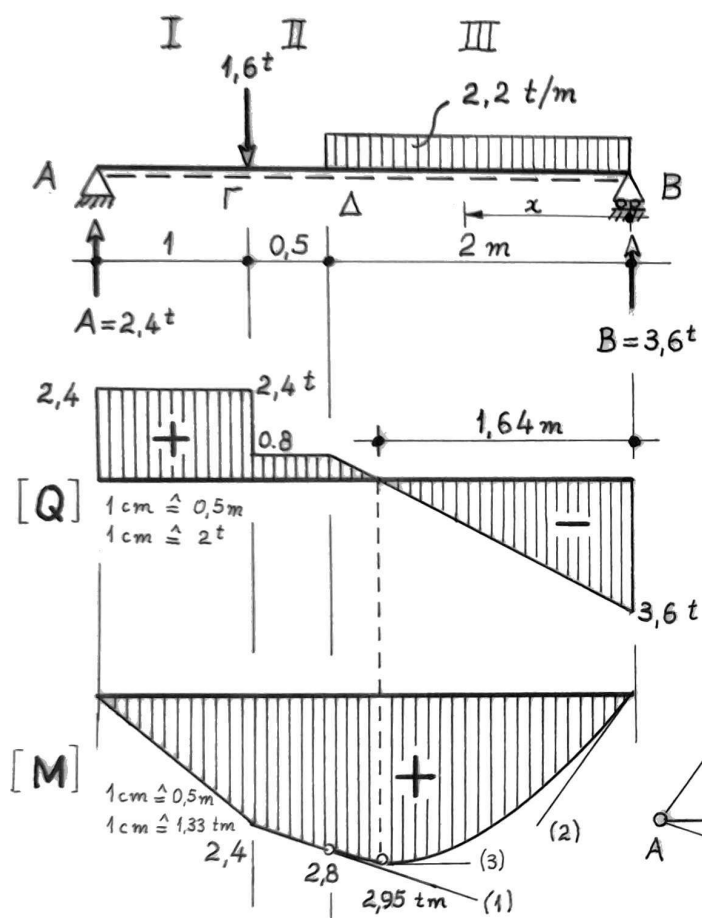
Αν Z και H είναι αντίστοιχα τα μέσα των οριζοντίων τμημάτων $\Delta\Gamma$ και ΓE , τότε οι ευθείες AZ και BH είναι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A και B αντίστοιχα.

Στα παραδείγματα κατασκευής των διαγραμμάτων Q και M που ακολουθούν γίνεται αυστηρή τήρηση των παραπάνω βημάτων. Έτσι θα αποφεύγονται επαναλαμβανόμενες επεξηγήσεις ή διευκρινήσεις στις επί μέρους εξιδιώσεις ή κατασκευές.

Διευκρινήσεις θα δίνονται μόνον όταν, λόγω ιδιομορφίας κρίνεται απαραίτητο, έτσι ώστε να βοηθήσουν αποτελεσματικά στην κατανόηση των διαγραμμάτων απ' τους σπουδαστές.

α. Παραδείγματα.

1. Της αμφιέρειστης δοκού που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων (Q) και καμπτικών ροπών (M).



Σχ. 55

Λύση.

Αντιδράσεις.

$$(\Sigma M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,6 \cdot 1 + 2,2 \cdot 2 \cdot 2,5 - 3,6 \cdot B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{B = 3,6 \text{ t.}}$$

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - 1,6 - 2,2 \cdot 2 +$$

$$+ 3,6 = 0 \Rightarrow \underline{A = 2,4 \text{ t.}}$$

Επαλήθευση αντιδράσεων:

$$(\Sigma M)_\Delta^{\uparrow+} = 2,4 \cdot 1,5 - 1,6 \cdot 0,5$$

$$+ 2,2 \cdot 2 \cdot 1 - 3,6 \cdot 2 = 0!$$

Διάγραμμα Q

Τμήμα I ($0 < x < 1$)

$$Q_I = 2,4 \text{ t σταθ.}$$

Τμήμα II ($1 < x \leq 1,5$)

$$Q_{II} = 2,4 - 1,6 = 0,8 \text{ t σταθ.}$$

Τμήμα III ($0 < x \leq 2$) από δεξ.

$$Q_{III} = 2,2x - 3,6$$

$$\text{Γιὰ } x = 0 \Rightarrow Q_B^{\text{αρ}} = -3,6 \text{ t}$$

$$x = 2 \Rightarrow Q_\Delta = 0,8 \text{ t}$$

δενισμού.

Μετά την παρατήρηση αλλαγής προσημίου, βρίσκουμε το σημείο μη-

Είναι $Q_{III} = 0$, για $2,2x - 3,6 = 0 \Rightarrow x = 1,64 \text{ m}$.

Διάγραμμα M

Τμήμα I ($0 \leq x \leq 1$)

$$M_I = 2,4x.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_A = 0,$$

$$x = 1 \Rightarrow M_B = 2,4 \text{ tm}.$$

Τμήμα II ($1 \leq x \leq 1,5$)

$$M_{II} = 2,4x - 1,6(x-1).$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow M_B = 2,4 \text{ tm},$$

$$x = 1,5 \Rightarrow M_D = 2,8 \text{ tm}.$$

Τμήμα III ($0 \leq x \leq 2$) από δεξ.

$$M_{III} = 3,6x - 2,2x \frac{x}{2} = 3,6x - 1,1x^2.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_E = 0,$$

$$x = 2 \Rightarrow M_G = 2,8 \text{ tm},$$

$$\text{για } x = 1,64 \text{ m} \Rightarrow M_{III \max} = 2,95 \text{ tm}.$$

Παρατήρηση :

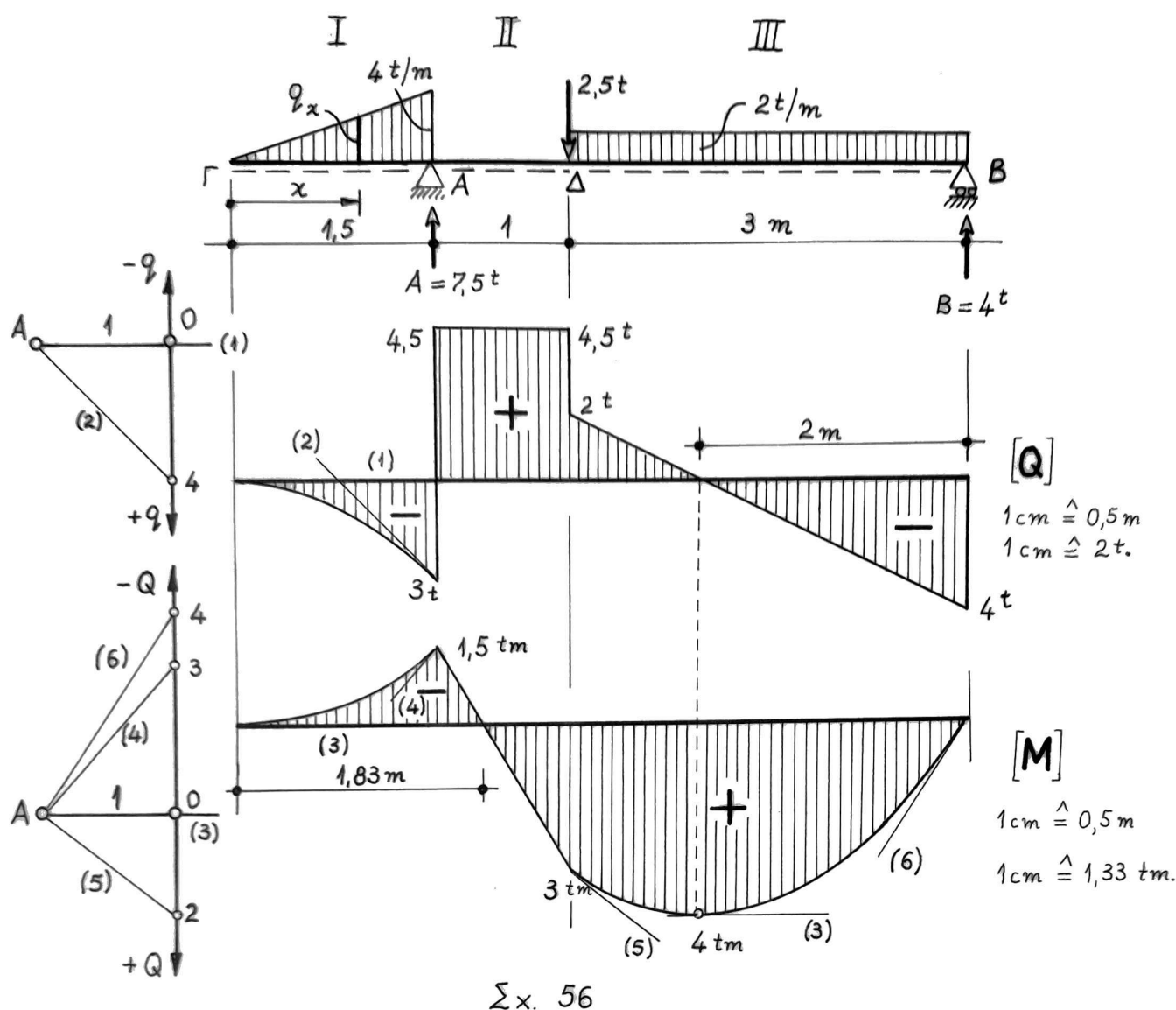
Η ευθεία του διαγράμματος (M) της περιοχής II είναι ταυτόχρονα και εφαπτομένη (1) στην αρχή του καμπύλου τμήματος της περιοχής III.

2. Της μονοπροέχουσας δοκού που εικονίζεται στο σχήμα της επόμενης σελίδας να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων (Q) και καμπτικών ροπών (M) με τις απαραίτητες εξισώσεις και κατασκευές.

Λύση.

Αντιδράσεις

$$(\Sigma M)_A^+ = 0 \Rightarrow -\frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 0,5 + 2,5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2,5 - B \cdot 4 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{B = 4 \text{ t}}}$$



$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - \frac{4 \cdot 1,5}{2} - 2,5 - 2 \cdot 3 + 4 = 0 \Rightarrow \underline{A = 7,5 \text{ t}}$$

$$\text{Επαλήθευση: } (\Sigma M)_A^{\uparrow+} = -\frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 1,5 + 7,5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 4 \cdot 3 = 0!$$

Διάγραμμα Q

Τμήμα I ($0 \leq x < 1,5$)

Αν q_x είναι η ένταση της τριγωνικής φόρτισης σε τυ-
χούσα διατομή του τμήματος I που απέχει απόσταση x από
το αριστερό άκρο της δοκού, απ' τα όμοια τρίγωνα προκύπτει:

$$\frac{q_x}{4} = \frac{x}{1,5} \Rightarrow q_x = \frac{4}{1,5} x.$$

$$\text{Άρα: } Q_I = -\frac{q_x \cdot x}{2} = -\frac{4}{1,5} x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{2}{1,5} x^2.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_r = 0,$$

$$x = 1,5 \Rightarrow Q_A^{\alpha\rho} = -3t.$$

Τμήμα II ($1,5 < x < 2,5$)

$$Q_{II} = -\frac{4 \cdot 1,5}{2} + 7,5 = 4,5t \text{ σταθ.}$$

Τμήμα III ($0 < x < 3$) από δεξ.

$$Q_{III} = 2x - 4.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_B^{\alpha\rho} = -4t,$$

$$x = 3 \Rightarrow Q_{\Delta}^{\delta\epsilon\zeta} = +2t.$$

Είναι $Q_{III} = 0$, όταν $2x - 4 = 0$ ή $x = 2m$.

Παρατήρηση:

Η τιμή της συγκεντρωμένης δύναμης $2,5t$, αν και δεν ελήφθη υπόψη, εμφανίστηκε στο διάγραμμα σαν άλμα, λόγω ιεχύος της $\Sigma y^{\uparrow} = 0$.

Διάγραμμα M

Τμήμα I ($0 \leq x \leq 1,5$)

$$M_I = -\frac{q_x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{4}{1,5} x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{2}{4,5} x^3.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_r = 0,$$

$$x = 1,5 \Rightarrow M_A = -1,5tm.$$

Τμήμα II ($1,5 \leq x \leq 2,5$)

$$M_{II} = -\frac{4 \cdot 1,5}{2} (x-1) + 7,5(x-1,5).$$

$$\text{Για } x = 1,5 \Rightarrow M_A = -1,5tm,$$

$$x = 2,5 \Rightarrow M_{\Delta} = +3tm.$$

Είναι $M_{II} = 0$, όταν $-3x + 3 + 7,5x - 11,25 = 0$ ή $x = 1,83m$.

Σημείωση:

Ειδικά εδώ, λόγω γραμμικότητας της μεταβολής της M , το σημείο μηδενισμού μπορεί να βρεθεί και απ' τα όμοια τρίγωνα του διαγράμ.

Τμήμα III ($0 \leq x \leq 3$) από δεξ.

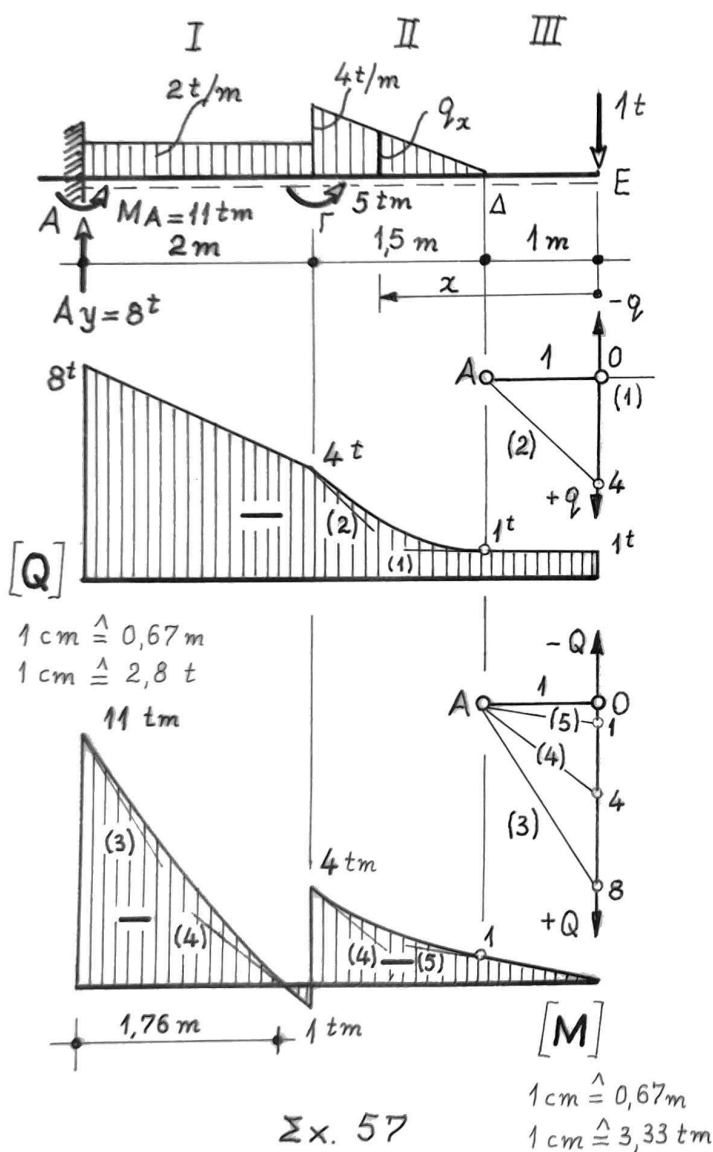
$$M_{III} = 4x - 2x \frac{x}{2} = 4x - x^2.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_B = 0,$$

$$\text{Για } x = 3 \Rightarrow M_{\Delta} = 3 \text{ tm.}$$

$$\text{για } x = 2 \text{ m είναι } M_{III \max} = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4 \text{ tm.}$$

3. Του προβόλου που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις και τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων (Q) και καμπτικών ροπών (M).



Λύση.

Αντιδράσεις

$$(\Sigma M)_A^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -M_A + 2 \cdot 2 \cdot 1 +$$

$$+ \frac{4 \cdot 1.5}{2} \cdot 2.5 + 1 \cdot 4.5 - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{M_A} = 4 + 7.5 + 4.5 - 5 = \underline{11 \text{ tm}}$$

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A_y - 2 \cdot 2 - \frac{4 \cdot 1.5}{2} -$$

$$- 1 = 0 \Rightarrow \underline{A_y} = 4 + 3 + 1 = \underline{8 \text{ t}}$$

$$\text{Επαλήθευση: } (\Sigma M)_E^{\rightarrow+} = -11 +$$

$$+ 8 \cdot 4.5 - 2 \cdot 2 \cdot 3.5 - 5 - \frac{4 \cdot 1.5}{2} \cdot 2 = 0!$$

Διάγραμμα Q

Τμήμα I (0 ≤ x ≤ 2)

$$Q_I = 8 - 2x.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_A^{\delta \epsilon \xi} = 8 \text{ t,}$$

$$x = 2 \Rightarrow Q_{\Gamma} = 4 \text{ t.}$$

Τμήμα II (1 ≤ x ≤ 2.5) από δεξ.

$$\text{Είναι: } \frac{q_x}{4} = \frac{x-1}{1.5} \Rightarrow q_x = \frac{4}{1.5} (x-1).$$

$$\text{Άρα: } Q_{II} = 1 + q_x \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{4}{1.5} (x-1) \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{2}{1.5} (x-1)^2.$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow Q_{\Delta} = 1 \text{ t,}$$

$$x = 2.5 \Rightarrow Q_{\Gamma} = 4 \text{ t (Επαλήθ. της } Q_{\Gamma} \text{ από τμ. I).}$$

Τμήμα III ($0 < x \leq 1$) από δεξ.

$$Q_{III} = 1 \text{ t σταθ.}$$

Διάγραμμα M

Τμήμα I ($0 < x < 2$)

$$M_I = -11 + 8x - x^2.$$

$$\text{Γιά } x=0 \Rightarrow M_A^{\delta\epsilon\zeta} = -11 \text{ tm},$$

$$x=2 \Rightarrow M_{\Gamma}^{\alpha\rho} = +1 \text{ tm}.$$

Είναι $M_I = 0$, όταν $x^2 - 8x + 11 = 0$. Απ τις ρίζες της,

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 11 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 4,47}{2} < \begin{matrix} 6,24 \\ 1,76 \end{matrix}$$

η $x_1 = 6,24 \text{ m}$ απορρίπτεται γιατί είναι έξω απ' τα όρια του x στο τμ. I.

Τμήμα II ($1 \leq x < 2,5$) από δεξ.

$$M_{II} = -1 \cdot x - q_x \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-1}{3} = -x - \frac{4}{1,5} (x-1) \frac{(x-1)^2}{6} = -x - \frac{2}{4,5} (x-1)^3.$$

$$\text{Γιά } x=1 \Rightarrow M_{\Delta} = -1 \text{ tm},$$

$$x=2,5 \Rightarrow M_{\Gamma}^{\delta\epsilon\zeta} = -4 \text{ tm}.$$

Παρατήρηση:

Αντίστοιχα προς την παρατήρηση της βελ. 103, η τιμή της συγκεντρωμένης ροπής στο Δ $M=5 \text{ tm}$, αν και δεν ελήφθη υπόψη, εμφανίστηκε στο διάγραμμα σαν άλμα, λόγω ισχύος της $(\Sigma M)^+ = 0$.

Φυσικά, τόσο στην προηγούμενη παρατήρηση όσο και εδώ, είναι προφανές ότι η διαφορά τιμών του εντατικού μεγέθους που προκύπτουν για τη δεξιά και την αριστερή παρειά του άλματος είναι ίση με την τιμή του συγκεντρωμένου μεγέθους.

Τμήμα III ($0 \leq x \leq 1$) από δεξ.

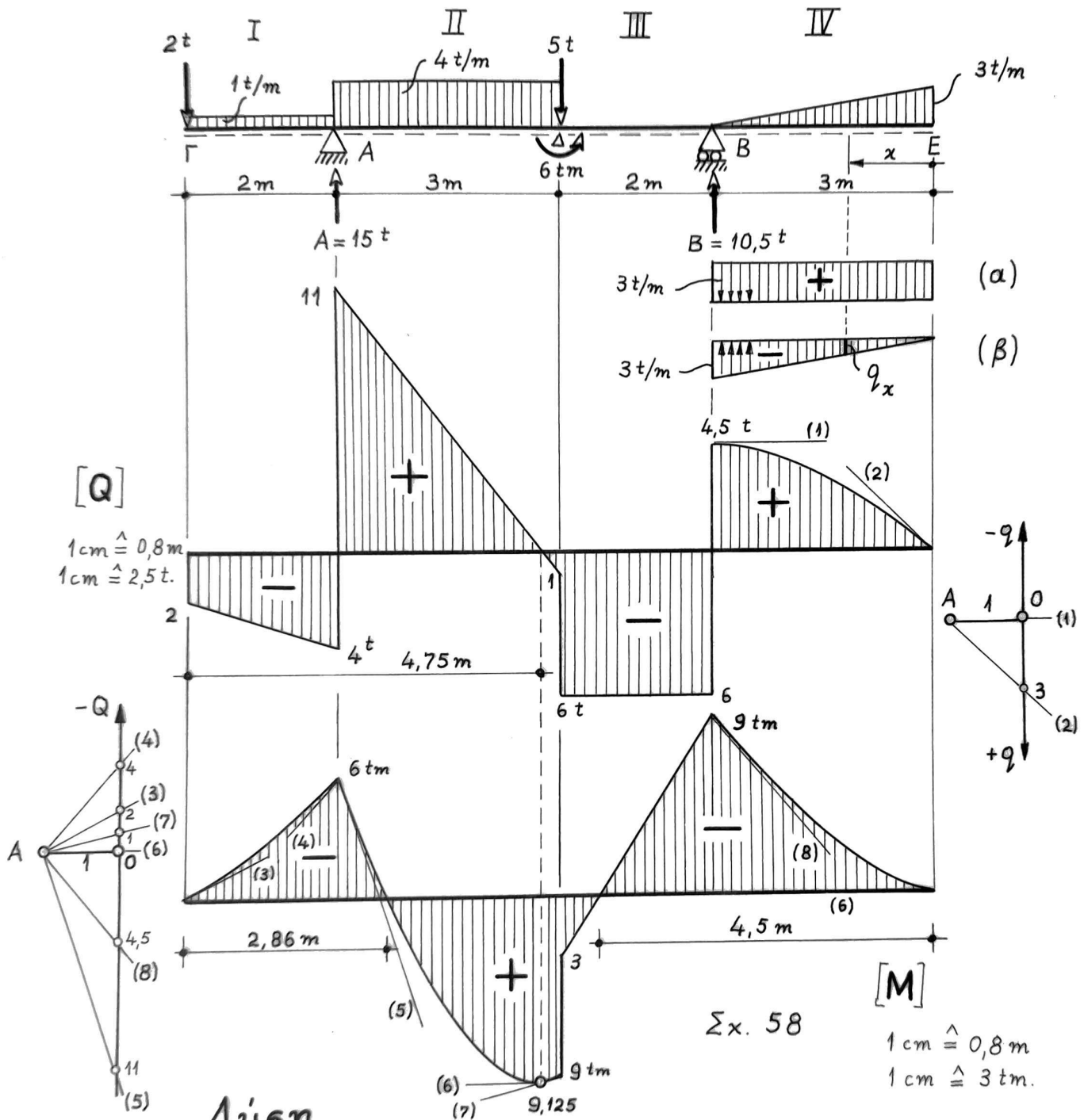
$$M_{III} = -1 \cdot x.$$

$$\text{Γιά } x=0 \Rightarrow M_E = 0,$$

$$x=1 \Rightarrow M_{\Delta} = -1 \text{ tm}.$$

Σημείωση: Η ευθεία του τμήματος III είναι και εφαπτόμενη (5) στην αρχή του καμπύλου τμήματος της περιοχής II. (αντιστοιχ. παρατ.)
βελ. 101/.

4. Της αμφιπροέχουσας δοκού που εικονίζεται παρακάτω, να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τέμνουσών δυνάμεων (Q) και καμπτικών ροπών (M).



Λύση

Αντιδράσεις

$$(\Sigma M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 + 5 \cdot 3 - 6 - B \cdot 5 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 7 = 0 \Rightarrow \underline{B = 10,5 t.}$$

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - 2 - 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 5 + 10,5 - \frac{3 \cdot 3}{2} = 0 \Rightarrow \underline{A = 15 t.}$$

$$\text{Επαλήθευση: } (\Sigma M)_\Delta^{\uparrow+} = -2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 4 + 15 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 6 - 10,5 \cdot 2 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 4 = 0!$$

Διάγραμμα QΤμήμα I ($0 < x < 2$)

$$Q_I = -2 - 1 \cdot x.$$

$$\text{Για } x=0 \Rightarrow Q_{\Gamma}^{\delta\epsilon\zeta} = -2t,$$

$$x=2 \Rightarrow Q_A^{\alpha\rho} = -4t.$$

Τμήμα II ($2 < x < 5$)

$$Q_{II} = -2 - 1 \cdot 2 + 15 - 4(x-2) = 11 - 4(x-2).$$

$$\text{Για } x=2 \Rightarrow Q_A^{\delta\epsilon\zeta} = 11t,$$

$$x=5 \Rightarrow Q_{\Delta}^{\alpha\rho} = -1t.$$

Είναι $Q_{II} = 0$, για $11 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow 4x = 19$ ή $x = 4,75 \text{ m}$.

Τμήμα III ($3 < x < 5$) από δεξ.

$$Q_{III} = \frac{3 \cdot 3}{2} - 10,5 = -6t \text{ σταθ.}$$

Τμήμα IV ($0 \leq x < 3$) από δεξ.

Επειδή προτίθεται να λάβω τις δυνάμεις από δεξιά, όπου η φόρτιση θα είναι τραπεζοειδής, θεωρώ ότι η δοθείσα τριγωνική φόρτιση είναι συνισταμένη μιάς ομοιόμορφης, έντασης $3t/m$ με φορά προς τα κάτω, και μιάς τριγωνικής, μέγιστης έντασης $3t/m$ από αριστερά, με φορά προς τα πάνω (βλ. 58 α, β).

Αν τώρα q_x είναι η ένταση της τριγωνικής συνιστώσας (βλ. β) στην τυχαία διατομή που απέχει x απ' το E, τότε:

$$\frac{q_x}{3} = \frac{x}{3} \Rightarrow q_x = x.$$

$$\text{Άρα: } Q_{IV} = 3x - \frac{q_x \cdot x}{2} = 3x - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Για } x=0 \Rightarrow Q_E = 0,$$

$$x=3 \Rightarrow Q_B^{\delta\epsilon\zeta} = 4,5t.$$

Διάγραμμα MΤμήμα I ($0 \leq x \leq 2$)

$$M_I = -2x - 1 \cdot x \frac{x}{2} = -2x - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Γιά } x = 0 \Rightarrow M_r = 0,$$

$$x = 2 \Rightarrow M_A = -6 \text{ tm.}$$

Τμήμα II ($2 \leq x < 5$)

$$M_{II} = -2x - 1.2(x-1) + 15(x-2) - \frac{4(x-2)^2}{2}$$

$$\text{Γιά } x = 2 \Rightarrow M_A = -6 \text{ tm,}$$

$$x = 5 \Rightarrow M_{\Delta}^{ap} = 9 \text{ tm.}$$

$$\text{για } x = 4,75 \text{ m, είναι } M_{II \max} = 9,125 \text{ tm.}$$

$$\text{Είναι } M_{II} = 0, \text{ όταν } -2x - 2x + 2 + 15x - 30 - 2x^2 + 8x - 8 = 0,$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 19x - 38 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 9,5x + 19 = 0.$$

$$\text{Αν τις ρίζες της: } x_{1,2} = \frac{9,5 \pm \sqrt{90,25 - 4 \cdot 19}}{2} = \frac{9,5 \pm 3,77}{2} \begin{cases} 6,64 \\ 2,86 \end{cases}$$

η $x_1 = 6,64 \text{ m}$ απορρίπτεται γιατί είναι εκτός των ορίων του τμήματος.

Τμήμα III ($3 \leq x < 5$) από δεξ.

$$M_{III} = -\frac{3 \cdot 3}{2}(x-1) + 10,5(x-3).$$

$$\text{Γιά } x = 3 \Rightarrow M_B = -9 \text{ tm,}$$

$$x = 5 \Rightarrow M_{\Delta}^{\delta \epsilon \zeta} = 3 \text{ tm.}$$

$$\text{Είναι } M_{III} = 0, \text{ για } -4,5x + 4,5 + 10,5x - 31,5 = 0, \quad \text{ή} \quad x = 4,5 \text{ m.}$$

Τμήμα IV ($0 \leq x \leq 3$) από δεξ.

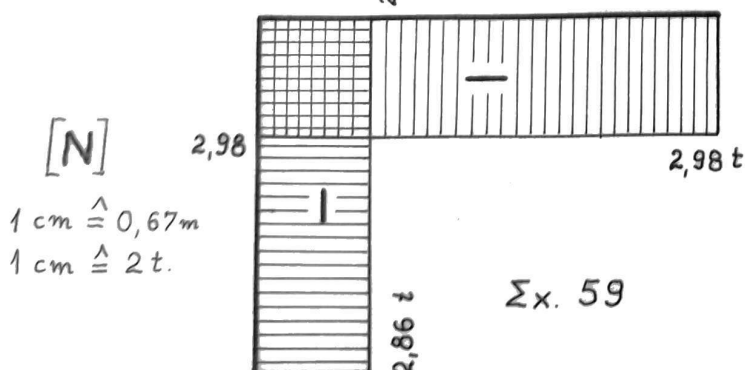
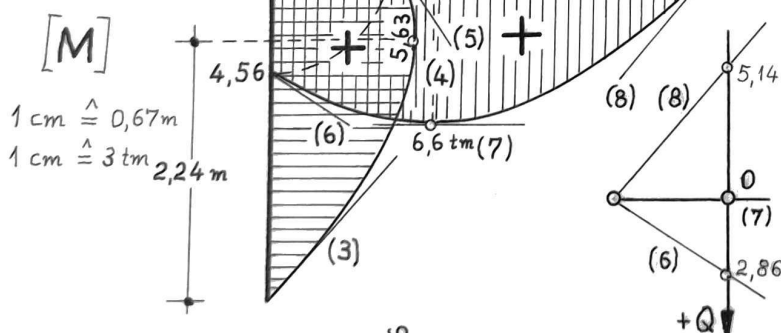
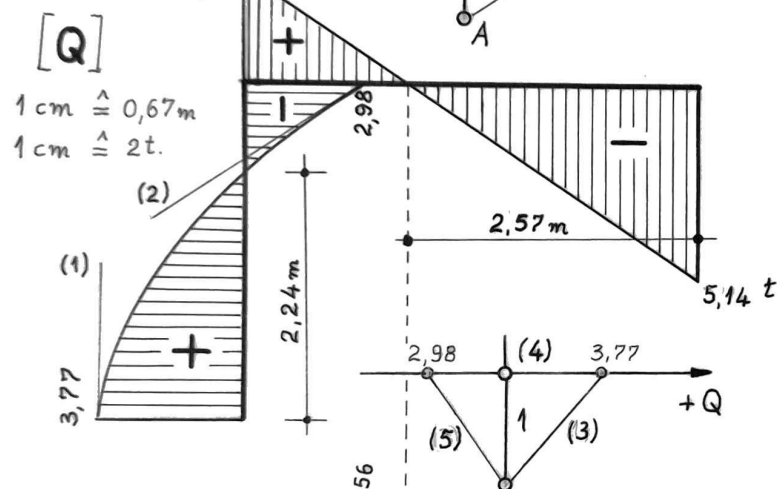
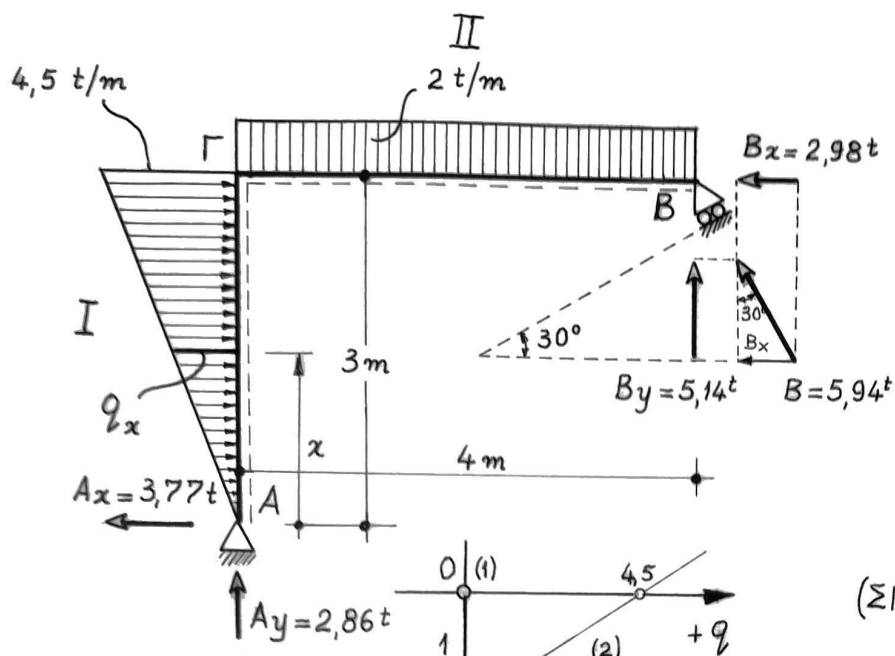
$$M_{IV} = -3 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + q_x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

$$\text{Γιά } x = 0 \Rightarrow M_E = 0,$$

$$x = 3 \Rightarrow M_B = -9 \text{ tm.}$$

5. Του π λ α ι β ι ω τ ο ύ φορέα που εικονίζεται στο σχήμα της επόμενης σελίδας, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις στήριξεις του Α και Β και να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων (Q), καμπτικών ροπών (M) και αξονικών δυνάμεων (N).

Λύση.



Αντιδράσεις.

Αν B_x και B_y είναι η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της B , θα είναι:

$$\frac{B_x}{B_y} = \tan 30^\circ \Rightarrow$$

$$B_x = 0,58 B_y.$$

$$(\sum M)_A^{++} = 0 \Rightarrow \frac{4,5 \cdot 3}{2} \cdot 2 +$$

$$+ 2 \cdot 4 \cdot 2 - B_y \cdot 4 - 0,58 B_y \cdot 3 = 0.$$

$$\Rightarrow 5,74 B_y = 29,5 \Rightarrow B_y = 5,14 \text{ t}.$$

$$\text{Άρα: } B_x = 2,98 \text{ t}$$

$$\text{και: } B = 5,94 \text{ t}.$$

$$\sum y^{++} = 0 \Rightarrow A_y - 2 \cdot 4 +$$

$$+ 5,14 = 0 \Rightarrow A_y = 2,86 \text{ t}.$$

$$\sum x^{++} = 0 \Rightarrow -A_x + \frac{4,5 \cdot 3}{2} -$$

$$- 2,98 = 0 \Rightarrow A_x = 3,77 \text{ t}.$$

$$\text{Επαλ: } (\sum M)_B^{++} = 3,77 \cdot 3 - \frac{4,5 \cdot 3}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 5,14 \cdot 4 = 0!$$

Διάγραμμα Q

Τμήμα I ($0 < x < 3$)

Αν q_x είναι η ένταση της τριγωνικής φόρτισης σε διατομή που απέχει x από το A , θα είναι:

$$\frac{q_x}{4,5} = \frac{x}{3} \Rightarrow q_x = 1,5 x.$$

$$\text{Άρα: } Q_I = 3,77 - \frac{q_x \cdot x}{2} = 377 - \frac{1,5 x^2}{2}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_A^{\text{δελ}} = 3,77 \text{ t},$$

$$\text{για } x=3 \Rightarrow Q_r^{\text{ap}} = -2,98 \text{ t.}$$

$$\text{Είναι } Q_I = 0, \text{ για } x^2 = 3,77 \cdot 2 / 1,5 \text{ ή } x = \pm 2,24 \text{ m.}$$

Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται γιατί είναι έξω απ' τα όρια του τμήματος.

Τμήμα II ($0 < x < 4$) από δεξ

$$Q_{II} = -5,14 + 2x.$$

$$\text{Για } x=0 \Rightarrow Q_B^{\text{ap}} = -5,14 \text{ t,}$$

$$x=4 \Rightarrow Q_r^{\text{δεξ}} = 2,86 \text{ t.}$$

$$\text{Είναι } Q_{II} = 0, \text{ όταν } 2x = 5,14 \text{ ή } x = 2,57 \text{ m.}$$

Διάγραμμα M

Διαλέγω το δετικό όριο του φορέα (κάτω ίνα) εσωτερικά του πλαισίου, ώστε η ροπή στο Γ, που προέρχεται είτε απ' το οριζόντιο είτε απ' το κατακόρυφο κέλος, να έχει, εκτός από την ίδια τιμή και το ίδιο πρόσημο.

Με τον τρόπο αυτό, διατηρείται ομοιομορφία και στη θήμανση των διαγραμμάτων (Q) και (N).

Τμήμα I ($0 \leq x \leq 3$)

$$M_I = 3,77x - \frac{q_x \cdot x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 3,77x - \frac{x^3}{4}.$$

$$\text{Για } x=0 \Rightarrow M_A = 0,$$

$$x=3 \Rightarrow M_r = 4,56 \text{ tm.}$$

$$\text{για } x = 2,24 \text{ m, είναι } M_{I\text{max}} = 5,63 \text{ tm.}$$

Τμήμα II ($0 \leq x \leq 4$) από δεξ.

$$M_{II} = 5,14x - 2x \frac{x}{2} = 5,14x - x^2.$$

$$\text{Για } x=0 \Rightarrow M_B = 0,$$

$$x=4 \Rightarrow M_r = 4,56 \text{ tm.}$$

$$\text{για } x = 2,57 \text{ m, είναι } M_{II\text{max}} = 6,6 \text{ tm.}$$

Διάγραμμα N

Εδώ ο χωρισμός του φορέα σε τμήματα, γίνεται σχεδόν αποκλειστικά με μοναδικό κριτήριο την ύπαρξη συγκεντρωμένων

δυνάμεων που δρουν αξονικά στο φορέα, δηλαδή δυνάμεων που είναι παράλληλες στον άξονά του.

Σπανιώςτατα είναι δυνατόν να εμφανιστεί συνεχές φορτίο που να δρά κατά την έννοια του άξονα του φορέα, οπότε η περίπτωση του αντιμετωπίζεται όπως ακριβώς και στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων.

Με το παραπάνω σκεπτικό, ο χωρισμός του φορέα στα τμήματα I και II που έγινε για τα διαγράμματα (Q) και (M), ισχύει και για το διάγραμμα αξονικών δυνάμεων (N).

Τμήμα I ($0 < x < 3$)

$$N_I = - Ay = - 2,86 \text{ t σταθ.}$$

Τμήμα II ($0 < x < 4$) από δεξ

$$N_{II} = - Bx = - 2,98 \text{ t σταθ.}$$

β. Γενικές παρατηρήσεις

1. Στο διάγραμμα (M), όταν από αφόρτιστη περιοχή του φορέα μεταβαίνουμε σε συνεχώς φορτισμένη χωρίς την παρεμβολή συγκεντρωμένου φορτίου, τότε η ευθεία του διαγράμματος που αντιστοιχεί στην αφόρτιστη περιοχή, είναι μαζί και εφαπτομένη του καμπύλου τμήματος που αντιστοιχεί στο φορτισμένο τμήμα του φορέα (βλέπε διάγραμμα M_{II-III} βελ. 100 και M_{II-III} βελ. 104).

2. Η ύπαρξη συγκεντρωμένης κατακόρυφης δύναμης σε ακραία ή ενδιάμεση θέση συνεχούς φορτίου, αν και δεν διασπά την τιμή της καμπτικής ροπής M στη θέση της δύναμης, δημιουργεί στο διάγραμμα γωνία υπό μορφήν ακίδας που οφείλεται στις δύο εφαπτόμενες, εκατέρωθεν της διατομής όπου δρά η δύναμη.

3. Στο διάγραμμα (Q), όταν από τριγωνική φόρτιση μεταβαίνουμε σε αφόρτιστο τμήμα του φορέα που συνορεύει με την κορυφή της τριγωνικής χωρίς τη μεσολάβηση κατακόρυφης δύναμης,

τότε η οριζόντια ευθεία του διαγράμματος που αντιστοιχεί στο αφόρτιστο τμήμα είναι μαζί και εφαπτομένη του παραβολικού τμήματος της φορτισμένης περιοχής. (βλέπε διάγρ. QII-III σελ. 104).

4. Όταν στο όριο μεταξύ δύο τμημάτων δεν εμφανίζεται συγκεντρωμένη κατακόρυφη δύναμη ή ροπή, τότε η τιμή της Q ή M αντίστοιχα που προκύπτει απ' τη χρησιμοποίηση των εξισώσεων στα γειτονικά τμήματα είναι πάντα η ίδια. (επαλήθευση).

γ. Δυσμενείς φορτίσεις

Σαν κατασκευαστικό στοιχείο, ο φορέας πρέπει να μελετηθεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να μπορεί να αναλάβει τα προβλεπόμενα φορτία σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τους, ειδικά εκείνους που προκαλούν δυσμενέστερες καταπονήσεις.

Τα φορτία που κατά πάγια τακτική αναλαμβάνει ένας φορέας είναι:

- 1) Το δικό του (ίδιο) βάρος που θεωρείται μόνιμο φορτίο (g)
- 2) Το ωφέλιμο ή κινητό φορτίο (P), και
- 3) Το φορτίο χιονιού (s).

Η σύγχρονη δράση των παραπάνω φορτίων που ονομάζονται κύρια, συνιστούν τη λεγόμενη φόρτιση H του φορέα.

Πέρα όμως από τα κύρια φορτία, ένας φορέας μπορεί να αναλαμβάνει και πρόσθετα φορτία, δηλαδή φορτία που προέρχονται από:

- 1) Ανεμοπίεση (w)
- 2) Μεταβολή της θερμοκρασίας, και
- 3) Δυνάμεις πεδήσεως (φρένα).

Η σύγχρονη δράση των κύριων και πρόσθετων φορτίων, συνιστούν την ονομαζόμενη φόρτιση HZ .

Τα κτηριακά έργα επιβαρύνονται συνήθως με φόρτιση H , ενώ οι γέφυρες με HZ .

Στη μελέτη ενός φορέα, τα φορτία που συνδυάζονται μεταξύ τους για να δώσουν τις δυσμενέστερες καταπονήσεις, είναι:

α) Τα μόνιμα φορτία (g), που δεν μεταβάλλονται και συνεπώς προκαλούν φόρτιση του φορέα σε όλο του το μήκος, και

β) Τα κινητά ή ωφέλιμα φορτία (p), που μπορούν να κινούνται κατά μήκος του φορέα και συνεπώς να τον επιβαρύνουν διαφορετικά, ανάλογα με τη θέση που έχουν κάθε φορά.

Όταν ο φορέας φορτίζεται σε όλο του το μήκος με φορτίο $q = g + p$, λέμε ότι υφίσταται καθολική φόρτιση.

Όταν όμως ένα τμήμα του φορτίζεται με q ενώ το υπόλοιπο με g , η φόρτιση ονομάζεται μερική, και μπορεί να αποτελέσει μία περίπτωση δυσμενούς φορτίσεως.

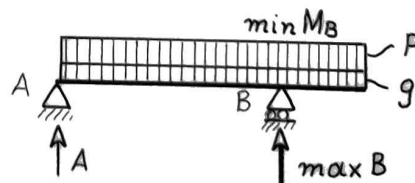
Στην αμφιέριστη δοκό, οι μέγιστες αντιδράσεις ετήριξης και οι μέγιστες καμπτικές ροπές προκύπτουν για καθολική φόρτιση q .

Στη μονοπροέχουσα δοκό, επειδή η φόρτιση του προβόλου μειώνει την αντίδραση στην ακραία ετήριξη και την καμπτική ροπή στο άνοιγμα, οι μέγιστες τιμές υπολογίζονται για μερική φόρτιση.

Ανάλογα με τη θέση που έχει το κινητό φορτίο πάνω στη μονοπροέχουσα δοκό, προκύπτουν οι παρακάτω περιπτώσεις φορτίσεως:

1) Καθολική φόρτιση.

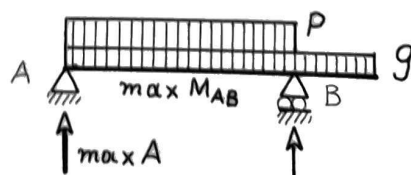
Προκαλεί τη μέγιστη αντίδραση της εξωτερικής ετήριξης ($\max B$) και την ελάχιστη (απόλυτα μέγιστη) αρνητική ροπή στη ετήριξη του προβόλου ($\min M_B$).



Σχ. 60

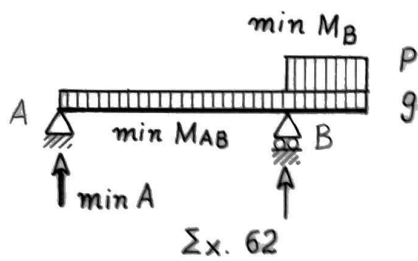
2) Κινητό φορτίο μόνο στο άνοιγμα

Προκαλεί τη μέγιστη αντίδραση της ακραίας ετήριξης ($\max A$) και τη μέγιστη ροπή ανοίγματος ($\max M_{AB}$).



Σχ. 61

3) Κινητό φορτίο μόνο στον πρόβολο.

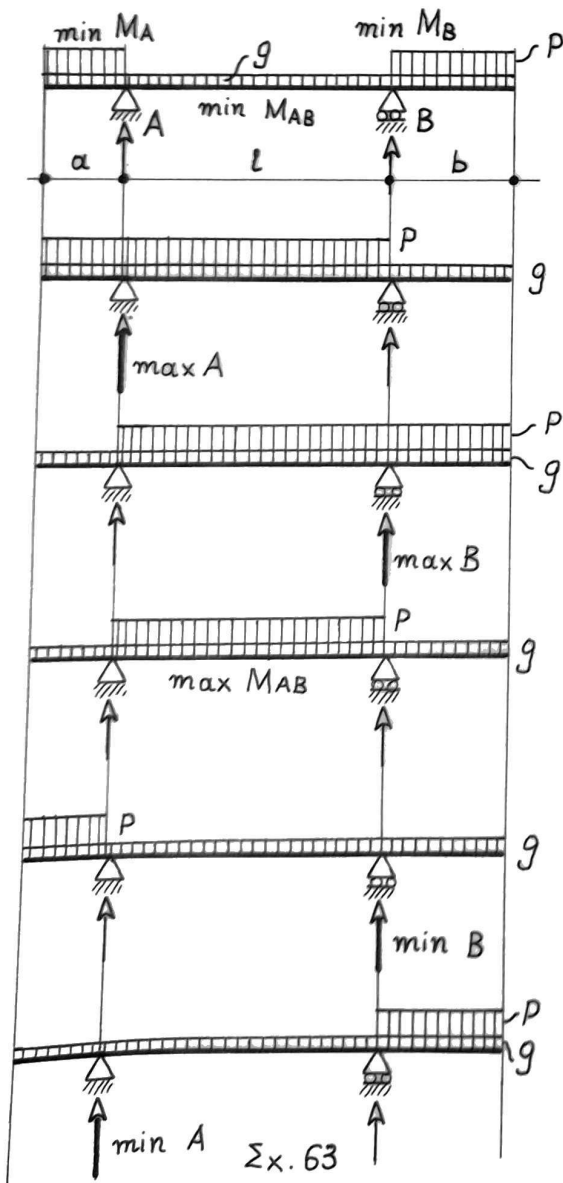


Προκαλεί την ελάχιστη ροπή στο άνοιγμα ($\min M_{AB}$) και την ελάχιστη αντίδραση της ακραίας στήριξης ($\min A$). Αν η αντίδραση προκύψει αρνητική, τότε πρέπει η δοκός να αγκυρώνεται στη στήριξη.

αγκυρώνεται στη στήριξη.

Στην αμφιπροέχουσα δοκό, οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές των αντιδράσεων και ρομών δεν προκύπτουν για καθολική φόρτιση όπως στην αμφιέρειστη, αλλά για μερική φόρτιση της δοκού από τα κινητά φορτία.

Όμως επειδή υπάρχουν δύο πρόβολοι, οι δυνατές περιπτώσεις φόρτισης είναι έξι, ενώ στη μονοπροέχουσα ήταν μόνο τρεις.



1) Φόρτιση δύο προβόλων

Προκύπτει: $\min M_A$, $\min M_B$, $\min M_{AB}$.

2) Φόρτ. ανοίγματος & αριστ. προβόλου

Προκύπτει η $\max A$

3) Φόρτ. ανοίγματος & δεξιού προβόλου

Προκύπτει η $\max B$

4) Φόρτιση μόνο ανοίγματος

Προκύπτει η $\max M_{AB}$

5) Φόρτιση μόνο αριστ. προβόλου

Προκύπτει: $\min M_A$ και $\min B$.

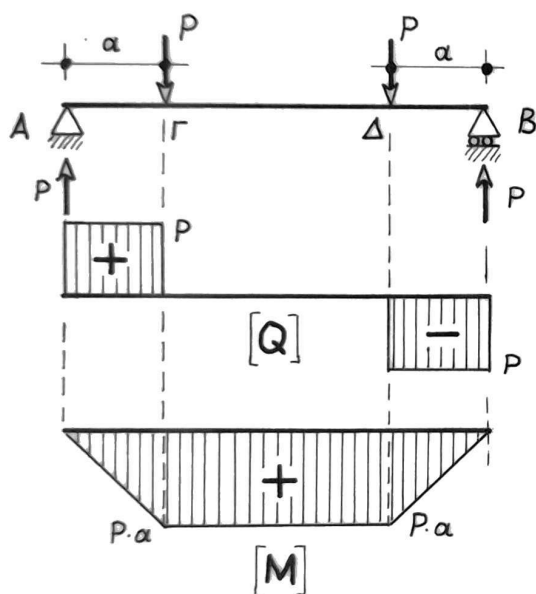
6) Φόρτιση μόνο δεξιού προβόλου

Προκύπτει: $\min M_B$ και $\min A$.

3. Η κάμψη και οι εσωτερικές δυνάμεις.

Μετά την εμπειρία που αποκτήθηκε ήδη από τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών μίας δοκού, θα μπορούσαμε να ορίσουμε την κάμψη σαν την αλή καταπόνηση μίας ράβδου, όπου τα φορτία ή οι ροπές που δρούν, βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, που περιλαμβάνει και τον άξονά της.

Επομένως οι εσωτερικές δυνάμεις που μπορεί να εμφανιστούν σε τυχούσα διατομή, θα είναι γενικά τέμνουσες δυνάμεις και καμπτικές ροπές.



Σχ. 64

Αν σε διατομή ή τμήμα της δοκού εμφανίζεται μόνο καμπτική ροπή, τότε η κάμψη ονομάζεται καθαρή.

Αν όμως πλὴν της καμπτικής ροπής εμφανίζεται και τέμνουσα δύναμη, τότε η κάμψη ονομάζεται γενική.

Στην αμφιέρειστη π.χ. δοκό του διπλανού σχήματος, όπου δύο ίσα φορτία ενεργούν σε ίσες απο-

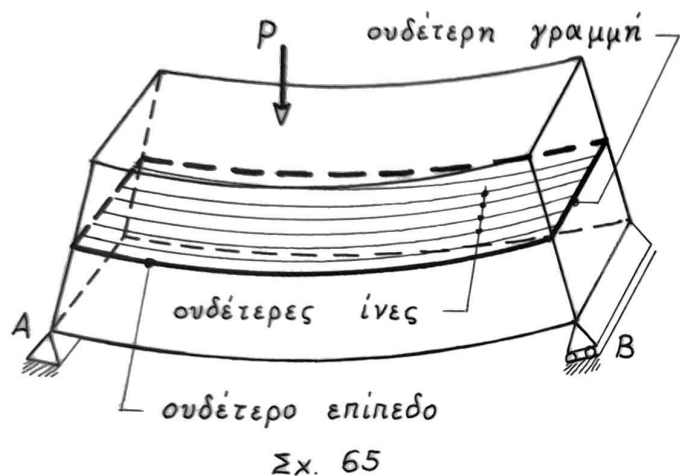
στάσεις απ' τις στηρίξεις, γιὰ το μεταξύ των φορτίων τμήμα ΓΔ της δοκού, όπου δεν εμφανίζεται τέμνουσα δύναμη ($Q=0$), αλλά μόνο καμπτική ροπή σταθερής τιμής, έχουμε καθαρή κάμψη.

Γιὰ τα τμήματα όμως ΑΓ και ΔΒ, όπου, πλὴν της ροπής, εμφανίζεται και τέμνουσα, έχουμε γενική κάμψη.

Οι άξονες των ράβδων που καταπονούνται σε κάμψη, θεωρούνται αρχικά ευθύγραμμοι. Όμως μετά την επιβολή των φορτίων, η ράβδος παθαίνει παραμορφώσεις, που έχουν σαν αποτέλεσμα την καμπύλωση του άξονα.

Η καμπύλωση αυτή του άξονα, για τη ράβδο π.χ. του σχ. 65, σημαίνει επιβράχυνση των ανωτέρων ινών, με ταυτόχρονη επιμήκυνση των κατωτέρων, που είναι αποτέλεσμα θλίψης και εφελκυσμού αντίστοιχα, στις ίνες της ράβδου.

Και επειδή η παραμόρφωση της ράβδου είναι ευνεχής, χωρίς το υλικό της να παρουσιάζει κενά, έπεται ότι η μετάβαση αυτή από τη θλίψη στον εφελκυσμό δεν γίνεται απότομα, αλλά βαθμιαία.



Επομένως σε ενδιάμεσες θέσεις της διατομής θα υπάρχουν ίνες οι οποίες δεν έπαθαν καμμία μεταβολή στο αρχικό τους μήκος και συνεπώς δεν εμφανίζεται ό' αυτές ούτε θλίψη ούτε εφελκυσμός.

Οι ίνες αυτές ονομάζονται ουδέτερες και συνιστούν ένα επίπεδο που λέγεται ουδέτερο επίπεδο.

Η τομή του ουδέτερου επιπέδου με την διατομή της ράβδου είναι ευθεία που ονομάζεται ουδέτερη γραμμή.

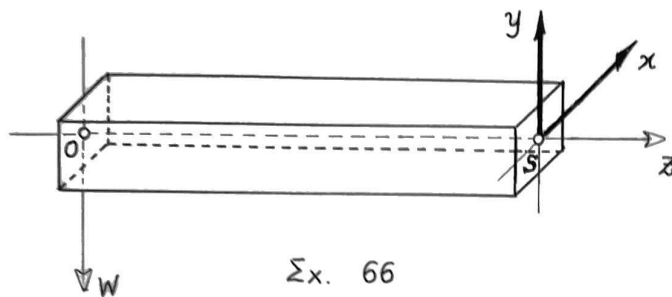
Η ύπαρξη του ουδέτερου επιπέδου είναι μεγάλης σημασίας, γιατί δίνει μία πρώτη σταθερή βάση για την αναλυτική μελέτη του φαινομένου της κάμψης.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι τάσεις που εμφανίζονται στην καμπτική καταπόνηση, είναι γενικά ορθές (θλιπτικές - εφελκυστικές) και διατμητικές.

Για τον προσδιορισμό των μεταβολών των τάσεων και παραμορφώσεων στην κάμψη, θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω συστήματα συντεταγμένων (βλέπε σχ. 66):

1) Το σύστημα Oxw , στο οποίο θα αναφέρουμε τις μετα-

κινήσεις w των διατομών της ράβδου μετά την παραμόρφωση, δε σχέση με την θέση τους, που καθορίζεται με την τετμημένη x , πάνω στον άξονα Ox (τομή του ουδέτερου επιπέδου με το επίπεδο φόρτισης), και



2) Το σύστημα S_{xy} στο οποίο θα αναφέρουμε τη θέση κάθε σημείου της διατομής. Το σύστημα S_{xy} κείται στο επίπεδο της διατομής και ο άξονας

Sx συμπίπτει με την ουδέτερη γραμμή.

Βασικές προϋποθέσεις για τη μελέτη του θέματος, είναι:

1. Όλα τα φορτία, δυνάμεις ή ροπές που προκαλούν την κάμψη κείνται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει τον αρχικά ευθύγραμμο άξονα της δοκού και λέγεται επίπεδο φόρτισης ή, (αν η κάμψη του άξονα γίνεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο), επίπεδο κάμψης.

2. Η αρχή του Bernoulli που εμφανίστηκε οριστικά στη θεωρία της κάμψης με τις εργασίες του Navier (1820): Διατομές επίπεδες και κάθετες στον άξονα της δοκού πριν απ' την παραμόρφωση παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον άξονα και μετά απ' αυτήν.

3. Οι παραμορφώσεις που εμφανίζονται είναι μικρές, δηλαδή ισχύει ο νόμος του Hooke.

4. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού E είναι το ίδιο στον εφελκυσμό και στη θλίψη, και

5. Το επίπεδο κάμψης που αναφέρθηκε παραπάνω, περιέχει έναν απ' τους κύριους άξονες αδράνειας της διατομής του, που είναι άξονες κάθετοι μεταξύ τους, ως προς τους οποίους η ροπή αδράνειας της διατομής είναι μέγιστη για τον ένα, ελάχιστη για τον άλλο.

4. Οι τάσεις.

Στην παράγραφο αυτή θα αναζητήσουμε τους νόμους μεταβολής των τάσεων που εμφανίζονται γενικά στην καμπτική καταπόνηση.

Έτσι θα προσδιορίσουμε πρώτα τις ορθές τάσεις που εμφανίζονται στην καθαρή κάμψη και στη συνέχεια τις διατμητικές τάσεις που εμφανίζονται επί πλέον στη γενική κάμψη.

α. Οι ορθές τάσεις.

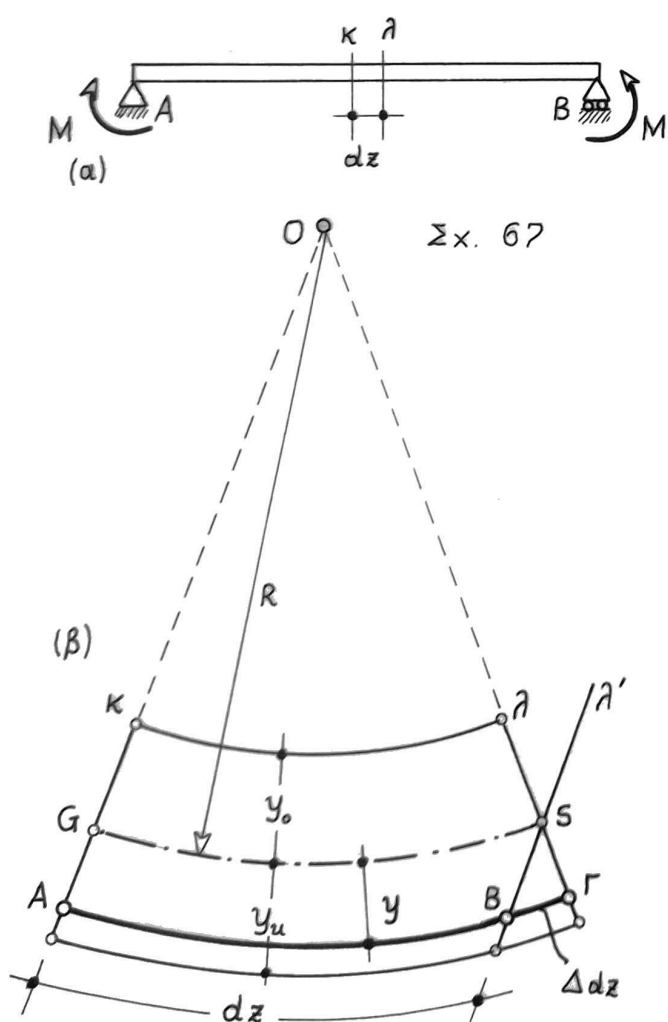
Θεωρούμε τη δοκό του σχ. 67α, στα άκρα της οποίας ενεργούν δύο ίσες και αντίθετες ροπές, M .

Είναι προφανές ότι η δοκός καταπονείται σε καθαρή κάμψη, γιατί σε κάθε διατομή της εμφανίζεται η σταθερή ροπή M , που έχει σαν αποτέλεσμα την κυκλική παραμόρφωση της δοκού.

Αποκόπτουμε απ' τη δοκό ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους dz που περιλαμβάνεται μεταξύ των διατομών κ και λ .

Το τμήμα αυτό, μετά την παραμόρφωση, παίρνει την μορφή του σχ. 67β, όπου οι διατομές κ και λ , παραμένοντας επίπεδοι λόγω της αρχής Bernoulli, τέμνονται σε ευθεία, με ίχνος πάνω στη θελίδα το O , ορίζοντας έτσι την ακτίνα καμπυλότητας R .

Απ' το σημείο S της ουδέτερης ίνας GS φέρνουμε επίπεδο λ' παράλληλο του κ .



Είναι φανερό ότι μία ίνα με αρχικό μήκος $AB = dz$, που βρίσκεται σε απόσταση y απ' την ουδέτερη γραμμή, επιμηκύνεται κατά $\Delta dz = BG$.

Απ' τα όμοια τρίγωνα OGS και SBG , προκύπτει:

$$\frac{BG}{GS} = \frac{y}{R} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{y}{R}. \quad (9)$$

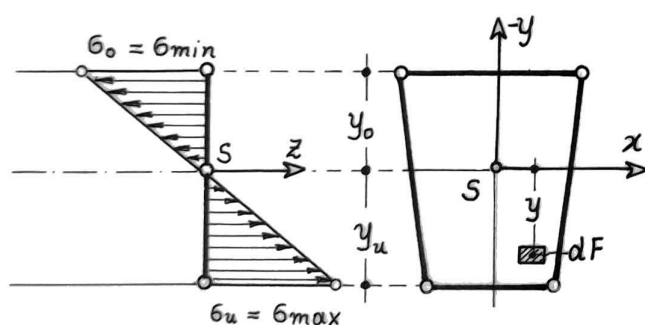
Αλλά ισχύοντας του νόμου του Hooke, είναι:

$$\frac{\Delta dz}{dz} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (10)$$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (9) και (10) δίνει:

$$\sigma = \frac{E}{R} \cdot y. \quad (11)$$

Ήδη η σχέση (11) εκφράζει την γραμμικότητα της μεταβολής των ορθών τάσεων σ , σε σχέση με την απόστασή τους y απ' την ουδέτερη γραμμή.



Σχ. 68

Παρατηρούμε ότι οι ορθές τάσεις σ θα πρέπει να δίνουν σ' όλη τη διατομή μηδενική συνισταμένη, γιατί αρχικά υποθέσαμε ότι η δοκός καταπονείται σε καθαρή κάμψη ($N=0$, $Q=0$).

Σε στοιχειώδη επιφάνεια dF της διατομής που απέχει απόσταση y απ' την ουδέτερη γραμμή, ενεργεί η στοιχειώδης ορθή δύναμη:

$$dN = \sigma \cdot dF = \frac{E}{R} y \cdot dF \quad (12)$$

Η ολοκλήρωση της (12) στην επιφάνεια F , δίνει:

$$N = \int_F dN = \int_F \frac{E}{R} y \cdot dF = \frac{E}{R} \int_F y \cdot dF = 0. \quad (13)$$

Η σχέση (13) λέει ότι η στατική ροπή της διατομής F ως προς

την ουδέτερη γραμμή είναι μηδέν.

Αυτό σημαίνει ότι η ουδέτερη γραμμή περνάει απ' το κεντροειδές της διατομής που είναι σταθερό και προσδιορίσιμο σημείο.

Παρατηρούμε επίσης ότι το άθροισμα των ροπών όλων των στοιχειωδών δυνάμεων dN της (12) ως προς την ουδέτερη γραμμή, πρέπει να ισούνται προς την καμπτική ροπή M , που ενεργεί στη διατομή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η M είναι η καμπτική ροπή που γνωρίσαμε ήδη στην παράγραφο 1δ (τέλος σελ. 89). Όστε λοιπόν, είναι:

$$M = \int_F y \cdot dN = \int_F y \cdot \frac{E}{R} y dF = \frac{E}{R} \int_F y^2 dF. \quad (14)$$

Στη σχέση (14), ο παράγοντας $\int_F y^2 dF$ εκφράζει τη ροπή αδράνειας J_x της διατομής ως προς την ουδέτερη γραμμή. Άρα:

$$M = \frac{E}{R} J_x. \quad (15)$$

Ήδη, απαλείφοντας τον παράγοντα E/R μεταξύ των σχέσεων (15) και (11), βρίσκουμε τον νόμο μεταβολής των ορθών τάσεων:

$$\sigma = \frac{M}{J_x} \cdot y \quad (16)$$

όπου το y είναι θετικό κάτω απ' την ουδέτερη γραμμή και αρνητικό πάνω απ' αυτήν.

Η σχέση (16) επιτρέπει τον προσδιορισμό της ορθής τάσης σ σε οποιοδήποτε σημείο της διατομής.

Όμως, ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ακρότατες τιμές της σ , που αντιστοιχούν στις ίνες που απέχουν τη μεγαλύτερη απόσταση $(-y_o, y_u)$ απ' την ουδέτερη γραμμή:

$$\sigma_u = \sigma_{\max} = + \frac{M}{J_x} \cdot y_u = + \frac{M}{J_x/y_u} = + \frac{M}{W_{xu}} \quad (17)$$

$$\sigma_o = \sigma_{\min} = - \frac{M}{J_x} y_o = - \frac{M}{J_x/y_o} = - \frac{M}{W_{xo}}. \quad (18)$$

Στις σχέσεις (17) και (18), τα μεγέθη:

$$W_{xu} = \frac{J_x}{y_u} \quad \text{και} \quad W_{xo} = \frac{J_x}{y_o}$$

ονομάζονται ροπές αντίστασως της διατομής ως προς την ουδέτερη γραμμή για την κατώτατη και ανώτατη ίνα της αντίστοιχα.

Όταν και ο άξονας x είναι άξονας συμμετρίας της διατομής (ορθογωνική, κυκλική κ.λπ.), οπότε: $y_u = y_o$, τότε θα είναι και: $W_{xu} = W_{xo} = W_x$, οπότε οι σχέσεις (17) και (18) γίνονται:

$$\sigma_{\text{ακρότατη}} = \pm \frac{M}{W_x} \quad (19)$$

Ας δούμε τώρα τι σημαίνουν οι προϋποθέσεις 1 και 5 που έγιναν στη σελίδα 117, ότι δηλαδή η καμπτική ροπή πρέπει να βρίσκεται στο επίπεδο φόρτισης wOz ή yOz , βλ. 66.

Λόγω της προϋπόθεσης αυτής, οι στοιχειώδεις δυνάμεις dN που προέρχονται απ' τις ορθές τάσεις σ , θα πρέπει να έχουν αλγεβρικό άθροισμα ροπών ως προς τον άξονα y ίσο με μηδέν, που συμβαίνει για το είδος αυτό της κάμψης που εξετάζουμε, και ονομάζεται γιαυτό ορθή ή σύμμετρη κάμψη.

Τότε, θα είναι:

$$\int_F x \cdot dN = 0, \quad \text{ή:}$$

$$\int_F x \cdot \sigma \cdot dF = \int_F x \frac{M}{J_x} y \cdot dF = \frac{M}{J_x} \int_F xy dF = \frac{M}{J_x} \cdot J_{xy} = 0,$$

και επομένως θα πρέπει, μιάς και $M/J_x \neq 0$, να είναι $J_{xy} = 0$.

Για να είναι όμως η φυγόκεντρη ροπή ως προς το σύστημα συντεταγμένων S_{xy} ίση με μηδέν, πρέπει οι κύριοι άξονες αδράνειας της διατομής να συμπίπτουν με τους άξονες συντεταγμένων x και y , ή, πράγμα που είναι το ίδιο, ένας απ' τους κύριους άξονες αδράνειας της διατομής να κείται στο επίπεδο κάμψης, που συμπίπτει με το επίπεδο xy . (βλ. 66).

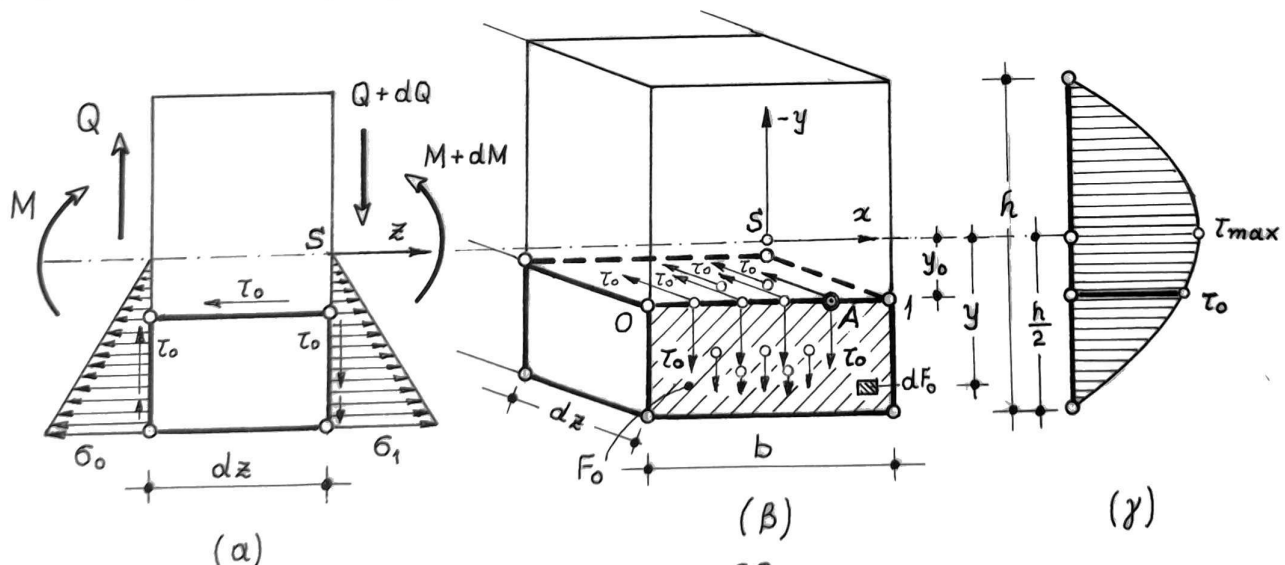
β. Οι διατμητικές τάσεις.

Για τον προσδιορισμό του νόμου μεταβολής των διατμητικών τάσεων, θεωρούμε τώρα τμήμα δοκού που καταπονείται σε γενική κάμψη, στοιχειώδους μήκους dz .

Για λόγους απλότητας η διατομή της δοκού λαμβάνεται ορθογωνική, ενώ το στοιχειώδες τμήμα θεωρείται ελεύθερο εξωτερικών φορτίων (αφόρτιστο).

Επειδή στη γενική κάμψη, πέρα από την καμπτική ροπή, της οποίας η τιμή στο στοιχειώδες τμήμα είναι μεταβαλλόμενη, εμφανίζεται και τέμνουσα δύναμη, έπεται ότι εκτός απ' τις ορθές τάσεις σ , για τις οποίες ισχύουν οι τύποι που ήδη αναπτύξαμε, εμφανίζονται και διατμητικές τάσεις τ , που κύρια θα μας απασχολήσουν παρακάτω.

Έστω Q και M τα φορτία διατομής της αριστερής πλευράς του στοιχειώδους τμήματος, ενώ $Q+dQ$ και $M+dM$ τα αντίστοιχα της δεξιάς πλευράς, βλ. 69α.



Σχ. 69

Απ' τις συνθήκες ισορροπίας του στοιχειώδους τμήματος, προκύπτει:

$$\sum y^{\uparrow} = 0 \Rightarrow Q - Q - dQ = 0 \Rightarrow dQ = 0$$

$$(\sum M)_S^{\uparrow} = 0 \Rightarrow M + Qdz - M - dM = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dz} = Q \quad (20)$$

Έστω τ_0 η διατμητική τάση που αναπτύσσεται σε τυχόν σημείο A της διατομής, που απέχει απόσταση y_0 απ' την ουδέτερη γραμμή (βλ. 69β).

Απ' το A φέρνουμε την ευθεία $O-1$, παράλληλη προς την ουδέτερη γραμμή.

Θα υπολογίσουμε τη διατμητική τάση στο σημείο A , υποθέτοντας ότι είναι παράλληλη προς τον άξονα y και σταθερή σ' όλο το μήκος της ευθείας $O-1$, ^{πράγμα} που φαίνεται άλλωστε προφανές.

Για το σκοπό αυτό πραγματοποιούμε επίπεδη τομή που να περιέχει την ευθεία $O-1$ και να είναι παράλληλη στο ουδέτερο επίπεδο.

Έτσι αποκόπτουμε το πρίσμα που φαίνεται έντονα στο βλ. 69β και έχει διαστάσεις dx , b και $h/2 - y_0$.

Μετά την απομόνωση του πρίσματος, παρατηρούμε ότι οι τάσεις που ενεργούν σ' αυτό, είναι:

1) Στην δεξιά έδρα, οι μεταβαλλόμενες ορθές τάσεις σ , και οι επίσης μεταβαλλόμενες διατμητικές τάσεις τ , με τιμή τ_0 στα σημεία που βρίσκονται κατά μήκος της ακμής $O-1$, όπως υποθέσαμε αρχικά.

2) Στην πάνω έδρα, η σταθερή διατμητική τάση τ_0 , σύμφωνα με την πρόταση του Cauchy (βλέπε βελ. 16) και

3) Στην αριστερή έδρα, οι μεταβαλλόμενες ορθές τάσεις σ_0 και οι επίσης μεταβαλλόμενες διατμητικές τάσεις τ , με τιμή τ_0 στην απέναντι οπίσθια ακμή της $O-1$.

Στις υπόλοιπες τρεις έδρες του πρίσματος προφανώς δεν ενεργούν τάσεις, γιατί αποτελούν την παράλληλη επιφάνεια της δοκού.

Για παραστατικώτερη εικόνα, το επάνω "Π" των εξωτερικών εδρών του πρίσματος είναι φορτισμένο με τάσεις, ενώ το κάτω και κάθετα προς αυτό "Π" των εξωτερικών του εδρών είναι αφόρτιστο.

Εξετάζοντας τώρα την ισορροπία του πρίσματος κατά την έν-

νοια του άξονα z , έχουμε:

$$\begin{aligned}\sum \vec{z} &= 0 \Rightarrow -\int_{F_0} \sigma_0 dF_0 - \tau_0 b dz + \int_{F_0} \sigma_1 dF_0 = 0 \\ -\int_{F_0} \frac{M}{J_x} \cdot y dF_0 - \tau_0 b dz + \int_{F_0} \frac{M+dM}{J_x} \cdot y dF_0 &= 0 \\ -\tau_0 b dz + \int_{F_0} \frac{dM}{J_x} \cdot y dF_0 &= 0.\end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } \tau_0 b dz = \frac{dM}{J_x} \cdot \int_{F_0} y dF_0 = \frac{dM}{J_x} \cdot S_{0x} \quad (21)$$

όπου το $\int_{F_0} y dF_0$ εκφράζει, όπως είναι γνωστό, τη στατική ροπή S_{0x} της διαγραμμισμένης επιφάνειας F_0 ως προς την ουδέτερη γραμμή.

Λύνοντας τη σχέση (21) ως προς το τ_0 και χρησιμοποιώντας τη σχέση (20), βρίσκουμε:

$$\tau_0 = \frac{Q \cdot S_{0x}}{b \cdot J_x} \quad (22)$$

Η σχέση (22) δίνει την τιμή της διατμητικής τάσης σε τυχόν σημείο της ευθείας $O-1$, που απέχει απόσταση y_0 απ' την ουδέτερη γραμμή.

Για τυχόν σημείο της διατομής, που απέχει απόσταση y απ' την ουδέτερη γραμμή, η διατμητική τάση θα είναι:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x}{b \cdot J_x}, \quad (23)$$

σχέση που διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1856, απ' το Ρώσο μηχανικό γεφυρών και σιδηροδρόμων D. J. Jourawski (1821-1891).

Στον τύπο (23), τα μεγέθη Q , J_x και b είναι σταθερά, ενώ το S_x μεταβάλλεται συναρτήσει του y και παριστάνει, όπως ήδη αναφέρθηκε, τη στατική ροπή του τμήματος της διατομής που βρίσκεται κάτω απ' την εκάστοτε ευθεία $O-1$ που περιλαμβάνει το τυχόν σημείο, ως προς την ουδέτερη γραμμή.

Για την ορθογωνική διατομή του σχ. 69β, είναι:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}.$$

Επίσης για τυχόν σημείο που απέχει απόσταση y απ' την ουδέτερη γραμμή, η στατική ροπή του τμήματος της διατομής που βρίσκεται κάτω απ' το σημείο, ως προς την ουδέτερη γραμμή, είναι:

$$S_x = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\text{Άρα: } \tau = \frac{Q \cdot \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \quad (24)$$

Από τη σχέση (24) που είναι παραβολή, (βλ. 69γ), προκύπτει ότι:

1) Στα ακρότατα σημεία της διατομής (πάνω και κάτω), όπου

$$y = \pm \frac{h}{2}, \quad \text{είναι } \tau = 0.$$

2) Στην ουδέτερη γραμμή, όπου $y = 0$, θα είναι:

$$\tau = \underline{\underline{\tau_{\max}}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F} = \underline{\underline{1,5 \frac{Q}{F}}}. \quad (25)$$

5. Έλεγχος αντοχής.

Ο στατικός έλεγχος και η εκλογή της διατομής σε μία γενικά καμπτόμενη δοκό είναι ουσιαστικής σημασίας και πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή.

Επειδή σ' όλες σχεδόν τις διατομές μιάς τέτοιας δοκού υπάρχουν ορθές και διατμητικές τάσεις μαζί, δημιουργώντας έτσι επίπεδη εντατική κατάσταση σε κάθε σημείο της διατομής της, θα έπρεπε κανονικά να προδιοριστούν οι κύριες τάσεις σ_1 και σ_2 καθώς και η μέγιστη διατμητική τάση $\tau_{\max}$ για όλα τα σημεία της διατομής και να συγκριθούν στη συνέχεια με τις επιτρεπόμενες τάσεις του υλικού σε εφελκυσμό, θλίψη και διάτμηση αντίστοιχα.

Όμως η παραπάνω εργασία, πέρα απ' το ότι είναι επίπονη,

δεν έχει νόημα για διατομές (ορθογωνικές, κυκλικές κ.λ.π.), όπου η διατμητική τάση μεταβάλλεται κατά τρόπο βυνεχής σε όλο το ύψος της διατομής.

Κι αυτό γιατί απ' τις κύριες τάσεις των διαφόρων σημείων της διατομής, η μέγιστη των σ_1 ταυτίζεται με την $\sigma_u = \sigma_{\max}$, η ελάχιστη των σ_2 με την $\sigma_o = \sigma_{\min}$ και η μέγιστη απ' τις $\tau_{\max}$ με την μέγιστη διατμητική τάση που αναπτύσσεται στην ουδέτερη γραμμή.

Έτσι η εργασία που γίνεται τελικά για τον έλεγχο μίας καμπτόμενης δοκού, περιλαμβάνει τα παρακάτω στάδια:

- 1) Τον έλεγχο σε κάμψη και
- 2) Τον έλεγχο σε διάτμηση.

Ο έλεγχος σε κάμψη είναι πρωταρχικής σημασίας και παίζει τον καθοριστικό ρόλο στην εκλογή της διατομής ενός φορέα. Και τούτο γιατί οι περιβόστες απ' τις κατασκευές που εμφανίζονται σήμερα, καταπονούνται γενικά σε κάμψη, με αποτέλεσμα τα όρια αντοχής στο υλικό τους να εξαντλούνται απ' την υπέρβαση των τιμών πρώτα στις ορθές και μετά στις διατμητικές τάσεις.

Ο έλεγχος σε διάτμηση παίζει γενικά δευτερεύοντα ρόλο στον καθορισμό της διατομής ενός καμπτόμενου φορέα. Σε ελάχιστες μόνον εξαιρέσεις, π.χ. όταν ένα μεγάλο συγκεντρωμένο φορτίο ασκείται σε μικρή απόσταση απ' τη στήριξη του φορέα, είναι δυνατόν ο διατμητικός έλεγχος να οδηγήσει τελικά στην διαστασιοδότηση της διατομής.

Τόσο ο καμπτικός όσο και ο διατμητικός έλεγχος, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν είτε για έλεγχο των τάσεων, είτε για διαστασιοδότηση της διατομής, είτε για φορτοϊκανότητα της δοκού.

Πάντως, σε κάθε περίπτωση καταπόνησης, θα πρέπει να ικανοποιούνται συγχρόνως και οι δύο έλεγχοι.

α. Έλεγχος σε κάμψη.

Απ' τις σχέσεις $\sigma_{\max} = \pm \frac{M}{W}$ και $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{ελ}}$, το πρόβλημα της κάμψης αντιμετωπίζεται στην πράξη με τους συνδυασμούς που προκύπτουν απ' τη λύση της ανισοδότητας:

$$\sigma_{\text{υπ},\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq \sigma_{\text{ελ}}, \text{ δηλαδή:} \quad (26)$$

1. Σαν έλεγχος ασφάλειας φορτισμένης δοκού (έλεγχος τάσεων).

Υπολογίζεται η μέγιστη καμπτική ροπή $M_{\max}$ της δοκού και η ροπή αντίστασης $W_{\text{υπ}}$ στή διατομή της $M_{\max}$.

Για να υπάρχει τότε ασφάλεια, θα πρέπει να είναι:

$$\sigma_{\text{υπ},\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\text{υπ}}} \leq \sigma_{\text{ελ}}.$$

Αν η διατομή είναι μεταβλητή, τότε προσδιορίζονται εκλεκτικά σε ορισμένες διατομές οι τιμές M και W , και το ζεύγος εκείνο που δίνει το μεγαλύτερο λόγο, συγκρίνεται με τη $\sigma_{\text{ελ}}$. ($M/W \leq \sigma_{\text{ελ}}$).

2. Σαν εκλογή διατομής που είναι απαραίτητη, ώστε η δοκός να φέρει τα δοσμένα φορτία.

Υπολογίζεται η $M_{\max}$. Μετά τον καθορισμό της επιτρεπόμενης τάσης $\sigma_{\text{ελ}}$ που αντιστοιχεί στο υλικό της δοκού, υπολογίζεται η απαιτούμενη ροπή αντίστασης $W_{\text{απ}}$ στη διατομή της $M_{\max}$, απ' τη σχέση:

$$W_{\text{απ}} \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{ελ}}}.$$

Απ' τη $W_{\text{απ}}$ εκλέγεται η κατάλληλη διατομή.

Όταν πρόκειται για χαλύβδινα ελάσματα (με διατομή I, U, L κ.λ.π.), η ροπή αντίστασης των διαφόρων διατομών βρίσκεται σε πίνακες μαζί με άλλα στοιχεία και έτσι η εκλογή της διατομής είναι άμεση.

Όταν πρόκειται για διατομές ορθογωνικών, τριγωνικών, κυκλικών ή άλλων γεωμετρικών σχημάτων, οι ροπές αντίστασης εκφράζονται με τύπους που περιέχουν τις κύριες διαστάσεις των διατομών. Έτσι:

Για ορθογώνιο με διαστάσεις $b \times h$, θα είναι:

$$W = J/h/2 = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}$$

Για ισοσκελές τρίγωνο διαστάσεων $b \times h$, διακρίνουμε:

$$W_o = \frac{bh^3}{36} : \frac{2h}{3} = \frac{bh^2}{24}$$

$$W_u = \frac{bh^3}{36} : \frac{h}{3} = \frac{bh^2}{12}$$

Για κύκλο με ακτίνα r ,

$$W = \frac{\pi r^4}{4} : r = \frac{\pi r^3}{4}$$

Για κυκλικό δακτύλιο με διαμέτρους D και d ,

$$W = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} \simeq \frac{D^4 - d^4}{10 \cdot D}$$

Αν ο κυκλικός δακτύλιος έχει πολύ λεπτό πάχος ε συγκριτικά με την εξωτερική διάμετρο και r_μ είναι η μέση ακτίνα του, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ικανοποιητική προσέγγιση ο τύπος:

$$W = \pi r_\mu^2 \varepsilon.$$

3. Σαν φορτοϊκανότητα της δοκού.

Με τον όρο αυτό νοείται εδώ η μέγιστη ροπή $M_{\max}$ που μπορεί να παραλάβει η δοκός με τη δοσμένη διατομή.

Για να μπορεί όμως η $M_{\max}$ να εκφρασθεί ως προς την άγνωστη τιμή της εξωτερικής φόρτισης, θα πρέπει η φόρτιση να είναι τέτοια που να επιτρέπει την εμφάνιση της $M_{\max}$ σε γνωστή ή εύκολα προσδιορίσιμη διατομή της δοκού (π.χ. ομοιόμορφη φόρτιση σ' όλο το μήκος αμφιερέιστου, συγκεντρωμένο φορτίο κ.λπ.).

Τότε, υπολογίζεται η W_{up} που αντιστοιχεί στη διατομή της M_{max} , ενώ απ' τη σχέση:

$$M_{max} \leq W_{up} \cdot \sigma_{ελ}$$

προσδιορίζεται η τιμή της M_{max} , η οποία, σαν συνάρτηση του άγνωστου εξωτερικού φορτίου, οδηγεί τελικά στον υπολογισμό του.

β. Έλεγχος σε διάτμηση.

Ανάλογα προς την κάμψη αντιμετωπίζεται και το πρόβλημα της διάτμησης, μόνο που η εφαρμογή της εδώ θα περιοριστεί σε δοκούς χαλύβδινων ελασμάτων και ορθογωνικής διατομής.

Απ' τις σχέσεις:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x}{b \cdot J_x}, \quad \tau_{max} = 1,5 \frac{Q_{max}}{F} \quad \text{και} \quad \tau_{max} \leq \tau_{ελ}$$

προκύπτουν οι παρακάτω συνδυασμοί των ανισοτήτων,

$$\tau_{up_{max}} = \frac{Q_{max} \cdot S_x}{b \cdot J_x} \leq \tau_{ελ} \quad \text{για χαλύβδινα ελάσματα} \quad (27)$$

$$\text{και} \quad \tau_{up_{max}} = 1,5 \frac{Q_{max}}{F} \leq \tau_{ελ} \quad \text{για ορθογωνική διατομή:} \quad (28)$$

1. Έλεγχος τάσεων

Υπολογίζεται η μέγιστη τέμνουσα δύναμη Q_{max} της δοκού και το εμβαδόν F στη διατομή της Q_{max} . Γιά να υπάρχει ασφάλεια θα πρέπει τότε κατά περίπτωση να ικανοποιείται η σχέση (27) ή (28).

Σημειώνεται ότι για χαλύβδινα ελάσματα, τα μεγέθη S_x , J_x και b (πάχος κορμού), παίρνονται από πίνακες.

Σε μεταβαλλόμενη ορθογωνική διατομή, προσδιορίζονται εκλεκτικά ζεύγη τιμών Q και F . ο μεγαλύτερος λόγος Q/F συγκρίνεται με την $2\tau_{ελ}/3$.

2. Εκλογή διατομής

Υπολογίζεται η Q_{max} . Μετά τον καθορισμό της $\tau_{ελ}$ του

υλικού της δοκού εκλέγεται η απαιτούμενη διατομή F_{an} απ' τη σχέση:

$$F_{an} \geq 1,5 \frac{Q_{max}}{\tau_{en}} \quad \text{για ορθογωνική διατομή}$$

$$\eta \quad \frac{b \cdot J_x}{S_x} \geq \frac{Q_{max}}{\tau_{en}} \quad \text{για χαλύβδ. ελάσματα (δοκιμαστικά).}$$

Βέβαια και οι δύο περιπτώσεις επανιώντα οδηγούν στην εκλογή της διατομής, γιατί εκεί, τον πρώτο λόγο έχει η κάμψη.

3. Φορτοϊκανότητα

Το ίδιο σπάνια με την εκλογή της διατομής, οδηγεί στον καθορισμό της Q_{max} η σχέση:

$$Q_{max} \leq \frac{2}{3} F \cdot \tau_{en} \quad \text{για ορθογωνική διατομή}$$

$$\eta \quad Q_{max} \leq \frac{J_x \cdot b \cdot \tau_{en}}{S_x} \quad \text{για χαλύβδινα ελάσματα.}$$

γ. Παρατηρήσεις

Από όσα ως τώρα αναφέρθηκαν για την κάμψη, προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι τάσεις θλίψεως και εφελκυσμού που αναπτύσσονται και παίζουν πρωτεύοντα ρόλο, είναι ανάλογες των αποστάσεων τους απ' την ουδέτερη γραμμή, με μέγιστες τιμές στις ακρότατες ίνες. Αν επομένως το υλικό έχει την ίδια αντοχή σε εφελκυσμό και θλίψη, είναι λογικό οι διατομές να εκλέγονται έτσι, ώστε το κεντροειδές τους να βρίσκεται στο μέσον του ύψους των.

Τον όρο αυτό πληρούν π.χ. οι διατομές I, Γ, Z των χαλύβδινων ελασμάτων, που έχουν το μεγαλύτερο μέρος του υλικού τους συγκεντρωμένο στα πέλματα, ώστε να έχουν μεγαλύτερη ροπή αδράνειας J_x , δηλαδή μικρότερες τιμές στις ακρότατες τάσεις και τελικά οικονομικότερη και καλύτερη εκμετάλλευση του υλικού.

Αν η διατομή δεν είναι συμμετρική ως προς την ουδέτερη

υλικού της δοκού εκλέγεται η απαιτούμενη διατομή F_{an} απ' τη σχέση:

$$F_{an} \geq 1,5 \frac{Q_{max}}{\tau_{en}} \quad \text{για ορθογωνική διατομή}$$

$$\eta \quad \frac{b \cdot J_x}{S_x} \geq \frac{Q_{max}}{\tau_{en}} \quad \text{για χαλύβδ. ελάσματα (δοκιμαστικά).}$$

Βέβαια και οι δύο περιπτώσεις επανιώςτα οδηγούν στην εκλογή της διατομής, γιατί εκεί, τον πρώτο λόγο έχει η κάμψη.

3. Φορτοϊκανότητα

Το ίδιο επάνια με την εκλογή της διατομής, οδηγεί στον καθορισμό της Q_{max} η σχέση:

$$Q_{max} \leq \frac{2}{3} F \cdot \tau_{en} \quad \text{για ορθογωνική διατομή}$$

$$\eta \quad Q_{max} \leq \frac{J_x \cdot b \cdot \tau_{en}}{S_x} \quad \text{για χαλύβδινα ελάσματα.}$$

γ. Παρατηρήσεις

Από όλα ως τώρα αναφέρθηκαν για την κάμψη, προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι τάσεις θλίψεως και εφελκυσμού που αναπτύσσονται και παίζουν πρωτεύοντα ρόλο, είναι ανάλογες των αποστάσεων τους απ' την ουδέτερη γραμμή, με μέγιστες τιμές στις ακρότατες ίνες. Άν επομένως το υλικό έχει την ίδια αντοχή σε εφελκυσμό και θλίψη, είναι λογικό οι διατομές να εκλέγονται έτσι, ώστε το κεντροειδές τους να βρίσκεται στο μέσον του ύψους των.

Τον όρο αυτό πληρούν π.χ. οι διατομές I, Γ, Z των χαλύβδινων ελασμάτων, που έχουν το μεγαλύτερο μέρος του υλικού τους συγκεντρωμένο στα πέλματα, ώστε να έχουν μεγαλύτερη ροπή αδράνειας J_x , δηλαδή μικρότερες τιμές στις ακρότατες τάσεις και τελικά οικονομικότερη και καλύτερη εκμετάλλευση του υλικού.

Άν η διατομή δεν είναι συμμετρική ως προς την ουδέτερη

γραμμή, όπως π.χ. συμβαίνει στις ειδηροτροχιές, τότε το υλικό τους ανάμεσα στην κεφαλή και στη βάση κατανέμεται έτσι, ώστε το κεντροειδές της διατομής να βρίσκεται στο μέσον του ύψους.

Για υλικά που έχουν μικρή αντοχή σε εφελκυσμό και μεγάλη σε θλίψη, όπως π.χ. συμβαίνει με το χυτοσίδηρο ή το εκυρόδεμα, η διατομή των δοκών τους είναι λογικό να είναι ασύμμετρη ως προς την ουδέτερη γραμμή, με αποστάσεις μάλιστα των ακροτάτων ινών πάνω και κάτω ανάλογες προς τις επιτρεπόμενες τάσεις του υλικού σε εφελκυσμό και θλίψη αντίστοιχα, και έτσι η αντοχή της δοκού γίνεται η ίδια.

Π.χ. σε μια διατομή σχήματος T , με κατάλληλη διαστασιοποίηση στο πέλμα και τον κορμό, το κεντροειδές της μπορεί να τοποθετηθεί σ' οποιαδήποτε θέση του άξονα συμμετρίας της.

δ. Παραδείγματα.

1. Πρόχειρο φράγμα είναι κατασκευασμένο από οριζόντιες σανίδες που στηρίζονται σε κατακόρυφους ξύλινους στύλους πακτωμένους στο έδαφος. Οι στύλοι είναι τετραγωνικής διατομής και κατανέμονται σε ίσες αποστάσεις των 80 cm , ενώ η μέγιστη στάθμη του νερού είναι 2 m (βλ. 70).

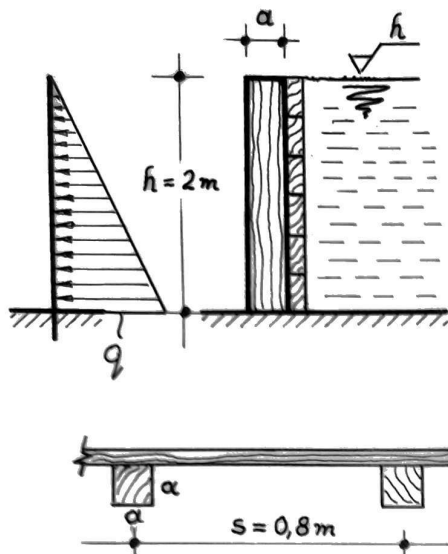
Αν $\beta_{\text{ελ}} = 80\text{ kg/cm}^2$ και $\tau_{\text{ελ}} = 10\text{ kg/cm}^2$, να καθοριστεί η ελάχιστη απαιτούμενη διάσταση a της διατομής του στύλου.

Λύση.

Αν $\gamma = 1\text{ t/m}^3$ το ειδικό βάρος του νερού, απ' τα δεδομένα του προβλήματος και τη διαστασιοποίηση του σχήματος, προκύπτει ότι κάθε στύλος φορτίζεται με τριγωνικό φορτίο έντασης:

$$q = \gamma \cdot h \cdot s = 1 \cdot 2 \cdot 0,8 = 1,6\text{ t/m}.$$

Επομένως η μέγιστη καμπτική ροπή M_{max} του στύλου, που εμφανίζεται στο σημείο πάκτωσης, είναι:



Σχ. 70

$$M_{\max} = \frac{q \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{1,6 \cdot 2^2}{6} = 1,06667 \text{ tm.}$$

Γιά την δοσμένη διατομή, η απαιτούμενη ροπή αντίστασης W_{an} , είναι:

$$W_{an} = \frac{bh^2}{6} = \frac{a^3}{6}$$

Για τον έλεγχο σε κάμψη, θα πρέπει:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{an}} \leq \sigma_{\text{ελ}} \Rightarrow$$

$$\frac{1,06667 \cdot 10^5 \cdot 6}{a^3} \leq 80$$

$$\text{ή } a \geq \sqrt[3]{\frac{106.667 \cdot 6}{80}} = 19,99 \text{ cm.}$$

Εξ' αλλού, η μέγιστη τέμνουσα δύναμη $Q_{\max}$ που εμφανίζεται στην πύκνωση, είναι:

$$Q_{\max} = \frac{1}{2} q \cdot h = \frac{1,6 \cdot 2}{2} = 1,6 \text{ t.}$$

Για τον έλεγχο επομένως σε διάτμηση θα πρέπει να είναι:

$$\tau_{\max} = 1,5 \frac{Q_{\max}}{F_{an}} \leq \tau_{\text{ελ}}, \quad \text{ή } F_{an} \geq \frac{1,5 Q_{\max}}{\tau_{\text{ελ}}}$$

$$\text{Άρα: } a^2 \geq \frac{1,5 \cdot 1600}{10} = 240 \quad \text{και } a \geq 15,5 \text{ cm.}$$

Απ' τις τιμές του a που προέκυψαν στους δύο ελέγχους εκλέγεται η μεγαλύτερη $a = 20 \text{ cm}$, που εξασφαλίζει για τις ορθές και διατμητικές τάσεις, τιμές μικρότερες απ' τις επιτρεπόμενες.

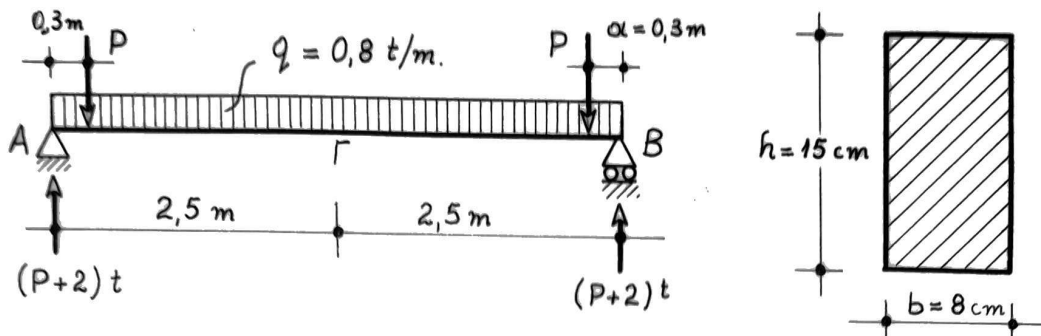
2. Η αμφιέρειστη δοκός του σχ. 71 είναι από χάλυβα, ορθογωνικής διατομής και φέρει ομοιόμορφο φορτίο $q = 0,8 \text{ t/m}$.

Αν $\sigma_{\text{ελ}} = 1400 \text{ kg/cm}^2$ και $\tau_{\text{ελ}} = 800 \text{ kg/cm}^2$, να προσδιοριστούν:

- 1) Η μέγιστη τιμή των ίσων φορτίων P που πρέπει να τοποθετηθούν στις ίσες αποστάσεις $a = 30 \text{ cm}$ απ' τις στηρίξεις, και
- 2) Η μέγιστη απόσταση a , ώστε ο προσδιορισμός της $P_{\max}$

να γίνεται αποκλειστικά απ' τον έλεγχο σε διάτμηση.

Λύση



Σχ. 71

1. Ο καθορισμός της $P_{\max}$ θα προκύψει απ' τον έλεγχο σε κάμψη και διάτμηση.

Οι αντιδράσεις της δοκού, λόγω συμμετρίας, είναι:

$$A = B = P + \frac{q \cdot l}{2} = P + \frac{0,8 \cdot 5}{2} = (P+2) \text{ t} = (P+2) \cdot 1000 \text{ kg.}$$

Η κατασκευή των διαγραμμάτων Q και M περιττεύει εδώ, γιατί οι μέγιστες τιμές της τέμνουσας δύναμης $Q_{\max}$ και της καμπτικής ροπής $M_{\max}$, εμφανίζονται στις προφανείς διατομές της στήριξης και του μέσου Γ της δοκού αντίστοιχα, και είναι:

$$Q_{\max} = Q_A^{\delta\epsilon\zeta} = A = (P+2) \cdot 1000 \text{ kg, ανεξάρτητη του } \alpha = 0,3 \text{ m.}$$

$$M_{\max} = M_{\Gamma} = (P+2)2,5 - P \cdot 2,2 - 0,8 \cdot 2,5 \cdot 1,25 = (0,3P + 2,5) \text{ tm,}$$

$$\text{ή πιο απλά: } M_{\max} = P \cdot \alpha + \frac{q \cdot l^2}{8} = P \cdot 0,3 + \frac{0,8 \cdot 5^2}{8} = (0,3P + 2,5) \text{ tm} \\ = (0,3P + 2,5) \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{cm.}$$

Η ροπή αντίστασης και το εμβαδόν της διατομής είναι αντίστοιχα:

$$W_{\text{υη}} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{8 \cdot 15^2}{6} = 300 \text{ cm}^3,$$

$$F_{\text{υη}} = b \cdot h = 8 \cdot 15 = 120 \text{ cm}^2.$$

Έλεγχος σε κάμψη

$$\text{Είναι: } \sigma_{\text{υη}\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\text{υη}}} \leq \sigma_{\text{ελ}} \Rightarrow M_{\max} \leq W_{\text{υη}} \cdot \sigma_{\text{ελ}}$$

$$\text{Άρα: } (0,3P + 2,5) \cdot 10^5 \leq 300 \cdot 1400 \Rightarrow 0,3P + 2,5 \leq 4,2$$

$$\Rightarrow 0,3P \leq 1,7 \quad \text{και} \quad \underline{P \leq 5,667 \text{ t.}}$$

Έλεγχος σε διάτμηση

$$\text{Είναι: } \tau_{\text{υη max}} = 1,5 \frac{Q_{\text{max}}}{F_{\text{υη}}} \leq \tau_{\text{ελ}} \Rightarrow Q_{\text{max}} \leq \frac{F_{\text{υη}} \cdot \tau_{\text{ελ}}}{1,5}$$

$$\text{Άρα: } (P + 2) \cdot 1000 \leq \frac{120 \cdot 800}{1,5} \Rightarrow P + 2 \leq 64 \quad \text{και} \quad \underline{P \leq 62 \text{ t.}}$$

Συνεπώς εκλέγεται $P_{\text{max}} = 5.667 \text{ kg}$ γιατί ικανοποιεί και του δύο ελέγχους.

2. Για να γίνεται ο προσδιορισμός της P_{max} αποκλειστικά απ' τον διατμητικό έλεγχο, θα πρέπει η τιμή του α να είναι τέτοια, που ο καμπτικός έλεγχος να ισχύει για $P = 62 \text{ t}$. Άρα:

$$(\alpha \cdot 62 + 2,5) \cdot 10^5 \leq 300 \cdot 1400 \Rightarrow 62\alpha + 2,5 \leq 4,2$$

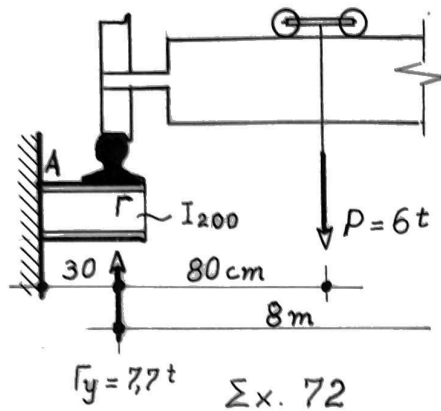
$$62\alpha \leq 1,7 \quad \text{και} \quad \alpha \leq 0,0274 \text{ m} \quad \text{ή} \quad \underline{\alpha \leq 2,74 \text{ cm}}$$

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει αρκετά εύγλωτα το πόσο κοντά στη στήριξη πρέπει να είναι ένα τόσο μεγάλο συγκεντρωμένο φορτίο, ώστε ο έλεγχος σε διάτμηση να παίζει τον αποφασιστικό ρόλο στην εκλογή του φορτίου ή της διατομής.

3. Γερανογέφυρα μήκους 8 m κινείται πάνω σε βιοηροτροχιά που στηρίζεται σε πρόβολο μικρού μήκους από υγίκορμη δοκό I_{200} . Το ίδιο βάρος της γερανογέφυρας είναι 3 t , ενώ το ωφέλιμο φορτίο της $P = 6 \text{ t}$, βρίσκεται στη δυσμενή θέση που φαίνεται στο σχήμα 72. Απ' το ίδιο βάρος της βιοηροτροχιάς μεταβιβάζεται στον πρόβολο φορτίο 800 kg .

Αν $\sigma_{\text{ελ}} = 1400 \text{ kg/cm}^2$ και $\tau_{\text{ελ}} = 800 \text{ kg/cm}^2$, ζητείται να γίνει ο στατικός έλεγχος αντοχής του προβόλου (έλεγχος τάσεων), και σε περίπτωση μή επάρκειας της διατομής, να προταθεί νέα.

Λύση.



Η συνολική δύναμη Γ_y που ενεργεί στο σημείο Γ, όπου η βιδωροτροχιά στηρίζεται στον πρόβολο, είναι το άθροισμα των παρακάτω επί μέρους δυνάμεων:

α) Του ίδιου βάρους της βιδωροτροχιάς: $\Sigma = 800 \text{ kg}$.

β) Του ίδιου βάρους της γερανογέφυρας: $\Gamma = 3.000 / 2 = 1.500 \text{ kg}$, και

γ) Του μέρους του ωφέλιμου φορτίου που προκύπτει απ τη δοσμένη δυσμενή θέση: $\Phi = 6.000 \frac{8 - 0,80}{8} = 5.400 \text{ kg}$.

Άρα: $\Gamma_y = \Sigma + \Gamma + \Phi = 800 + 1.500 + 5.400 = 7.700 \text{ kg}$

Η μέγιστη καμπτική ροπή, που εμφανίζεται στη διατομή Α (στήριξη του προβόλου), είναι:

$$M_{\max} = 7.700 \cdot 30 = 231.000 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

Εξ άλλου, αμελώντας το ίδιο βάρος του προβόλου, η μέγιστη τέμνουσα, που εμφανίζεται στη στήριξη Α, ιεούται προς Γ_y , δηλαδή:

$$Q_{\max} = 7.700 \text{ kg}.$$

Απ' τους πίνακες χαλύβδινων ελασμάτων για υγίκορμο I_{200} , είναι:

Ροπή αδράνειας: $J_x = 2.140 \text{ cm}^4$

-II- αντίστασης: $W_x = 214 \text{ cm}^3$

Στατική ροπή: $S_x = 125 \text{ cm}^3$

Πάχος κορμού: $b = 7,5 \text{ mm} = 0,75 \text{ cm}$.

Επομένως είναι:

$$\sigma_{\text{υπ}\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{231.000}{214} = 1.079,44 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{\text{ελ}} = 1.400 \text{ kg/cm}^2$$

και $\tau_{\text{υπ}\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{b \cdot J_x} = \frac{7.700 \cdot 125}{0,75 \cdot 2.140} = 599,69 \text{ kg/cm}^2 < \tau_{\text{ελ}} = 800 \text{ kg/cm}^2$

6. Οι παραμορφώσεις.

Όταν γενικά κατασκευάζουμε μια δοκό, δεν αρκεί μόνο να ξέρουμε ότι οι τιμές των τάσεων που θ' αναπτυχθούν στο υλικό της είναι μικρότερες ή ίσες προς τις επιτρεπόμενες.

Σε πολλές περιπτώσεις είναι ανάγκη να ξέρουμε καλὰ και το μέγεθος των αναπόφευκτων ελαστικών παραμορφώσεων που θα προκληθούν απ' τα εξωτερικά φορτία, δεδομένου ότι για αισθητικούς, λειτουργικούς ή πρακτικούς λόγους επιβάλλεται, οι παραμορφώσεις να μη ξεπερνούν ορισμένα ανεκτά όρια.

Έτσι προέκυψε η ανάγκη να μελετηθούν οι νόμοι παραμόρφωσης μίας δοκού και ειδικώτερα να προσδιοριστεί ακριβώς το σχήμα της ελαστικής γραμμής, δηλαδή του καμπύλου άξονα της δοκού μετά την κάμψη.

Για τον υπολογισμό των καμπτικών παραμορφώσεων, προϋποτίθεται ότι η ράβδος έχει:

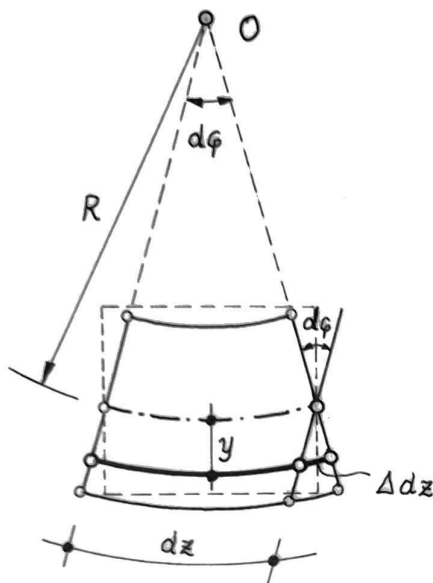
- α) αρχικά ευθύγραμμο άξονα
- β) διατομή με σταθερή (τουλάχιστον κατά τμήματα) ροπή αδράνειας
- γ) σταθερό μέτρο ελαστικότητας E και γενικά να ισχύουν οι βασικές προϋποθέσεις της κάμψης που αναφέρθηκαν στη βελ. 117.

Μετά την καμπτική παραμόρφωση, ο άξονας της δοκού, λόγω επιμήκυνσης των κάτω ινών και επιβράχυνσης των πάνω, καμπνύονται, στρέφοντας τα κοίλα προς τα πάνω.

Στοιχειώδες τμήμα της δοκού μήκους dz , 6×73 , που αρχικά ήταν πρίσμα ορθογωνικό, παρουσιάζεται μετά την παραμόρφωση με τις ακραίες του διατομές επίπεδες, λόγω της αρχής Bernoulli, αλλά και συγκλίνουσες, σχηματίζοντας ^{μεταξύ τους} σχετική γωνία $d\varphi$, με ίχνος το O , που είναι το κέντρο καμπυλότητας.

Αντίστοιχο σχήμα γνωρίσαμε ήδη στην παράγραφο των ορθών τάσεων (βλ. 67β, βελ. 118).

Με δέγρεις λοιπόν ανάλογες με κείνες που κάναμε για τις ορθές τάσεις, αν απ' το κεντροειδές της δεξιάς διατομής φέρουμε επίπεδο παράλληλο προς την αριστερή, βλέπουμε ότι τυχαία ίνα σε απόσταση y απ' την ουδέτερη γραμμή, επιμηκύνεται κατά Δdz . Με τους συμβολισμούς του σχήματος, είναι:



Σχ. 73

$$dz = R \cdot d\phi \quad \text{και} \quad \Delta dz = y d\phi \quad (29)$$

$$\text{Άρα: } \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{y d\phi}{R d\phi} = \frac{y}{R} \quad (30)$$

Ισχύοντος όμως του νόμου Hooke, είναι:

$$\frac{\Delta dz}{dz} = \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\frac{M}{J} \cdot y}{E} = \frac{My}{EJ} \quad (31)$$

και συνεπώς:

$$\frac{y}{R} = \frac{My}{EJ} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{R} = \frac{M}{EJ} \quad (32)$$

Στην περίπτωση της καθαρής κάμψης, όπου η ροπή M είναι

σταθερή, η σχέση (32) δείχνει φανερά ότι η ελαστική γραμμή είναι κυκλικό τόξο με ακτίνα:

$$R = \frac{EJ}{M}.$$

Απ' την πρώτη των σχέσεων (29), σε συνδυασμό με την (32), προκύπτει:

$$d\phi = \frac{1}{R} dz = \frac{M}{EJ} dz. \quad (33)$$

Η ολοκλήρωση της (33) β' όλο το μήκος l της δοκού δίνει τη σχετική γωνία στρώσης των ακραίων διατομών:

$$\phi = \int_0^l \frac{M}{EJ} dz = \frac{M}{EJ} \int_0^l dz = \frac{M}{EJ} \cdot l \quad (\text{rad}) \quad (34)$$

Η ποσότητα EJ/l , σε αντιστοιχία προς την ποσότητα GJ_p/l που γνωρίσαμε ήδη στη στρέψη, ονομάζεται **δυσ-**

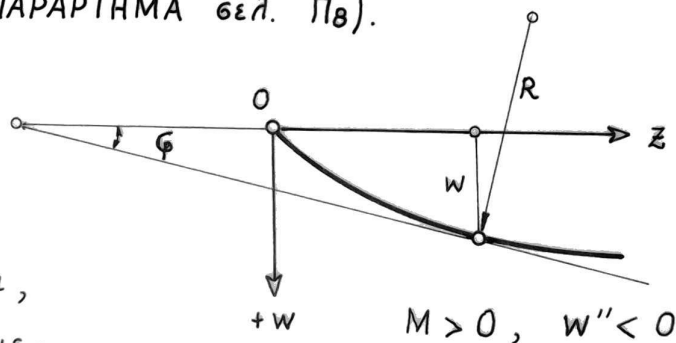
καμυγία της ράβδου και παριστάνει την καμπτική ροπή που χρειάζεται η ράβδος, για να στραφούν οι ακραίες διατομές της κατά μοναδιαία γωνία στρώσης.

Στην περίπτωση της γενικής κάμψης, όπου με τη μεταβαλλόμενη καμπτική ροπή M εμφανίζεται και τέμνουσα δύναμη Q , η σχέση (32) εξακολουθεί να ισχύει, γιατί η επίδραση της Q στην παραμόρφωση της δοκού είναι αμελητέα.

Όμως η καμπυλότητα $1/R$ αλλάζει με τη μεταβολή της M , με αποτέλεσμα η ελαστική γραμμή να μην είναι κύκλος, αλλά καμπύλη.

Για τον καθορισμό της εξίσωσης της ελαστικής γραμμής, $w = f(z)$, χρησιμοποιούμε γνωστό τύπο της διαφορικής γεωμετρίας, που εκφράζει την καμπυλότητα $1/R$ τυχόντος σημείου της καμπύλης, συνάρτησε της w' και w'' . (Η απόδειξη υπάρχει στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ βελ. Πβ).

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{w''}{\sqrt{(1+w'^2)^3}}$$



Σχ. 74

Στην παραπάνω σχέση, w είναι η κατακόρυφη μετατόπιση (θετική προς τα κάτω) σημείου του άξονα

της ράβδου, που στα επόμενα θα την ονομάζουμε βέλος κάμψης του σημείου. Ο όρος:

$$w'^2 = \varepsilon \varphi^2 \varphi \approx \varphi^2,$$

λόγω πολύ μικρών τιμών της γωνίας φ αμελείται σε σχέση με τη μονάδα στην υπόριζη ποσότητα, οπότε τελικά είναι:

$$\frac{1}{R} = \pm w'' \quad (35)$$

Απαλείφοντας το $1/R$ μεταξύ των (32) και (35), προκύπτει:

$$w'' = \pm \frac{M}{EJ} \quad \text{ή} \quad \frac{d^2 w}{dz^2} = \pm \frac{M}{EJ} \quad (36)$$

Η σχέση (36) είναι η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής της δοκού.

Απ τα δύο πρόσημα που εμφανίζονται στη σχέση (36) εκλέγεται το αρνητικό (-), γιατί το σύστημα των συντεταγμένων xOw έχει εκλεγεί έτσι, ώστε οι προς τα κάτω υποχωρήσεις της δοκού να λαμβάνονται θετικές. Αν λοιπόν η καμπύλη του άξονα στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (βλ. 74), τότε η καμπτική ροπή M είναι +, ενώ η w'' είναι -, γιατί στρέφει τα κοίλα στην αντίθετη διεύθυνση της θετικής φοράς του άξονα w .

Όποτε λοιπόν τα μεγέθη M και w'' είναι πάντα ετερόσημα, και επομένως η σχέση (36) γράφεται τελικά:

$$EJ w'' = -M \quad (37)$$

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι στα διαγράμματα καμπτικών ροπών $[M]$, οι θετικές ροπές λαμβάνονται προς τα κάτω, για να συμφωνούν στη μορφή οι καμπύλες: του διαγράμματος ροπών, και της ελαστικής γραμμής.

Γιά να βρούμε τώρα την εξίσωση της ελαστικής γραμμής $w = f(z)$, πρέπει, αφού πρώτα εκφράσουμε στο κάθε τμήμα της δοκού χωριστά τη ροπή M συναρτήσει της απόστασης z από το άκρο της, να ολοκληρώσουμε τη διαφορική εξίσωση (37) δύο φορές. Έτσι παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$EJ w' = - \int M dz + C_1 \quad (38)$$

$$\text{και :} \quad EJ \cdot w = \int (- \int M dz + C_1) dz + C_2. \quad (39)$$

Οι σταθερές C_1 και C_2 προσδιορίζονται απ' τις λεγόμενες οριακές συνθήκες, που ποικίλουν, ανάλογα με τον τρόπο στη-

ριξης και φόρτισης του φορέα.

Η εξίσωση (39) είναι η ζητούμενη εξίσωση της ελαστικής γραμμής και παριστάνει τις μεταβολές των βελών κάμψης f κατά μήκος της δοκού.

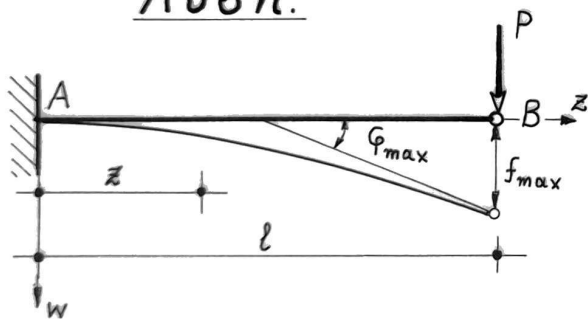
Η εξίσωση (38), που ονομάζεται και εξίσωση των κλίσεων, εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης της ελαστικής γραμμής σε κάθε σημείο της.

Και επειδή $w' = \epsilon\phi \approx \phi$, η (38) εκφράζει ακόμη και τη στροφή που έπαθε κάθε διατομή στη διάρκεια της κάμψης.

Παραδείγματα.

1. Σε πρόβολο που φέρει στο ελεύθερο άκρο του φορτίο P , ζητείται η εξίσωση της ελαστικής γραμμής (Ε.Γ.), η μέγιστη κλίση της και το μέγιστο βέλος κάμψης.

Λύση.



Σχ. 75

Η καμπτική ροπή σε διατομή που απέχει απόσταση z απ' την πάκτωση, είναι:

$$M = -P(l-z)$$

Άρα η (37) γράφεται:

$$EJw'' = P(l-z)$$

Η πρώτη ολοκλήρωση αυτής, δίνει:

$$EJw' = \int P(l-z) dz + C_1 = Plz - P\frac{z^2}{2} + C_1 \quad (40)$$

Η δεύτερη ολοκλήρωση, δίνει:

$$EJw = \int (Plz - P\frac{z^2}{2} + C_1) dz + C_2 = Pl\frac{z^2}{2} - P\frac{z^3}{6} + C_1z + C_2 \quad (41)$$

Οι σταθερές C_1 και C_2 θα προσδιοριστούν απ' τις οριακές συνθή-

κες, που εδώ είναι οι παρακάτω:

1) Για $z=0$ θα είναι $w=0$, γιατί στην πάκτωση είναι αδύνατο να υπάρξει κατακόρυφη μετακίνηση του άξονα της δοκού. Έτσι, η (41) δίνει:

$$0 = 0 - 0 + 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

2) Για $z=0$ θα είναι και $w'=0$, γιατί στην πάκτωση είναι αδύνατο να υπάρξει στροφή του άξονα της δοκού και η εφαπτομένη παραμένει οριζόντια. Έτσι, η (40) δίνει τώρα:

$$0 = 0 - 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0,$$

και επομένως οι σχέσεις (40) και (41) γράφονται αντίστοιχα:

$$EJw' = Plz - P\frac{z^2}{2} \quad (40')$$

$$EJw = Pl\frac{z^2}{2} - P\frac{z^3}{6} \quad (41')$$

Η εξίσωση (41') είναι η ζητούμενη εξίσωση της ελαστικής γραμμής.

Η μέγιστη κλίση της, προκύπτει απ' την (40'), για $z=l$:

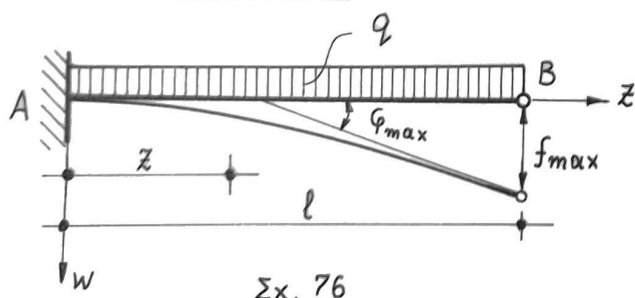
$$EJw' = Pl^2 - \frac{Pl^2}{2} = \frac{Pl^2}{2} \Rightarrow w' = \epsilon\phi\phi \simeq \phi = \phi_{\max} = \frac{Pl^2}{2EJ}.$$

Το μέγιστο βέλος κάμψης, προκύπτει απ' την (41'), για $z=l$:

$$EJw = \frac{Pl^3}{2} - \frac{Pl^3}{6} = \frac{Pl^3}{3} \Rightarrow w = f = f_{\max} = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

2. Στον πρόβολο του σχήματος που φορτίζεται με ομοιόμορφη φόρτιση q , ζητούνται η εξίσωση της Ε.Γ., η $\phi_{\max}$ και το $f_{\max}$.

Λύση.



Με βέγεις ανάλογες με κείνες στο προηγούμενο παράδειγμα, παίρνουμε διαδοχικά:

$$M = -q \frac{(l-z)^2}{2}.$$

Άρα:
$$EJw'' = q \cdot \frac{(l-x)^2}{2} = \frac{q}{2}(l^2 - 2lx + x^2)$$

και
$$EJw' = \int \frac{q}{2}(l^2 - 2lx + x^2)dx + C_1 = \frac{ql^2}{2}x - ql\frac{x^2}{2} + q\frac{x^3}{6} + C_1, \quad (42)$$

ενώ:
$$EJw = \int EJw'dx + C_2 = ql^2\frac{x^2}{4} - ql\frac{x^3}{6} + \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2 \quad (43)$$

Οριακές συνθήκες:

1) Για $x=0 \Rightarrow w=0$, άρα $C_2=0$,

2) Για $x=0 \Rightarrow w'=0$, άρα $C_1=0$, οπότε:

$$EJw' = \frac{ql^2}{2}x - \frac{ql}{2}x^2 + \frac{q}{6}x^3 \quad (42')$$

$$EJw = \frac{ql^2}{4}x^2 - \frac{ql}{6}x^3 + \frac{q}{24}x^4 \quad (43')$$

Χαρακτηριστικό είναι ότι οι εξισώσεις (42') και (43'), (όπως και οι (40') και (41')), είναι ομογενείς. Κάθε όρος της εξίσωσης των κλίσεων εκφράζει δύναμη $\times$ μήκος², ενώ κάθε όρος της εξίσωσης της ελαστικής γραμμής εκφράζει δύναμη $\times$ μήκος³.

Από τις (42') και (43'), για $x=l$, παίρνουμε αντίστοιχα:

$$w'_{\max} = \varphi_{\max} = \frac{ql^3}{6EJ} \quad \text{και}$$

$$w_{\max} = f_{\max} = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

7. Οι παραμορφώσεις με τη μέθοδο της επιφανειακής ροπής.

Γιά τον καθορισμό της ελαστικής γραμμής με την τακτική που περιγράφηκε πριν, είναι δυνατόν, σε ορισμένες περιπτώσεις, να οδηγηθούμε σε κουραστικούς και δύσκολους μαθηματικούς υπολογισμούς.

Τότε μπορούμε να καταφύγουμε στη μέθοδο που θα περιγράψουμε παρακάτω, γνωστή και σαν μέθοδο της επιφανειακής ροπής, που παρουσιάστηκε για πρώτη

Άρα:
$$EJw'' = q \cdot \frac{(l-x)^2}{2} = \frac{q}{2}(l^2 - 2lx + x^2)$$

και
$$EJw' = \int \frac{q}{2}(l^2 - 2lx + x^2)dx + C_1 = \frac{ql^2}{2}x - ql\frac{x^2}{2} + q\frac{x^3}{6} + C_1, \quad (42)$$

ενώ:
$$EJw = \int EJw'dx + C_2 = ql^2\frac{x^2}{4} - ql\frac{x^3}{6} + \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2 \quad (43)$$

Οριακές συνθήκες:

1) Για $x=0 \Rightarrow w=0$, άρα $C_2=0$,

2) Για $x=0 \Rightarrow w'=0$, άρα $C_1=0$, οπότε:

$$EJw' = \frac{ql^2}{2}x - \frac{ql}{2}x^2 + \frac{q}{6}x^3 \quad (42')$$

$$EJw = \frac{ql^2}{4}x^2 - \frac{ql}{6}x^3 + \frac{q}{24}x^4 \quad (43')$$

Χαρακτηριστικό είναι ότι οι εξισώσεις (42') και (43'), (όπως και οι (40') και (41')), είναι ομογενείς. Κάθε όρος της εξίσωσης των κλίσεων εκφράζει δύναμη $\times$ μήκος², ενώ κάθε όρος της εξίσωσης της ελαστικής γραμμής εκφράζει δύναμη $\times$ μήκος³.

Από τις (42') και (43'), για $x=l$, παίρνουμε αντίστοιχα:

$$w'_{\max} = \varphi_{\max} = \frac{ql^3}{6EJ} \quad \text{και}$$

$$w_{\max} = f_{\max} = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

7. Οι παραμορφώσεις με τη μέθοδο της επιφανειακής ροπής.

Για τον καθορισμό της ελαστικής γραμμής με την τακτική που περιγράφηκε πριν, είναι δυνατόν, σε ορισμένες περιπτώσεις, να οδηγηθούμε σε κουραστικούς και δύσκολους μαθηματικούς υπολογισμούς.

Τότε μπορούμε να καταφύγουμε στη μέθοδο που θα περιγράψουμε παρακάτω, γνωστή και σαν μέθοδο της επιφανειακής ροπής, που παρουσιάστηκε για πρώτη

φορά απ' τον Γάλλο De Saint - Venan και αργότερα αναπτύχθηκε πλήρως απ' τον Γερμανό O. Mohr και τον Αμερικανό Charles E. Greene το 1873.

Το γενικό σκεπτικό στο οποίο στηρίζεται η παραπάνω μέθοδος είναι ότι αν δοθεί μία δοκός, είναι δυνατό να εκλεγεί κατάλληλα μία *ιδεατή* δοκός ίσου μήκους που θα φορτίζεται με "κατάλληλα" φορτία. Τότε τα διαγράμματα τέμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών της ιδεατής δοκού εκφράζουν αντίστοιχα τις κλίσεις και υποχωρήσεις της πραγματικής δοκού που δόθηκε αρχικά.

Ο όρος "ιδεατή" χρησιμοποιείται εδώ για να εκφράσει και μία ιδιομορφία στον τρόπο στήριξης της νέας δοκού, η οποία κατά τα άλλα παρουσιάζει τις ίδιες ιδιότητες με την πραγματική.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν μία ιδεατή δοκό i , η οποία κατά τον άξονά της z φορτίζεται με ιδεατό φορτίο q_i .

Τότε θα εμφανιστούν στις διατομές της, τέμνουσες δυνάμεις Q_i και καμπτικές ροπές M_i που θα ικανοποιούν τις γνωστές βασικές σχέσεις (7) και (6) της βελ. 94:

$$\frac{dM_i}{dz} = Q_i \quad (44)$$

$$\text{και} \quad \frac{dQ_i}{dz} = -q_i \quad \text{ή} \quad \frac{d^2M_i}{dz^2} = -q_i \quad (45)$$

Αν τώρα θεωρήσουμε μία πραγματική δοκό με φορτίο q , θα εμφανιστούν πάλι τα μεγέθη Q και M , που θα συνδεύονται με υποχωρήσεις w τέτοιες, ώστε να είναι:

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{M}{EJ} \quad (46)$$

Παρατηρούμε ότι, αν για την ιδεατή δοκό διαλέξουμε σαν "κατάλληλο" φορτίο το:

$$q_i = \frac{M}{EJ},$$

που είναι ουδριαδικά το διάγραμμα M της πραγματικής δοκού, του οποίου οι τεταγμένες έχουν διαιρεθεί διά του σταθερού μέτρου δυσκαμψίας EJ , η σχέση (45) θα δώσει:

$$\frac{d^2 M_i}{dz^2} = -q_i = -\frac{M}{EJ}, \quad (47)$$

ή λόγω της (46), θα είναι:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{M}{EJ} = \frac{d^2 M_i}{dz^2}.$$

$$\text{Άρα:} \quad w = M_i \quad (48)$$

$$\text{και συνεπώς:} \quad \frac{dw}{dz} = w' = Q_i \quad (49)$$

Εφ' όσον λοιπόν η ιδεατή δοκός φορτισθεί με φορτίο $q_i = M/EJ$ οι σχέσεις (48) και (49) δικαιολογούν απόλυτα το γενικό σκεπτικό της μεθόδου που αναφέρθηκε αρχικά, ότι δηλαδή στις υποχωρήσεις w της πραγματικής δοκού αντιστοιχούν οι καμπτικές ροπές M_i της ιδεατής δοκού και στις κλίσεις w' της ελ. γραμμής της πραγματικής δοκού οι τέμνουσες δυνάμεις Q_i της ιδεατής.

Όμως η ιδεατή δοκός θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να πληρούνται επί πλέον και οι οριακές συνθήκες, που ισχύουν για τις υποχωρήσεις και τις κλίσεις της πραγματικής δοκού· και εδώ είναι που εμφανίζει την ιδιομορφία της στον τρόπο στήριξης η ιδεατή δοκός.

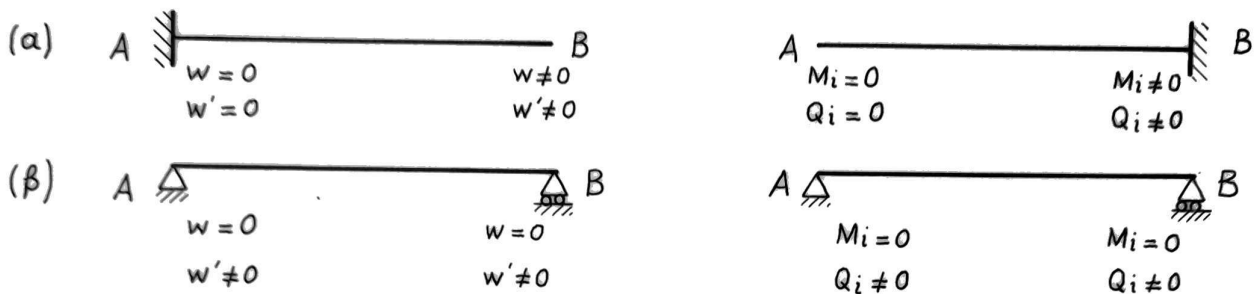
Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω,

1. σε σημείο πάκτωσης της πραγματικής δοκού, όπου είναι $w=0$ και $w'=0$, θα πρέπει η ιδεατή δοκός να έχει ελεύθερο άκρο, γιατί μόνον τότε θα είναι $M_i=0$ και $Q_i=0$. (Η περίπτωση συγκεντρωμένου φορτίου P_i αποκλείεται, αφού το q_i αντιστοιχεί μόνο στο διάγραμμα M/EJ , που

σαν φόρτιση είναι συνεχής).

2. Σε ελεύθερο άκρο της πραγματικής δοκού, όπου είναι $w \neq 0$ και $w' \neq 0$, θα πρέπει η ιδεατή δοκός να έχει πάκτωση, γιατί μόνο τότε θα είναι $M_i \neq 0$ και $Q_i \neq 0$.

Οριακές συνθήκες
πραγματικής και ιδεατής
δοκού.



Σχ 77

3. Σε σημείο απλής εστήριξης της δοκού με άρθρωση ή κύλιση, όπου είναι $w=0$ και $w' \neq 0$, θα πρέπει η ιδεατή δοκός να έχει πάλι απλή εστήριξη, γιατί μόνο τότε θα είναι $M_i=0$ και $Q_i \neq 0$.

Ότε λοιπόν, αν η πραγματική δοκός είναι:

α) πρόβολος AB με πάκτωση στο A , τότε και η ιδεατή δοκός θα είναι πρόβολος αλλά με πάκτωση στο B (σχ. 77α),

β) αμφιέρειστη, η ιδεατή δοκός θα είναι πάλι αμφιέρειστη (σχ. 77 β).

Με τον τρόπο αυτό προδιορίζεται η ιδεατή δοκός σ' οποιαδήποτε άλλη περίπτωση πραγματικής δοκού.

Σ' ότι αφορά των προδιορισμό των παραμορφώσεων (κλίσεων και υποχωρήσεων) της πραγματικής δοκού, εργαζόμαστε ως εξής:

1. Κατασκευάζουμε κατά τα γνωστά το διάγραμμα καμπτικών ροπών της πραγματικής δοκού με τη δοθείσα φόρτιση.

2. Στην περίπτωση που η δοκός έχει μεταβαλλόμενη κατά

τμήματα ροπή αδράνειας, με τιμές έστω $J_0, J_1, J_2, \dots$, ανάγουμε τις τιμές του διαγράμματος ροπών σε άλλες, που αντιστοιχούν σε φορέα ενιαίας ροπής αδράνειας, έστω J_0 .

Η αναγωγή γίνεται πολλαπλασιάζοντας την τιμή της M που αντιστοιχεί σε διατομή ροπής αδράνειας π.χ. J_2 , επί J_0/J_2 .

Είναι αυτονόητο ότι η ανηγμένη τιμή της M που αντιστοιχεί σε διατομή ροπής αδράνειας J_0 , θα είναι $M' = MJ_0/J_0 = M$.

3. Θεωρώντας κατά περίπτωση το ανηγμένο ή κανονικό διάγραμμα καμπτικών ροπών της πραγματικής δοκού σαν συνεχές φορτίο της ιδεατής, κατασκευάζουμε το διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών της ιδεατής δοκού, οπότε παίρνουμε αντίστοιχα τις κλίσεις και υποχωρήσεις, δηλαδή τις παραμορφώσεις της πραγματικής δοκού πολλαπλασιασμένες επί EJ_0 .

Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν ζητείται η κλίση ή το βέλος κάμψης σε οποιαδήποτε μοναδική διατομή της δοκού, γιατί τότε ο υπολογισμός των μεγεθών αυτών είναι δυνατός χωρίς την εξεύρεση των αντιστοίχων εξισώσεων για όλο το μήκος της δοκού.

Παράδειγμα.

Η δοκός του σχ. 78α, με τις σημειωμένες κυκλικές διατομές, φέρει φορτίο $P = 2t$ στη διατομή Η.

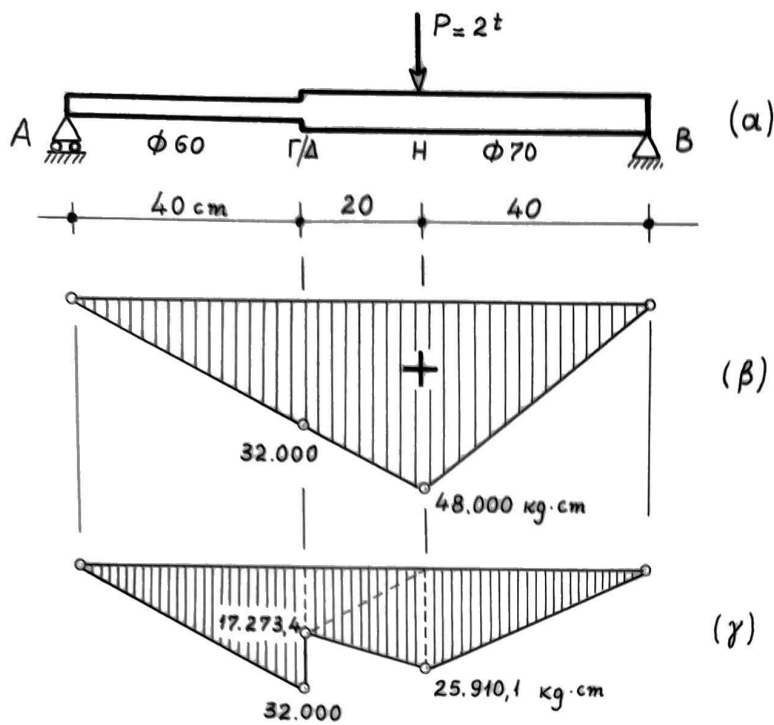
Αν $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, να υπολογιστούν:

- οι μεταβολές των γωνιών στις στηρίξεις Α και Β,
- το βέλος κάμψης στη διατομή Η όπου ενεργεί το φορτίο Ρ.

Λύση.

Η αντίδραση Α και οι καμπτικές ροπές στις διατομές Γ/Δ και Η, είναι αντίστοιχα:

$$A = \frac{2.000 \cdot 40}{100} = 800 \text{ kg}$$



Σχ. 78

$$M_{ΓΔ} = 800 \cdot 40 = 32.000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_H = 800 \cdot 60 = 48.000 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

Έτσι προκύπτει το διάγραμμα M της δοκού (βλ. β).

Για την αναγωγή του διαγράμματος υπολογίζουμε τις ροπές αδράνειας των διατομών της. Είναι:

$$J_{AΓ} = J_0 = \frac{\pi \cdot 6^4}{64} = 63,62 \text{ cm}^4$$

$$\text{και } J_{ΔΒ} = J_1 = \frac{\pi \cdot 7^4}{64} = 117,86 \text{ cm}^4.$$

Έτσι προκύπτει το ανηγμένο διάγραμμα του σχήματος γ, απ' τις τιμές των ροπών στις χαρακτηριστικές διατομές, που είναι:

$$M_{Γ} = 32.000 \cdot \frac{J_0}{J_0} = 32.000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_{Δ} = 32.000 \cdot \frac{J_0}{J_1} = 32.000 \cdot \frac{63,62}{117,86} = 17.273,4 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_H = 48.000 \cdot \frac{J_0}{J_1} = 48.000 \cdot \frac{63,62}{117,86} = 25.910,1 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

α) Οι μεταβολές των γωνιών στις εστηρίξεις θα είναι τώρα οι αντιδράσεις αμφιέριστης ιδεατής δοκού, που έχει σαν φορτίο το ανηγμένο διάγραμμα ροπών του σχ. γ, διαιρεμένες όμως δια EJ_0 .

Για τον υπολογισμό της αντίδρασης A_i χρησιμοποιούμε τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς τη εστήριξη Β. Είναι:

$$(\sum M_i)_B \uparrow^+ = 0 \Rightarrow$$

$$A_i \cdot 100 - \frac{1}{2} 32.000 \cdot 40 \left(60 + \frac{1}{3} 40 \right) - \frac{1}{2} 17.273,4 \cdot 20 \left(40 + \frac{2}{3} 20 \right) - \frac{1}{2} 25.910,1 \cdot 20 \left(40 + \frac{1}{3} 20 \right) - \frac{1}{2} 25.910,1 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} 40 = 0 \Rightarrow$$

$$100 \cdot A_i = 82.055.795 \text{ kg} \cdot \text{cm}^3 \quad \text{και} \quad \underline{A_i = 820.557,95 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2}$$

Διαιρώντας τώρα την A_i διά του:

$$EJ_0 = 2 \cdot 10^6 \cdot 63,62 = 127,24 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2,$$

βρίσκουμε τη γωνία της δοκού στη στήριξη A:

$$\omega_A = 0,00645 \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \underline{\omega_A = 0,37^\circ}$$

Γιά τον υπολογισμό της αντίδρασης B_i , υπολογίζουμε πρώτα το εμβαδόν F_i του διαγράμματος του σχήματος γ. Είναι:

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{1}{2} 32.000 \cdot 40 + \frac{1}{2} (17.273,4 + 25.910,1) \cdot 20 + \frac{1}{2} 25.910,1 \cdot 40 \\ &= 1.590.037 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2, \end{aligned}$$

και συνεπώς:

$$B_i = F_i - A_i = 1.590.037 - 820.557,95$$

$$\text{ή} \quad \underline{B_i = 769.479,05 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2.}$$

Άρα η γωνία της δοκού στη στήριξη B, θα είναι:

$$\omega_B = \frac{B_i}{EJ_0} = \frac{769.479,05}{127,24 \cdot 10^6}$$

$$\text{ή} \quad \omega_B = 0,00605 \text{ rad} \quad \text{και} \quad \underline{\omega_B = 0,35^\circ.}$$

β) Το βέλος κάμψης στη διατομή H θα είναι η καμπτική ροπή της ιδεατής δοκού που φορτίζεται με το διάγραμμα του σχήματος γ, διαιρεμένης όμως διά EJ_0 .

Παίρνοντας για ευκολία τα φορτία δεξιά της διατομής H, έχουμε:

$$\begin{aligned} M_{iH} &= 769.479,05 \cdot 40 - \frac{1}{2} \cdot 25.910,1 \cdot 40 \cdot \frac{1}{3} \cdot 40 \\ &= \underline{23.869.802 \text{ kg} \cdot \text{cm}^3}, \end{aligned}$$

και διαιρώντας διά του $EJ_0 = 127,24 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$, βρίσκουμε το ζητούμενο βέλος κάμψης

$$y_H = \frac{M_{iH}}{EJ_0} = \frac{23.869.802}{127,24 \cdot 10^6}$$

$$\text{ή} \quad y_H = 0,187 \text{ cm} \quad \text{και} \quad \underline{y_H = 1,87 \text{ mm}.}$$

8. Στατικά αόριστα προβλήματα.

Όπως περιγράψαμε ήδη στην παρ. 8 σελ. 54 του τρίτου κεφαλαίου, ένας φορέας χαρακτηρίζεται στατικά αόριστος, όταν οι τρεις συνθήκες ισορροπίας που διαθέτουμε απ' τη Μηχανική Ι

$$\sum x_i^+ = 0, \quad \sum y_i^+ = 0 \quad \text{και} \quad (\sum M_i)^+ = 0 \quad (50)$$

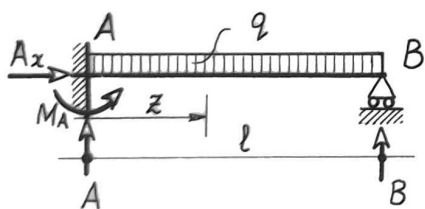
δεν επαρκούν για να προσδιορίσουν τις αντιδράσεις στήριξης και τις εσωτερικές του δυνάμεις.

Στην καμπτική καταπόνηση, το φαινόμενο της στατικής αοριστίας ενός φορέα είναι πολύ συνηθισμένο, και ο βαθμός της, που είναι η διαφορά των αγνώστων αντιδράσεων απ' τις διατιθέμενες εξισώσεις, ποικίλλει σημαντικά.

Αν π.χ. δοθεί η μονόπακτη δοκός του σχ. 79 και ζητηθεί ο προσδιορισμός των αντιδράσεων της A_x , A , B και M_A , διαπιστώνουμε ότι οι σχέσεις (50), που γράφονται:

$$A_x = 0, \quad A + B - q \cdot l = 0 \quad \text{και} \quad -M_A - Bl + \frac{ql^2}{2} = 0 \quad (51)$$

είναι κατά μία λιγώτερες απ' τις αντιδράσεις.



Σχ. 79

Θα μπορούσαμε βέβαια να δώσουμε στη μία άγνωστη αντίδραση αυθαίρετη τιμή, οπότε θα προσδιορίζονταν οι τιμές των υπολοίπων.

Το πρόβλημα συνεπώς μαθηματικά φαίνεται ότι έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή είναι αόριστο και γι' αυτό η στήριξη του φορέα λέγεται στατικά αόριστη.

Στην πραγματικότητα όμως οι αντιδράσεις αυτές παίρνουν συγκεκριμένες τιμές, που καθορίζονται απ' το είδος της στήριξης, τα φορτία, τη γεωμετρική μορφή του φορέα και των μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού του.

Οι τιμές αυτές είναι τέτοιες, ώστε να συμβιβάζονται

μεταξύ τους οι παραμορφώσεις που προκαλούνται απ' τη φόρτιση του φορέα.

Αν για την παραπάνω δοκό διαλέγαμε αυθαίρετα σαν τιμή της αντίδρασης π.χ. στο Β την :

$$B = \frac{ql}{2},$$

και προσδιορίζοντας, όπως παρακάτω, την εξίσωση ελαστικής γραμμής, αναζητούσαμε την υποχώρηση της δοκού στη στήριξη Β, θα βρίσκαμε:

$$w_B = -\frac{ql^4}{24EJ},$$

πράγμα που δεν είναι σωστό, αφού το στήριγμα Β είναι ακλόνητο, και συνεπώς:

$$w_B = 0 \quad (52)$$

Άρα λοιπόν οι παραμορφώσεις δεν θα συμβιβάζονταν μεταξύ τους.

Γιά να συμβιβαστούν, θα πρέπει, στον σχηματισμό της εξίσωσης της ελαστικής γραμμής, να εισάγουμε τη Β με προσδιοριστέα τιμή, οπότε η χρήση της σχέσης (52) θα μας οδηγήσει τελικά στον καθορισμό της πραγματικής της τιμής.

Γιά την υλοποίηση των παραπάνω, απ' τις εξισώσεις (51) παίρνουμε:

$$A_x = 0, \quad A = ql - B \quad \text{και} \quad M_A = \frac{ql^2}{2} - B \quad (53)$$

Σε διατομή που απέχει απόσταση x απ' τη στήριξη Α, η καμπτική ροπή θα είναι:

$$M_x = Ax - M_A - \frac{qx^2}{2}$$

Άρα η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής, είναι:

$$EJw'' = -Ax + M_A + \frac{qx^2}{2}.$$

Η πρώτη ολοκλήρωση δίνει:

$$EJw' = -A\frac{x^2}{2} + M_Ax + \frac{qx^3}{6} + C_1.$$

Για $z = 0$ είναι $w' = 0$ άρα $C_1 = 0$.

Η δεύτερη ολοκλήρωση δίνει:

$$EJw = -A \frac{z^3}{6} + M_A \frac{z^2}{2} + \frac{qz^4}{24} + C_2$$

και επειδή για $z=0$ είναι και $w=0$, προκύπτει $C_2 = 0$.

Θέτοντας ήδη τις τιμές των A και M_A απ' τις σχέσεις (53), η εξίσωση της ελαστικής γραμμής γίνεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} EJw &= -(ql-B) \frac{z^3}{6} + \left(\frac{ql^2}{2} - Bl\right) \frac{z^2}{2} + \frac{qz^4}{24} \\ &= -ql \frac{z^3}{6} - B \frac{z^3}{6} + \frac{ql^2 z^2}{4} - \frac{Blz^2}{2} + \frac{qz^4}{24} \\ &= \frac{qz^2}{24} (6l^2 - 4lz + z^2) - \frac{Bz^2}{6} (3l - z). \end{aligned} \quad (54)$$

Επειδή όμως το στήριγμα B δεν υποχωρεί, θα πρέπει, για $z=l$ να ισχύει η σχέση (52), δηλαδή να είναι $w_B = 0$.

Αυτή είναι και η συνθήκη συμβιβασμού των παραμορφώσεων που αναζητούσαμε σαν 4^η εξίσωση. Θέτοντας λοιπόν στην (54) $z=l$ και $w=0$, παίρνουμε:

$$\frac{B}{6} (3l - l) = \frac{q}{24} (6l^2 - 4l^2 + l^2) \implies B \cdot 2 \cdot l = \frac{q}{4} 3l^2$$

και τελικά: $B = \frac{3}{8} ql$.

Αυτή είναι η πραγματική τιμή της B , που μέσω των σχέσεων (53), μας οδηγεί στον προσδιορισμό των υπολοίπων αντιδράσεων:

$$A = ql - \frac{3}{8} ql = \frac{5}{8} ql \quad \text{και}$$

$$M_A = \frac{ql^2}{2} - \frac{3}{8} ql^2 = \frac{ql^2}{8}.$$

α. Η μέθοδος της επαλληλίας.

Για να βρούμε πιο γρήγορα και μεθοδικά την πρόθετη εξίσωση συμβιβασμού των παραμορφώσεων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και εδώ την αρχή της επαλληλίας που,

όπως είναι γνωστό, έχει γενικότερη ισχύ στα φυσικά φαινόμενα, σε συνδυασμό με την αρχή της ανεξαρτησίας των αποτελεσμάτων.

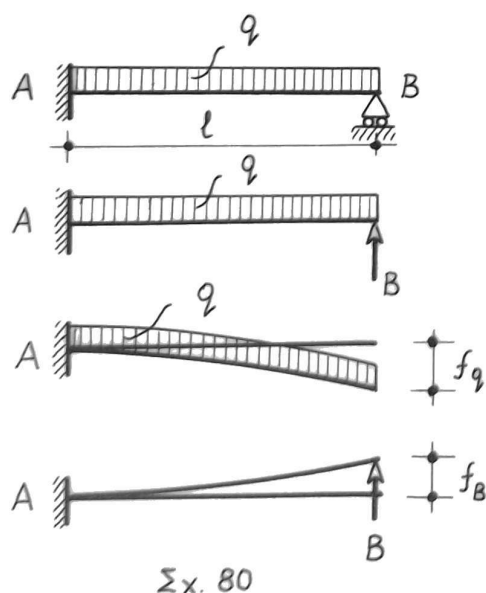
Οι δύο αυτές αρχές, που αποτελούν ουσιαστικά ένα λογικό συμπέρασμα, διατυπώνονται ως εξής:

1) Δυνάμεις που ενεργούν ταυτόχρονα σε έναν φορέα, προκαλούν τις ίδιες παραμορφώσεις που θα προκαλούσαν αν ενεργούσαν χωριστά. και

2) Η ολική παραμόρφωση που προκαλείται σ' ένα φορέα απ' τη σύγχρονη δράση των δυνάμεων, ισούται με το άθροισμα των παραμορφώσεων που θα προκαλούσε η κάθε μία, αν ενεργούσε χωριστά.

Για την εφαρμογή των παραπάνω αρχών στη μονόπακτη δοκό που εξετάσαμε πριν, βκεφτόμαστε ως εξής:

Αν στη θέση της ετήριξης B τοποθετήσουμε την άγνωστη αντίδραση, έστω B , τότε στον πρόβολο AB που απομένει, θα ενεργούν ταυτόχρονα το συνεχές φορτίο q και η κατακόρυφη δύναμη B .



Οι δυνάμεις αυτές προκαλούν στο άκρο B του προβόλου κατακόρυφες μετατοπίσεις, οι οποίες, όπως υπολογίστηκαν στα παραδείγματα 1 και 2 των βελίδων 141 και 142, είναι αντίστοιχα:

$$f_q = \frac{ql^4}{8EJ}$$

$$\text{και } f_B = \frac{-Bl^3}{3EJ}$$

Επειδή όμως το ετήριγμα B είναι ανυποχώρητο, η ολική μετατόπιση απ' τη σύγχρονη δράση των παραπάνω δυνάμεων

είναι μηδενική. Άρα:

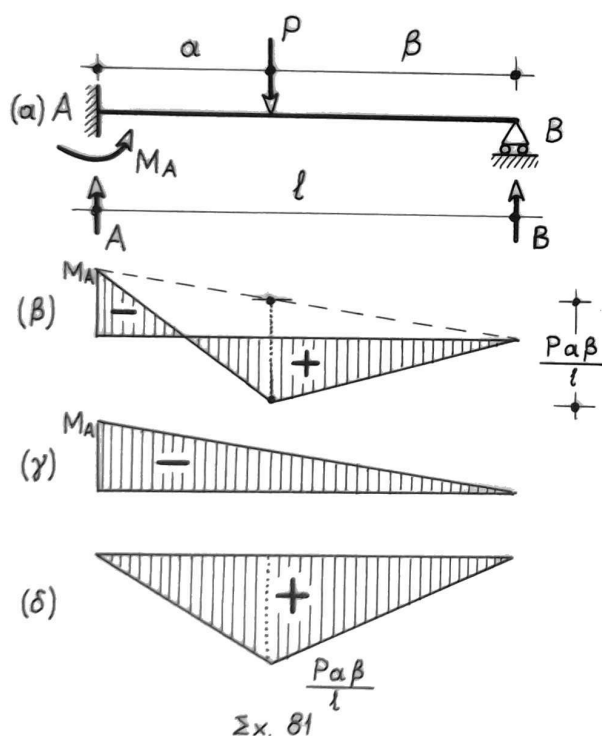
$$f_q + f_B = 0 \Rightarrow \frac{ql^4}{8EJ} - \frac{Bl^3}{3EJ} = 0 \quad \text{και} \quad B = \frac{3}{8} ql.$$

β. Η μέθοδος της επιφανειακής ροπής.

Την παραπάνω μέθοδο, που ουσιαστικά είναι εφαρμογή των όσων αναφέρθηκαν στην παρ. 7 για την ιδεατή δοκό, θα περιγράψουμε στα δύο παραδείγματα που ακολουθούν.

1. Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στηρίξεως της μονόπακτης δοκού του σχ. 81α.

Λύση



Οι εξισώσεις των συνθηκών ισορροπίας της δοκού:

$$\left. \begin{aligned} (\Sigma M)_A^{++} &= -M_A + Pa - Bl = 0 \\ \text{και } \Sigma y^{++} &= A + B - P = 0 \end{aligned} \right| \quad (55)$$

προφανώς δεν επαρκούν για να προσδιορίσουν τις τρεις άγνωστες αντιδράσεις A , B και M_A .

Γιά να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της ιδεατής δοκού, θα χρειαστούμε οπωσδήποτε το διάγραμμα Κ.Ρ. του πραγματικού

φορέα, το οποίο έχει τη μορφή του σχ. β, με άγνωστη τη M_A .

Το διάγραμμα αυτό αναλύεται:

α) σε ένα τριγωνικό (σχ. γ) με αρνητικές τιμές που οφείλεται στη M_A , και

β) ένα άλλο τριγωνικό (σχ. δ) με θετικές τιμές που οφείλεται στο φορτίο P .

Η ιδεατή δοκός που θα φορτισθεί με τα διαγράμματα γ και δ των οποίων οι τεταγμένες διαιρούνται διά EJ , θα πρέπει να είναι ελεύθερη στο A και απλά στηριζόμενη στο B , γιατί η πραγματική δοκός έχει πάκτωση στο A και απλή στήριξη (κύλιση) στο B .

Εκφράζοντας την ισορροπία της με τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς το B , έχουμε:

$$(\sum M_i)_B^{++} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{1}{2} M_A \cdot l \right) \frac{2}{3} l - \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa\beta}{l} \cdot \alpha \left(\beta + \frac{\alpha}{3} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa\beta}{l} \cdot \beta \cdot \frac{2}{3} \beta \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{M_A l^2}{3} = \frac{Pa\beta}{2l} \left(\alpha\beta + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{2\beta^2}{3} \right) = \frac{Pa\beta}{2l} \cdot \frac{1}{3} \left[(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) + (\alpha\beta + \beta^2) \right] \Rightarrow$$

$$M_A l^2 = \frac{Pa\beta}{2l} \left[(\alpha + \beta)^2 + \beta(\alpha + \beta) \right] = \frac{Pa\beta}{2l} \cdot l^2 \cdot \left(1 + \frac{\beta}{l} \right) \Rightarrow$$

$$\text{Άρα} \quad M_A = \frac{Pa\beta}{2l} \cdot \left(1 + \frac{\beta}{l} \right).$$

Τώρα απ' τις σχέσεις (55) βρίσκουμε διαδοχικά τις αντιδράσεις B και A . Είναι:

$$B = \frac{Pa}{l} - \frac{Pa\beta}{2l^2} \left(1 + \frac{\beta}{l} \right) = \frac{Pa}{2l} \left[2 - \frac{\beta}{l} - \left(\frac{\beta}{l} \right)^2 \right]$$

και θέτοντας $\beta/l = \theta$, επειδή $\alpha/l = 1 - \theta$, είναι:

$$B = \frac{P}{2} (1 - \theta) (2 - \theta - \theta^2) = \frac{P}{2} (2 - \theta - \theta^2 - 2\theta + \theta^2 + \theta^3) = \frac{P}{2} (2 - 3\theta + \theta^3).$$

$$\text{Επίσης, } A = P - B = \frac{P}{2} \left[2 - (2 - 3\theta + \theta^3) \right] = \frac{P}{2} (3\theta - \theta^3).$$

Αν το φορτίο P ενεργεί στο μέσον της δοκού, οπότε:

$$\alpha = \beta = \frac{l}{2} \quad \text{και} \quad \theta = \frac{1}{2},$$

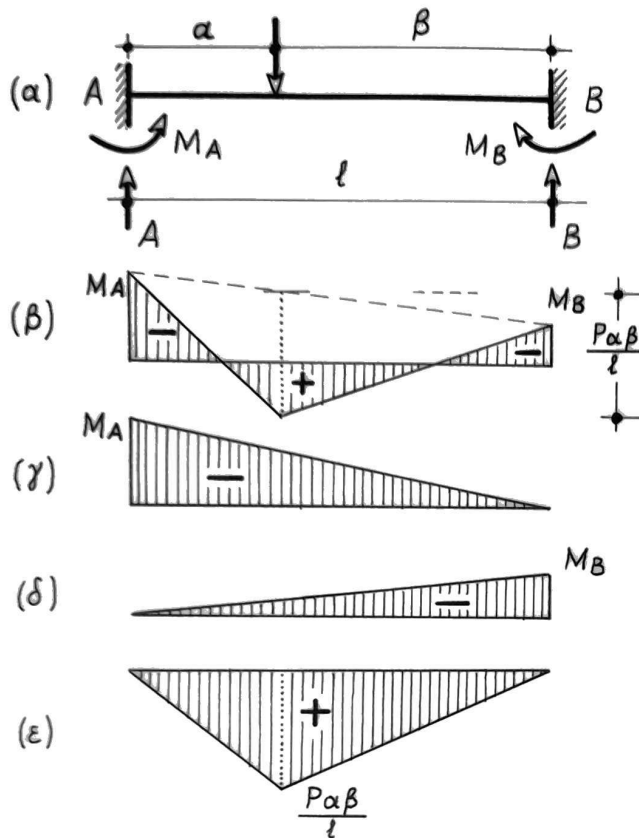
$$\text{θα είναι:} \quad M_A = \frac{Pl^2}{4 \cdot 2l} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{16} Pl,$$

$$A = \frac{P}{2} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{P}{2} \cdot \frac{12-1}{8} = \frac{11}{16} P$$

$$\text{και} \quad B = \frac{P}{2} \cdot \left(2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{P}{2} \cdot \frac{16-12+1}{8} = \frac{5}{16} P.$$

2. Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στηρίξεως της αμφίπακτης δοκού του σχ. 82α.

Λύση



Σχ. 82

Εδώ οι εξισώσεις των συνθηκών ισορροπίας:

$$\left. \begin{aligned} (\Sigma M)_A^{\uparrow+} &= -M_A + M_B + Pa - Bl = 0 \\ \text{και } \Sigma y^{\uparrow+} &= A + B - P = 0 \end{aligned} \right| \quad (56)$$

είναι κατά δύο λιγότερες των τεσσάρων αγνώστων αντιδράσεων A, B, M_A και M_B .

Με σκέυεις ανάλογες μ' εκείνες που κάναμε στο προηγούμενο παράδειγμα, σχεδιάζουμε το διάγραμμα Κ.Ρ. της δοκού (σχ. β) με άγνωστες τις M_A και M_B .

Αυτό αναλύεται στα επί

μέρους διαγράμματα γ, δ και ε, που οφείλονται αντίστοιχα στη ροπή M_A , τη ροπή M_B και τη δύναμη P .

Η ιδεατή δοκός που αντιπροσωπεύει την πραγματική αμφίπακτη, πρέπει να είναι ελεύθερη και στα δύο της άκρα, και να έχει φορτία τα διαγράμματα γ, δ και ε, που οι τεταγμένες τους έχουν διαιρεθεί διά EJ .

Εκφράζοντας λοιπόν την ισορροπία της, με τις συνθήκες μη-δενισμού των ροπών ως προς τα σημεία B και A , έχουμε:

$$(\Sigma M_i)_B^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{1}{2} M_A l \right) \frac{2l}{3} + \left(\frac{1}{2} M_B l \right) \frac{l}{3} - \left(\frac{1}{2} \frac{Pab}{l} \alpha \right) \left(\beta + \frac{\alpha}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} \frac{Pab}{l} \beta \right) \frac{2\beta}{3} \right] = 0$$

$$(\Sigma M_i)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EJ} \left[- \left(\frac{1}{2} M_A l \right) \frac{l}{3} - \left(\frac{1}{2} M_B l \right) \frac{2l}{3} + \left(\frac{1}{2} \frac{Pab}{l} \alpha \right) \frac{2\alpha}{3} + \left(\frac{1}{2} \frac{Pab}{l} \beta \right) \left(\alpha + \frac{\beta}{3} \right) \right] = 0,$$

και αντίστοιχα παίρνουμε:

$$\frac{M_A l^2}{3} + \frac{M_B l^2}{6} = \frac{P\alpha\beta}{2l} \left(\alpha\beta + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{2\beta^2}{3} \right) \Rightarrow 2M_A + M_B = \frac{P\alpha\beta}{l^3} (\alpha^2 + 3\alpha\beta + 2\beta^2) \quad (57)$$

$$\frac{M_A l^2}{6} + \frac{M_B l^2}{3} = \frac{P\alpha\beta}{2l} \left(\frac{2\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \frac{\beta^2}{3} \right) \Rightarrow M_A + 2M_B = \frac{P\alpha\beta}{l^3} (2\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2), \quad (58)$$

οπότε προκύπτει:

$$[2(57) - (58)] \Rightarrow 3M_A = \frac{P\alpha\beta}{l^3} (2\alpha^2 + 6\alpha\beta + 4\beta^2 - 2\alpha^2 - 3\alpha\beta - \beta^2) = \frac{3P\alpha\beta^2}{l^3} (\alpha + \beta)$$

$$\text{δηλαδή: } M_A = \frac{P\alpha\beta^2}{l^2}$$

$$\text{και όμοια: } M_B = \frac{P\alpha^2\beta}{l^2}.$$

Οι αντιδράσεις B και A προδιορίζονται τώρα διαδοχικά μέσω των σχέσεων (56). Είναι:

$$Bl = P\alpha + M_B - M_A = P\alpha + \frac{P\alpha^2\beta}{l^2} - \frac{P\alpha\beta^2}{l^2}$$

$$\text{Άρα: } Bl^3 = P\alpha(l^2 + \alpha\beta - \beta^2) = P\alpha(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha\beta - \beta^2) = P\alpha^2(\alpha + 3\beta)$$

$$\text{και } B = \frac{P\alpha^2}{l^3} (l + 2\beta) = P\alpha^2(1 + 2\beta),$$

$$\text{αν τεθεί όπου } \frac{\alpha}{l} = \alpha \quad \text{και} \quad \frac{\beta}{l} = \beta.$$

$$\text{Επίσης } A = P - B = P[1 - (1 - \beta)^2(1 + 2\beta)] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{ή } A &= P[1 - (1 - 2\beta + \beta^2)(1 + 2\beta)] = P[1 - (1 - 2\beta + \beta^2 + 2\beta - 4\beta^2 + 2\beta^3)] \\ &= P(1 - 1 + 3\beta^2 - 2\beta^3) = P\beta^2(3 - 2\beta) = P\beta^2[2(1 - \beta) + 1] \end{aligned}$$

$$\text{και τελικά: } A = P\beta^2(1 + 2\alpha).$$

Αν το φορτίο P ενεργεί στο μέσον της δοκού, οπότε:

$$\alpha = \beta = \frac{l}{2} \quad \text{και} \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2},$$

$$\text{θα είναι: } M_A = M_B = \frac{P \frac{l}{2} \cdot \frac{l^2}{4}}{l^2} = \frac{Pl}{8},$$

$$\text{και } A = B = P \frac{1}{4} \left(1 + 2 \frac{1}{2} \right) = \frac{P}{2}.$$

9. Η κάμψη όταν δεν ισχύει ο νόμος του Hooke (ανελαστική).

Κάθε είδους εξισώσεις και υπολογισμοί που αναφέρθηκαν ως τώρα για την κάμψη, είχαν σαν βασική προϋπόθεση την ισχύ του νόμου του Hooke, η οποία, όπως είναι γνωστό, πραγματοποιείται όταν η μέγιστη ορθή τάση που εμφανίζεται στο υλικό λόγω κάμψης είναι το πολύ ίση με την τάση αναλογίας σ_A .

Όμως είναι δυνατό να εμφανιστούν περιπτώσεις, όπου, λόγω ιδιομορφίας των ιδιοτήτων του υλικού ή της καταπόνησης του φορέα, τα παραπάνω δεν ισχύουν, έστω και μερικά.

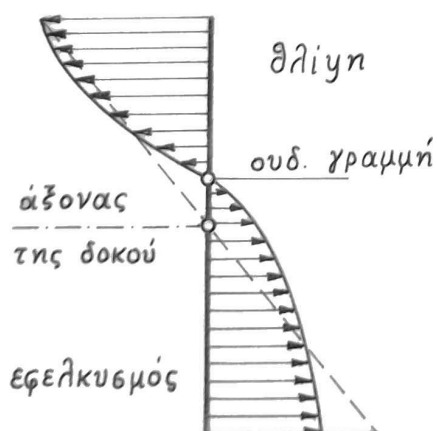
Οι περιπτώσεις αυτές είναι:

1. Το υλικό δεν έχει σταθερό μέτρο ελαστικότητας.

Τέτοιο υλικό είναι ο χυτοσίδηρος, του οποίου το διάγραμμα εφελκυσμού φαίνεται στο βχ. 17α της βελ. 36.

Οι τάσεις σ δεν είναι ανάλογες των ανηγμένων επιμηκύνσεων και το μεταβαλλόμενο μέτρο ελαστικότητας είναι μεγαλύτερο στη θλίψη παρά στον εφελκυσμό, με τιμές μικρότερες σε μεγαλύτερες τάσεις.

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, η κατανομή των ορθών τάσεων στη διατομή (βχ. 83) να μην είναι γραμμική (διακεκομμένη ευθεία), αλλά καμπύλη, της οποίας οι κλίσεις μικραίνουν στα άκρα της διατομής.



Σχ. 83.

Οι θλιπτικές τάσεις είναι μεγαλύτερες απ' τις εφελκυστικές και η ουδέτερη γραμμή μετατοπίζεται στη θλιβόμενη περιοχή.

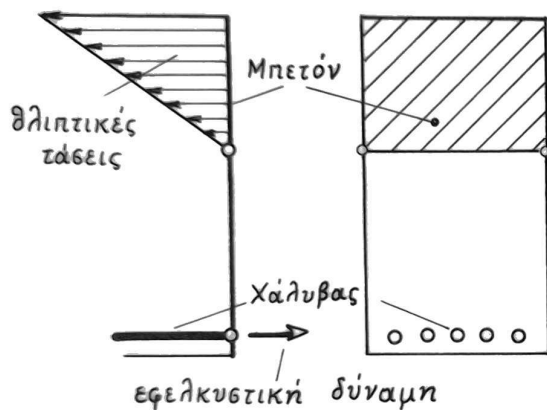
Ο προσδιορισμός της παραπάνω κατανομής των τάσεων και της θέσης

της ουδέτερης γραμμής, πέρα απ' το ότι είναι δύσκολος, δεν έχει ξεχωριστό νόημα, γιατί ο χυτοσίδηρος σαν υλικό δεν χρησιμοποιείται ποτέ σε καμπτόμενα στοιχεία.

2. Το υλικό έχει ελάχιστη αντοχή σε εφελκυσμό και μεγάλη σε θλίψη.

Τέτοιο υλικό είναι το σκυρόδεμα, το οποίο, σαν καμπτόμενο στοιχείο, δεν μπορεί να παραλάβει ούτε καν τις ροπές που προκαλούνται απ' το δικό του βάρος.

Γι' αυτό χρησιμοποιείται πάντα σε μικτές κατασκευές με



Σχ. 84

χάλυβα (σχ. 84), ο οποίος παραλαμβάνει τις εφελκυστικές τάσεις, αφήνοντας τις θλιπτικές για το σκυρόδεμα.

Όμως με τέτοιες κατασκευές δεν θα ασχοληθούμε εδώ, γιατί αυτές αποτελούν αντικείμενο ξεχωριστού κλάδου του οπλισμένου σκυροδέματος.

3. Η σ_{max} είναι μεγαλύτερη απ' το όριο αναλογίας.

Στην κατηγορία αυτή υπάρχουν οι περισσότερες περιπτώσεις ανελαστικής κάμψης με αντιπροσωπευτικό υλικό τον χάλυβα.

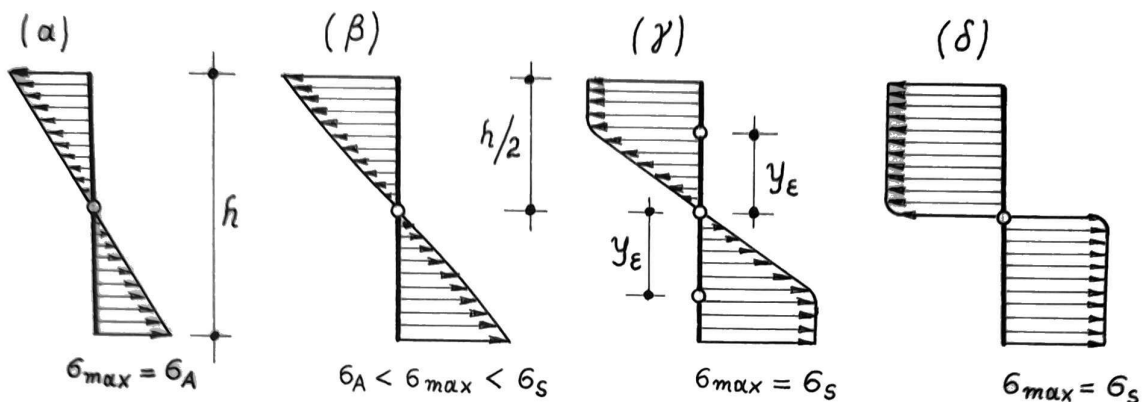
Σαν φαινόμενο αντίστοιχο εκείνου που γνωρίσαμε στη στρέψη, βελ. 76, η ανελαστική κάμψη παρουσιάζεται όταν η καμπτική ροπή ξεπεράσει μία συγκεκριμένη τιμή, που αντιστοιχεί στην εμφάνιση της

$$\sigma_{max} = \sigma_A,$$

και ονομάζεται οριακή ροπή ελαστικότητας (σχ. 85α).

Με την αύξηση της καμπτικής ροπής, η σ_{max} γίνεται μεγαλύτερη της σ_A στα άκρα της διατομής, όπου οι τάσεις δεν μεταβάλλονται πλέον γραμμικά, όπως συμβαίνει στην περιοχή της ουδέτερης γραμμής (σχ. β).

Αυτό γίνεται μέχρι να φτάσει η $\sigma_{\max}$ την τιμή σ_s που αντιστοιχεί στο όριο διαρροής του υλικού. Γιατί με την παραπέρα αύξηση της καμπτικής ροπής, η $\sigma_{\max}$ διατηρεί σταθερή τιμή, την σ_s , ενώ στην περιοχή της ουδέτερης γραμμής η μεταβολή των τάσεων εξακολουθεί να είναι γραμμική (βλ. γ).



Σχ. 85.

Στην κατάσταση αυτή, που χαρακτηρίζεται σαν ελαστική, ο νόμος του Hooke ισχύει μόνο για τις ίνες που βρίσκονται στην περιοχή της ουδέτερης γραμμής.

Η συνεχιζόμενη αύξηση των καμπτικών ροπών, έχει σαν αποτέλεσμα τη σταδιακή εξαφάνιση της γραμμικότητας στη μεταβολή των τάσεων, μέχρι την ορθογωνική κατανομή (βλ. δ).

Αν η διατομή είναι συμμετρική ως προς το κεντροειδές της, η ουδέτερη γραμμή διατηρεί τη θέση της σταθερή, ενώ αλλοιώς μετακινείται.

Η καμπτική ροπή που μπορεί να παραλάβει μία ορθογωνική διατομή διαστάσεων $b \times h$, είναι:

α. Για την περίπτωση του σχ. α, όπου $\sigma_{\max} = \sigma_A$,

$$M_A = 2 \cdot b \cdot \left(\frac{1}{2} \sigma_A \frac{h}{2} \right) \frac{2}{3} \frac{h}{2} = \sigma_A \frac{bh^2}{6},$$

ή πιο απλά $M_A = \sigma_A \cdot W_{un} = \sigma_A \frac{bh^2}{6}. \quad (57)$

β. Για την ελαστοπλαστική δράση του σχ. γ, η οποία αποτελεί ενδιάμεση κατάσταση των περιπτώσεων των σχημ. β και δ,

θα είναι αντίστοιχα:

$$M_E = 2b \left[\frac{1}{2} \sigma_s y_e \frac{2}{3} y_e + \sigma_s \left(\frac{h}{2} - y_e \right) \left(y_e + \frac{h}{4} - \frac{y_e}{2} \right) \right] = 2b \sigma_s \left[\frac{y_e^2}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y_e \right) \left(\frac{h}{2} + y_e \right) \right]$$

$$= 2b \sigma_s \left[\frac{y_e^2}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_e^2 \right) \right] = 2b \sigma_s \left(\frac{y_e^2}{3} + \frac{h^2}{8} - \frac{y_e^2}{2} \right) = 2b \sigma_s \left(\frac{h^2}{8} - \frac{y_e^2}{6} \right)$$

και τελικά:

$$M_E = b \cdot \sigma_s \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \frac{y_e^2}{3} \right). \quad (58)$$

Η σχέση (58) επιτρέπει τον προσδιορισμό της y_e όταν δίνεται η M_E , ή αντίστοιχα της M_E όταν δίνεται η y_e . Απ' την ίδια σχέση, προκύπτει ότι:

1. Για $y_e = h/2$, που είναι οριακά η περίπτωση του βχ. α αν δεχθούμε σαν $\sigma_{\max}$ όχι την σ_A , αλλά την $\sigma'_A = \sigma_s$, είναι:

$$M_A' \simeq b \cdot \sigma_s \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{12} \right) = \sigma_s \cdot \frac{bh^2}{6} \quad (59)$$

2. Για $y_e = 0$, που είναι η περίπτωση του βχ. δ, και αντιστοιχεί στην πλαστικοποίηση ολόκληρης της διατομής, προκύπτει η ροπή:

$$M_s = b \cdot \sigma_s \frac{h^2}{4} = \sigma_s \cdot \frac{bh^2}{4} \quad (60)$$

που ονομάζεται καμπτική ροπή διαρροής.

Απ' τις σχέσεις (57) και (60) προκύπτει:

$$\frac{M_s}{M_A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma_s}{\sigma_A}. \quad (61)$$

Αν λάβουμε υπ όψη ότι για ρευτοπαγή χάλυβα St 37 I είναι περίπου:

$$\sigma_A = 1950 \text{ kg/cm}^2 \text{ και } \sigma_s = 2400 \text{ kg/cm}^2,$$

τότε η (61) δίνει

$$\frac{M_s}{M_A} \simeq 1,85. \quad (62)$$

Αντίστοιχα, απ' τις σχέσεις (59) και (60), προκύπτει:

$$\frac{M_s}{M_A'} \simeq 1,50. \quad (63)$$

Όστε λοιπόν απ' τις σχέσεις (62) και (63) διαπιστώνουμε ότι:

Η αύξηση της καμπτικής ροπής που εμφανίζεται ε' όλο το στάδιο της πλαστικοποίησης της διατομής είναι περίπου το:

α. **50%** της ροπής M_A που παραλαμβάνει η διατομή όταν $\sigma_{max} = \sigma_s$ και

β. **85%** της ροπής M_A που παραλαμβάνει η διατομή όταν $\sigma_{max} = \sigma_A$.

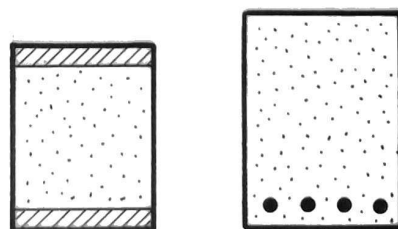
Όμως μιά τέτοια φόρτιση όχι μόνον ελάττώνει τον συντελεστή ασφάλειας της κατασκευής, αλλά, πράγμα που είναι σοβαρώτερο, προκαλεί παραμένοντες παραμορφώσεις.

Έτσι μιά τέτοια εκμετάλλευση του υλικού σήμερα, είναι σχεδόν άχρηστη. Μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, όπου το ίδιο βάρος της κατασκευής παίζει σπουδαίο ρόλο για τον προορισμό της, π.χ. στην αεροναυπηγική, είναι δυνατό να καταπονηθεί το υλικό μέχρι το όριο διαρροής του.

10. Σύνθετες δοκοί (δύο υλικών).

Μία δοκός ονομάζεται σύνθετη όταν αποτελείται από δύο ή περισσότερα υλικά, που είναι ενωμένα ε' όλο το μήκος της, έτσι ώστε να αποτελούν μία ενιαία δοκό, χωρίς να ολισθαίνουν μεταξύ τους.

Η κατασκευή τέτοιων δοκών στην πράξη προκύπτει απ' την ανάγκη ενίσχυσης της αντοχής σε δοκούς που το υλικό τους εμφανίζει μιά συγκεκριμένη αδυναμία, π.χ. μικρή αντοχή σε εφελκυσμό.



Σχ. 86

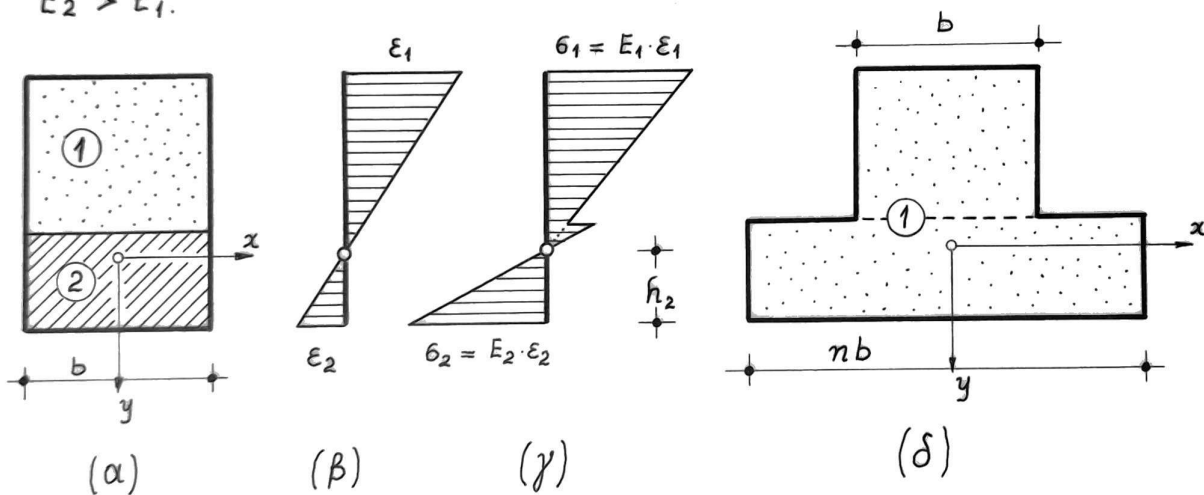
Έτσι έχουμε τις ξύλινες δοκούς με μεταλλικές ενισχύσεις, δοκούς ή υποστρώματα από οπλισμένο σκυρόδεμα (σχ. 86) κ.λ.π.

Η μελέτη μίας σύνθετης δοκού σε κάμψη γίνεται όπως και στην απλή, γιατί η υπόθεση του Bernoulli ότι οι επίπεδες διατομές προ της κάμψης παραμένουν επίπεδες και μετά απ' αυτήν, (βλ. σχ. 67 βελ. 118), ισχύει στην κάμψη ανεξάρτητα απ' το υλικό της ράβδου.

Η υπόθεση αυτή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι ανηγμένες επιμηκύνσεις στις ίνες της δοκού μεταβάλλονται γραμμικά καθ' ύψος της διατομής, όπως προκύπτει και από τις εξισώσεις 9 και 10 της βελ. 119, απ' όπου γενικά είναι:

$$\varepsilon = \frac{1}{R} y. \quad (64)$$

Στο σχ. 87β φαίνεται η κατανομή των ανηγμένων επιμηκύνσεων μίας σύνθετης δοκού που αποτελείται από τα υλικά 1 και 2, με $E_2 > E_1$.



Σχ. 87

Εδώ είναι φανερό ότι η θέση της ουδέτερης γραμμής, που προεδιορίζεται όπως θ' αναπτύξουμε παρακάτω, δεν συμπίπτει με το κεντροειδές της διατομής.

Υποθέτοντας ότι ο νόμος του Hooke ισχύει και για τα δύο υλικά, η ορθή τάση που αναπτύσσεται σε τυχούσα ίνα απόστασης y απ' την ουδέτερη γραμμή, (βλ. σχ. 87γ) είναι:

$$\begin{aligned} \text{Για το υλικό 1} & : \sigma_1 = \varepsilon_1 \cdot E_1 = \frac{1}{R} E_1 y, \\ \text{" " " " " " 2} & : \sigma_2 = \varepsilon_2 \cdot E_2 = \frac{1}{R} E_2 y. \end{aligned} \quad (65)$$

Η θέση της ουδέτερης γραμμής θα προσδιοριστεί απ' τη συνθήκη ότι η συνισταμένη αξονική δύναμη της διατομής είναι μηδενική. Δηλαδή:

$$\int_1 \epsilon_1 dF + \int_2 \epsilon_2 dF = 0, \quad (66)$$

όπου το πρώτο ολοκλήρωμα εκτείνεται στην επιφάνεια του υλικού 1 και το δεύτερο στη 2. Αντικαθιστώντας τις τιμές των ορθών τάσεων απ' τις σχέσεις (65) στην (66), έχουμε:

$$\frac{1}{R} \left[E_1 \int_1 y dF + E_2 \int_2 y dF \right] = 0. \quad (67)$$

Και επειδή $\int_1 y dF = S_1$ και $\int_2 y dF = S_2$,

όπου S_1 και S_2 οι στατικές ροπές των επιφανειών των δύο (ή περιβοοτέρων) υλικών ως προς την ουδέτερη γραμμή, η εξίσωση (67) γίνεται:

$$E_1 S_1 + E_2 S_2 = 0 \quad \text{ή} \quad S_1 + n S_2 = 0, \quad (68)$$

όπου: $n = E_2 / E_1$.

Όποτε λοιπόν υποθέτοντας ότι η ουδέτερη γραμμή βρίσκεται π.χ. στο υλικό 2, απέχοντας απόσταση h_2 από την κάτω ίνα της διατομής, η σχέση (68) μας οδηγεί στον προσδιορισμό της h_2 , δηλαδή στη θέση της ουδέτερης γραμμής.

Αν τα τμήματα των δύο υλικών είναι συμμετρικά^{ως} προς το κεντροειδές της διατομής, τότε η ουδέτερη γραμμή βρίσκεται στο μέσον του ύψους της.

Με διαδικασία ανάλογη μ' εκείνη που ακολουθήσαμε στην κάμψη, προσδιορίζουμε τις ορθές τάσεις που αναπτύσσονται στα δύο υλικά, εκφράζοντας την καμπτική ροπή M της διατομής, σαν άθροισμα των ροπών των στοιχειωδών δυνάμεων - που προέρχονται απ' τις τάσεις των δύο υλικών - ως προς την ουδέτερη γραμμή. Έτσι έχουμε:

$$M = \int_1 \epsilon_1 y dF + \int_2 \epsilon_2 y dF = \frac{1}{R} E_1 \int_1 y^2 dF + \frac{1}{R} E_2 \int_2 y^2 dF$$

$$\dot{n} \quad M = \frac{1}{R} (E_1 J_1 + E_2 J_2), \quad (69)$$

όπου J_1 και J_2 οι ροπές αδράνειας των επιφανειών 1 και 2 αντίστοιχα ως προς την ουδέτερη γραμμή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν J η ροπή αδράνειας όλης της διατομής ως προς την ουδέτερη γραμμή, θα είναι:

$$J = J_1 + J_2.$$

Απ' την (69) προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E_1 J_1 + E_2 J_2} = \frac{\frac{M}{E_1}}{J_1 + n J_2},$$

οπότε οι σχέσεις (65) των ορθών τάσεων γίνονται τελικά:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{M}{J_1 + n J_2} \cdot y \\ \sigma_2 &= \frac{M \cdot n}{J_1 + n J_2} \cdot y. \end{aligned} \quad (70)$$

Φυσικά, αν $E_1 = E_2 = E$, οι σχέσεις (70) εκφυλλίζονται στην:

$$\sigma = \frac{M}{J} y$$

που γνωρίσαμε ήδη στην κάμψη.

Παρακάτω περιγράφεται η μέθοδος της **μετασχηματισμένης** διατομής που χρησιμοποιείται το ίδιο ικανοποιητικά για να αντιμετωπιστεί το καμπτικό πρόβλημα της σύνθετης δοκού.

Στηρίζεται στον μετασχηματισμό της σύνθετης διατομής της δοκού σε άλλη ισοδύναμη που αποτελείται από ένα μόνο υλικό.

Με τον όρο ισοδύναμη εννοούμε εδώ, ότι το ύψος, η θέση της ουδέτερης γραμμής και η ροπή αντίστασης της νέας ισοδύναμης διατομής παραμένουν αναλλοίωτα.

Ύστερα απ' αυτά, αναφερόμενοι στην εξίσωση (68), παρατηρούμε ότι η ουδέτερη γραμμή της διατομής διατηρείται στην ίδια θέση, αν κάθε στοιχειώδης επιφάνεια dF του υλικού 2

πολλαπλασιαστεί με τον παράγοντα n , υπό την προϋπόθεση όμως ότι η απόσταση y κάθε τέτοιας επιφάνειας παραμένει ίδια.

Με τον τρόπο αυτό προκύπτει, όπως φαίνεται στο βχ. 87δ, μια νέα διατομή που έχει:

1. Την επιφάνεια του υλικού 1 όπως είναι, και
2. -"- -"- -"- -"- 2 με n -πλάσιο πλάτος.

Έτσι η νέα ισοδύναμη (μετασχηματισμένη) διατομή που δημιουργείται, αποτελείται από ένα μόνο υλικό, το 1.

Οι τάσεις σ_1 που προκύπτουν για το υλικό 1, είναι οι ίδιες μ' αυτές που αντιστοιχούν στη νέα διατομή και υπολογίζονται κανονικά απ' τον τύπο της κάμψης για την απλή δοκό

$$\sigma_1 = \frac{M}{J_t} \cdot y ,$$

όπου J_t η ροπή αδράνειας της μετασχηματισμένης διατομής ως προς την ουδέτερη γραμμή, που είναι:

$$J_t = J_1 + n J_2 .$$

Οι τάσεις όμως σ_2 που προκύπτουν για το υλικό 2, θα είναι n -πλάσιες απ' τις αντίστοιχες που προκύπτουν για την ισοδύναμη διατομή, γιατί η πραγματική επιφάνεια του υλικού 2 είναι n φορές μικρότερη της μετασχηματισμένης.

Παράδειγμα.

Η σύνθετη δοκός του βχ. 88 που αποτελείται από ξύλο (1) και χάλυβα (2), παραλαμβάνει καμπτική ροπή $M = 1 \text{ tm}$.

Αν $E_1 = 100.000 \text{ kg/cm}^2$ και $E_2 = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, να υπολογιστούν οι ακρότατες τιμές των τάσεων στα δύο υλικά.

Λύση.

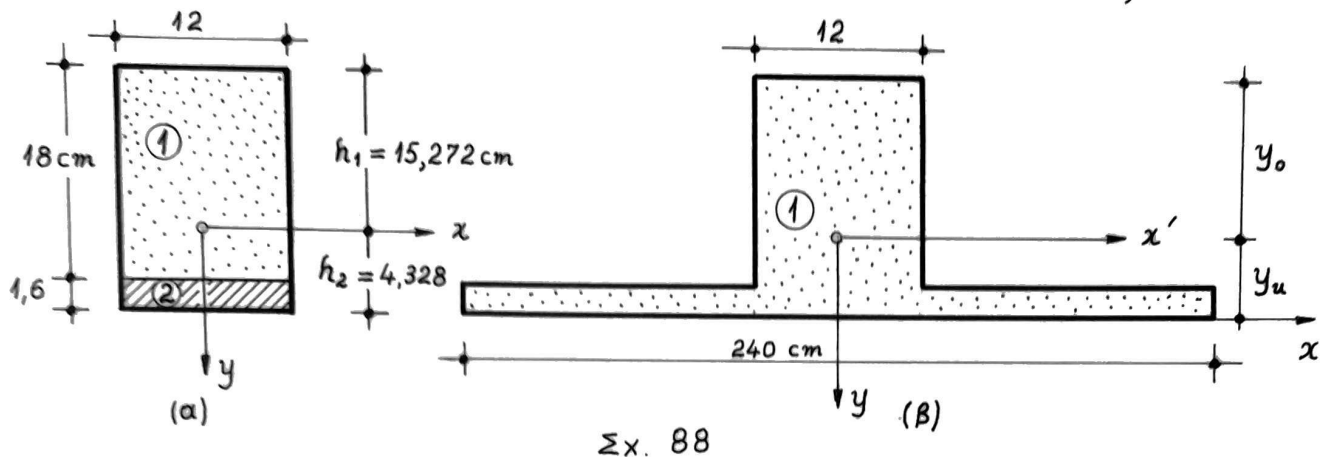
Είναι :

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{2 \times 10^6}{10^5} = 20 .$$

Υποθέτοντας ότι η ουδέτερη γραμμή βρίσκεται στο υλικό (1),

προσδιορίζουμε πρώτα τη θέση της.

Έτσι, αν h_2 η απόστασή της απ' την κοίτη ίνα της διατομής, οι στατικές ροπές που αναφέρονται στη σχέση (68), δίνουν:



$$S_1 = -(10,6 - h_2) \times 12 \times 18 = -216 (10,6 - h_2)$$

$$S_2 = (h_2 - 0,8) \times 12 \times 1,6 = 19,2 (h_2 - 0,8).$$

Επομένως: $-216 (10,6 - h_2) + 20 \times 19,2 (h_2 - 0,8) = 0,$

απ' όπου προκύπτει:

$$h_2 = 4,328 \text{ cm}, \text{ οπότε:}$$

$$h_1 = 19,6 - h_2 = 15,272 \text{ cm}.$$

Οι ροπές αδράνειας J_1 και J_2 των επιφανειών (1) και (2) ως προς την ουδέτερη γραμμή είναι αντίστοιχα:

$$J_1 = \frac{12 \times 18^3}{12} + 12 \times 18 (15,272 - 9)^2 = 14.329 \text{ cm}^4$$

$$J_2 = \frac{12 \times 1,6^3}{12} + 12 \times 1,6 (4,328 - 0,8)^2 = 243,07 \text{ cm}^4$$

Επαλήθευση: $J = \frac{12 \times 15,272^3}{3} + \frac{12 \times 4,328^3}{3} = 14.572,07 \text{ cm}^4 = J_1 + J_2 !$

Άρα η μέγιστη θλιπτική τάση που εμφανίζεται στο ξύλο, είναι:

$$\sigma_1 = -\frac{M}{J_1 + nJ_2} h_1 = -\frac{10^5 \cdot 15,272}{14.329 + 20 \cdot 243,07} = -79,6 \text{ kg/cm},$$

ενώ η μέγιστη εφελκυστική τάση που εμφανίζεται στο χάλυβα, είναι:

$$\sigma_2 = \frac{M \cdot n}{J_1 + nJ_2} h_2 = \frac{10^5 \cdot 20}{19.190,4} \cdot 4,328 = 451,05 \text{ kg/cm}.$$

Μετασχηματίζοντας τη σύνθετη διατομή του σχήματος (α) στην ενιαία ξύλινη διατομή του σχήματος (β), θα έχουμε:

$$y_k = \frac{240 \cdot 1,6 \cdot 0,8 + 12 \cdot 18 \cdot 10,6}{240 \cdot 1,6 + 12 \cdot 18} = 4,328 \text{ cm}$$

Άρα: $y_u = 4,328 \text{ cm}$ και $y_o = 15,272 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } J_{x'} &= \frac{12 \cdot 18^3}{12} + 12 \cdot 18 (15,272 - 9)^2 + \frac{240 \cdot 1,6^3}{12} + 240 \cdot 1,6 (4,328 - 0,8)^2 \\ &= 19.190,5 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Άρα: $\sigma_o = \sigma_{\min} \text{ ξύλου} = - \frac{10^5 \cdot 15,272}{19.190,5} = - 79,6 \text{ kg/cm}^2$

και $\sigma_u = \frac{10^5 \cdot 4,328}{19.190,5} = 22,553 \text{ kg/cm}^2.$

Επομένως η μέγιστη εφελκυστική τάση του χάλυβα θα είναι:

$$\sigma_{\max} \text{ χάλυβα} = 20 \cdot \sigma_u = 451,06 \text{ kg/cm}^2.$$

11. Διατμητική παραμόρφωση.

Στην παράγρ. 6 της σελ. 136 προσδιορίσαμε την ελαστική γραμμή μιάς καμπτόμενης δοκού λόγω της καμπτικής ροπής M , χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη την επίδραση της τέμνουσας δύναμης Q , η οποία προκαλεί ανάλογες παραμορφώσεις που οφείλονται στην ολίσθηση των γειτονικών διατομών μεταξύ τους.

Οι παραμορφώσεις αυτές, όπως θα δούμε παρακάτω, ενώ είναι ασημαντές για τις συνηθισμένες περιπτώσεις φορέων, γίνονται ιδιαίτερα σημαντικές όταν η δοκός έχει πολύ μικρό μήκος και μεγάλο ύψος διατομής, πράγμα που είναι σπάνιο στην πράξη.

Οι διατμητικές παραμορφώσεις σε μιά γενικά καμπτόμενη δοκό δεν υπολογίζονται εύκολα. Όταν όμως, για λόγους ακριβείας υπολογιστούν, τότε προσδίδονται σ' εκείνες που οφείλονται στην καμπτική ροπή, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας.

Επειδή η θεωρητική ανάπτυξη του θέματος ξεφεύγει από τα πλαίσια του βιβλίου αυτού, θα περιοριστούμε μόνο στις σχέσεις εκείνες που εκφράζουν τη μέγιστη υποχώρηση f ορισμένων χαλύβδινων δοκών, ορθογωνικής διατομής ύψους h και μήκους l , με

$$E/G = 2(\mu+1) = 2,6,$$

που προέρχεται απ' τη σύγχρονη δράση καμπτικών και διατμητικών παραμορφώσεων.

Στις εκφράσεις αυτές, όπου ο πρώτος όρος της παρένθεσης αντιστοιχεί στην καμπτική παραμόρφωση ενώ ο δεύτερος στη διατμητική,

- το α είναι αριθμητικός συντελεστής που μετατρέπει τη μέση διατμητική τάση σε $\tau_{\max}$ και έχει την τιμή $\alpha=1,5$ για ορθογωνική διατομή, και

- το i είναι η ακτίνα αδράνειας της διατομής, που δίνεται απ' τη σχέση: $i = \sqrt{J/F}$, και έχει την τιμή $i = h^2/12$ για ορθογωνική διατομή.

Οι παραπάνω αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις δοκών, είναι:

1. Αμφιέρειστη με καθολική ομοιόμορφη φόρτιση q

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{EJ} \left(1 + \frac{48}{5} \alpha \cdot \frac{i^2}{l^2} \cdot \frac{E}{G} \right) = \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{EJ} \cdot \left(1 + 3,12 \frac{h^2}{l^2} \right)$$

2. Αμφιέρειστη με συγκεντρωμένο φορτίο P στο μέσον

$$f = \frac{P l^3}{48 EJ} \cdot \left(1 + 12 \alpha \frac{i^2}{l^2} \cdot \frac{E}{G} \right) = \frac{P l^3}{48 EJ} \cdot \left(1 + 3,9 \frac{h^2}{l^2} \right)$$

3. Πρόβολος με συγκεντρωμένο φορτίο P στο ελεύθερο άκρο

$$f = \frac{P l^3}{3 EJ} \cdot \left(1 + 3 \alpha \frac{i^2}{l^2} \cdot \frac{E}{G} \right) = \frac{P l^3}{3 EJ} \cdot \left(1 + 0,98 \frac{h^2}{l^2} \right)$$

Απ' τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει ότι για $h/l = 1/10$, που είναι μία συνηθισμένη μορφή δοκού, η συμβολή της τέμνουσας δύναμης στη μέγιστη καμπτική υποχώρηση των παραπάνω δοκών, αντίστοιχα, είναι περίπου **3%**, **4%** και **1%**.

Η συμβολή αυτή αυξάνεται εφ' όσον ο λόγος h/l μεγαλώνει.

Γίνεται λοιπόν φανερός ο λόγος για τον οποίο η διατμητική παραμόρφωση στις συνηθισμένες περιπτώσεις δοκών δεν λαμβάνεται υπόψη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΛΥΓΙΣΜΟΣ

1. Η έννοια του λυγισμού στα υποτυλώματα.

Στην παράγραφο 3ε βελ. 10, γνωρίσαμε ήδη τον λυγισμό, σαν ειδική καταπόνηση κεντρικής θλίψης, όπου η ελάχιστη διάσταση στην εγκάρσια διατομή του ευθύγραμμου φορέα (υποτυλώματος, ράβδου κ.λ.π.) είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μήκος του.

Θεωρούμε λοιπόν μία τέτοια περίπτωση, και εξετάζουμε την ευστάθεια της ράβδου, όταν η αξονική θλιπτική δύναμη P που επιβάλλεται, αυξάνεται σταδιακά.

I. Στο αρχικό στάδιο της φόρτισης, όπου η P είναι μικρότερη μιάς κρίσιμης τιμής P_k που θα υπολογίσουμε πιο κάτω, η ισορροπία της ράβδου είναι ευσταθής.

Αυτό σημαίνει ότι αν η ράβδος καμπυλωθεί ελαφρά από κάποια εξωτερική αιτία, επανέρχεται αμέσως στην αρχική της ευθύγραμμη θέση, μόλις η αιτία εξαφανιστεί.

II. Άμα όμως η P , καθώς αυξάνει, λάβει την τιμή της P_k , τότε η ράβδος, μετά το εξωτερικό ερέθισμα, δεν επανέρχεται πιά στην αρχική της θέση, αλλά παραμένει στην ίδια θέση της καμπύλωσης, όπου και ισορροπεί.

Η ισορροπία της στο στάδιο αυτό χαρακτηρίζεται σαν αστάθεια.

III. Μικρή αύξηση της P , πέρα από την τιμή της P_k , προκαλεί απότομα στη ράβδο ακόμα μεγαλύτερη καμπύλωση από εκείνη που προκάλεσε αρχικά η εξωτερική αιτία, με άμεσο επακόλουθο την καταστροφή της.

Στο στάδιο αυτό η ισορροπία της ράβδου χαρακτηρίζεται α β τ α θ ή ς.

Ύστερα από τα παραπάνω, θα ονομάζουμε *λ υ γ ι σ μ ό*, το φαινόμενο κατά το οποίο μία ευθύγραμμη λεπτή ράβδος, όταν υποβληθεί σε κεντρική θλίψη με αυξανόμενη ένταση, μεταβαίνει, από κάποια τιμή της δύναμης και μετά, σε κατάσταση ασταδούς ισορροπίας, με αποτέλεσμα να καμπυλώνει με την επίδραση της παραμικρής εξωτερικής αιτίας.

Η συγκεκριμένη τιμή της δύναμης, μετά από την οποία εμφανίζεται το φαινόμενο του λυγισμού ονομάζεται *κρίσιμο φορτίο λυγισμού* P_k και αντιστοιχεί στην μεταξύ ευσταδούς και ασταδούς ισορροπίας μεταβατική κατάσταση του υλικού.

Είναι φανερό ότι στο στάδιο I, η παραπάνω ράβδος υφίσταται μόνο θλιπτική καταπόνηση, με ορθές τάσεις που δίνονται απ' τη σχέση $\sigma = P/F$.

Στην ιδανική περίπτωση που η ράβδος είναι εντελώς ευθύγραμμη και το θλιπτικό φορτίο ασκείται αξονικά ακριβώς στο κεντροειδές της διατομής της, είναι δυνατόν να έχουμε ισορροπία της ράβδου ακόμα και όταν η P είναι μεγαλύτερη της P_k . Όμως η ισορροπία αυτή είναι τόσο ασταδής, που η παραμικρή εξωτερική ενόχληση, μπορεί να προκαλέσει ένα ελάχιστο βέλος κάμψης, που αυξάνεται απότομα και οδηγεί τη ράβδο στη θραύση της.

Σαν κατάσταση είναι ανάλογη με την ισορροπία ενός μολυβιού κατακόρυφα στη μύτη του, που είναι δυνατή μόνο θεωρητικά.

Πραγματικά, στην πράξη υπάρχουν πάντοτε αίτια που μπορούν να προκαλέσουν πλάγια παραμόρφωση της ράβδου, όπως ελαφρά καμπυλότητα που μπορεί να γίνει στη ράβδο όταν κατασκευάζεται, έκκεντρη τοποθέτηση του φορτίου πάνω σ' αυτή, κ.λ.π. Γι' αυτό οι συντελεστές ασφαλείας έναντι λυγισμού είναι πάντα μεγαλύτεροι.

2. Η θεωρία και ο τύπος του Euler.

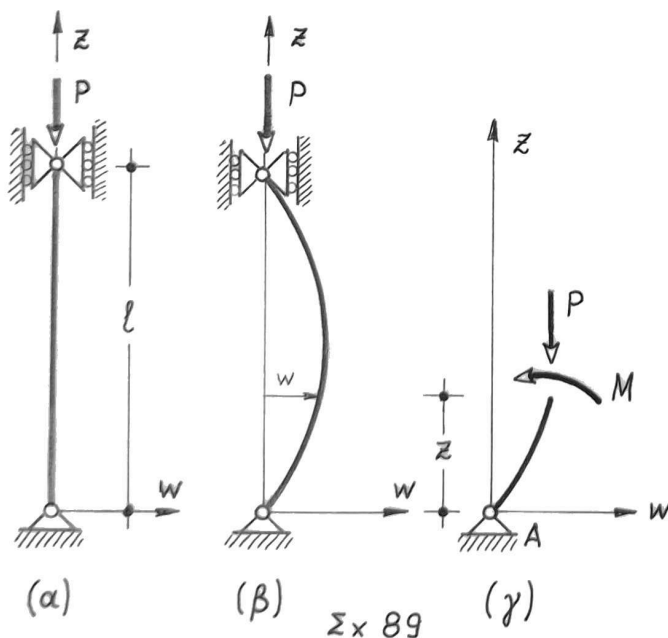
Ο φημισμένος Αυστριακός μαθηματικός Leonard Euler (1707–1783), που υπήρξε μαθητής του Bernoulli και θεωρείται ο μεγαλύτερος όλων των εποχών, ήταν ο πρώτος που διερεύνησε την περίπτωση λυγισμού μίας ράβδου και καθόρισε το κρίσιμο φορτίο της, το 1744.

Η θεωρία του στηρίζεται στις παρακάτω παραδοχές:

1. Η ράβδος είναι ιδανικά ευθύγραμμη
2. Το φορτίο ενεργεί ακριβώς στον άξονά της
3. Το υλικό της ράβδου είναι ισότροπο, δηλαδή έχει ίδιες ιδιότητες σε εφελκυσμό και θλίψη και
4. Ισχύει ο νόμος του Hooke, δηλαδή η ορθή τάση που αναπτύσσεται είναι μικρότερη απ' το όριο αναλογίας του υλικού.

Οι θεωρητικές αυτές παραδοχές, ιδιαίτερα η 1 και 2, έγιναν για να μπορεί το πρόβλημα του λυγισμού να αντιμετωπισθεί με προσιτά μαθηματικά μέσα.

Θεωρούμε λοιπόν την ευθύγραμμη ράβδο του σχήματος 89α,



μήκους l , η οποία στηρίζεται στο ένα της άκρο με άρθρωση, ενώ στο άλλο με αρθρωτή κύλιση, χωρίς τριβές.

Έστω P η τιμή του αξονικού φορτίου που προκαλεί το φαινόμενο λυγισμού στη ράβδο, η οποία, λόγω κάποιας εξωτερικής αιτίας, έχει πάρει την

ελαφρά καμπύλη μορφή του σχήμ. (β) και βρίσκεται σε ισορροπία.

Η μορφή αυτή είναι εκείνη που εμφανίζεται σε μία καμπτόμενη ράβδο (ελαστική γραμμή), λόγω της καμπτικής ροπής M , που προκαλεί η δύναμη P σε τυχούσα διατομή που απέχει απόσταση x απ' την στήριξη A (βλ. γ).

Προφανώς είναι :

$$M = P \cdot w$$

Επομένως η εξίσωση της ελαστικής γραμμής της ράβδου θα είναι:

$$EJw'' = -M = -P \cdot w,$$

$$\text{δηλαδή} \quad EJw'' + P \cdot w = 0 \quad \text{ή} \quad w'' + \frac{P}{EJ} w = 0. \quad (1)$$

$$\text{Και θέτοντας:} \quad \frac{P}{EJ} = u^2, \quad (\alpha)$$

η (1) γίνεται:

$$w'' + u^2 w = 0. \quad (2)$$

Η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης θα προκύψει αν βρούμε δύο μερικές λύσεις που να την ικανοποιούν.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$w = \eta \mu u x$$

είναι λύση της (2), επειδή είναι:

$$w' = u \sigma \nu u x \quad \text{και} \quad w'' = -u^2 \eta \mu u x,$$

και επομένως η (2) ικανοποιείται, αφού:

$$-u^2 \eta \mu u x + u^2 \eta \mu u x = 0!$$

Αλλά και η συνάρτηση

$$w = \sigma \nu u x$$

είναι λύση της (2), όπως πολύ εύκολα μπορούμε όμοια να διαπιστώσουμε.

Επομένως η γενική λύση της (2), θα είναι:

$$w = C_1 \eta \mu u x + C_2 \sigma \nu u x \quad (3)$$

όπου C_1 και C_2 είναι σταθερές οι οποίες υπολογίζονται απ' τις λεγόμενες οριακές συνθήκες ετήριξης της ράβδου, που εδώ εκφράζονται από το γεγονός ότι η πλάγια υποχώρηση της ράβδου στα άκρα της είναι μηδενική. Δηλαδή είναι:

Συνθήκη πρώτη: για $x = 0$ είναι $w = 0$

-||- δεύτερη: -||- $x = l$ -||- $w = 0$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη απ' αυτές στην (3), παίρνουμε:

$$0 = C_1 \eta \mu 0 + C_2 \epsilon \nu 0, \quad \eta \quad 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \Rightarrow C_2 = 0,$$

και επομένως η (3) γίνεται:

$$w = C_1 \eta \mu x. \quad (4)$$

Η δεύτερη, συνδυαζόμενη με την (4), δίνει:

$$C_1 \eta \mu l = 0. \quad (5)$$

Για να ισχύει η (5), θα πρέπει:

1. Είτε $C_1 = 0$

2. ή $C_1 \neq 0$ και $\eta \mu l = 0$.

Απ' την πρώτη περίπτωση προκύπτει ότι η πλάγια μετατόπιση w είναι μηδενική για οποιαδήποτε τιμή του x , επομένως η ράβδος παραμένει ευθεία. Έτσι η (5) ικανοποιείται για οποιαδήποτε τιμή της ποσότητας $u \cdot l$ και επομένως για οποιαδήποτε τιμή του φορτίου P , λόγω της (α)

Η λύση αυτή της διαφορικής εξίσωσης, που ονομάζεται εκφυλισμένη, και αντιστοιχεί σε ιδανική ράβδο που διατηρείται ευθύγραμμη σε ευσταθή ή αεσταθή ισορροπία, παριστάνεται με τον κατακόρυφο άξονα του διαγράμματος $P-w$ του σχήματος 90.

Όμως εάν λύση δεν μας ενδιαφέρει, γιατί αρχικά υποθέσαμε ότι η ράβδος έχει καμπυλωθεί.

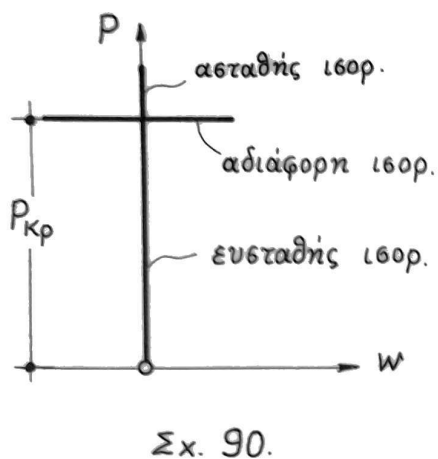
Απ' τη δεύτερη περίπτωση προκύπτει ότι

$$\eta \mu l = 0, \quad (6)$$

που συμβαίνει μόνον όταν :

$$u \cdot l = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Επειδή για $u \cdot l = 0$ προκύπτει λόγω της (α) ότι $P = 0$, που δείχνει ότι η ράβδος παραμένει αφόρτιστη, ούτε η λύση αυτή μας ενδιαφέρει.



Θεωρούμε λοιπόν την περίπτωση:

$$u \cdot l = n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

απ' όπου προκύπτει :

$$u = n \frac{\pi}{l} \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (7)$$

και λόγω της (α),

$$\frac{P}{EJ} = u^2 = n^2 \frac{\pi^2}{l^2},$$

προκύπτει τελικά :

$$P = n^2 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (8)$$

Η σχέση (8) δίνει τις τιμές της P που προκύπτουν απ' τη σχέση (5) και επομένως εκφράζει τις λύσεις (διαφορετικές της εκφυλισμένης) που ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση (4).

Έτσι η εξίσωση της ελαστικής γραμμής της ράβδου, θα προκύγει τώρα απ' την (4), όπου όμως το u παίρνει τη συγκεκριμένη τιμή που δίνεται απ' τη σχέση (7), δηλαδή θα είναι :

$$w = C_1 \pi n \frac{\pi}{l} z \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (9)$$

Θεωρητικά, η καμπύλωση της ράβδου είναι δυνατόν να γίνει μόνον όταν η P λαμβάνει τιμές που προκύπτουν απ' την (8) για ακέραια n . Για όλες τις άλλες (ενδιάμεσες) τιμές της P , η ράβδος ισορροπεί αν παραμείνει ευθεία.

Επομένως οι τιμές της P που δίνονται απ' τη σχέση (8), εκφράζουν ουσιαστικά τα κρίσιμα φορτία της ράβδου, το μικρότερο των οποίων, για $n=1$, είναι :

$$P_{\kappa\rho} = \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} \quad (10)$$

και ονομάζεται κρίσιμο φορτίο λυγισμού ή φορτίο του Euler.

Η αντίστοιχη εξίσωση της ελαστικής γραμμής που προκύπτει τώρα απ' τη σχέση (9) και παριστάνει τον λεγόμενο θεμελιώδη τύπο καμπύλης, (βλ. 91β), είναι:

$$w = C_1 \eta \mu \frac{\pi}{\ell} x. \quad (11)$$

Στην εξίσωση (11) η C_1 έχει την έννοια της μέγιστης απόκλισης, που εμφανίζεται στο μέσον της ράβδου και είναι θετική ή αρνητική. Πραγματικά, για $x = \ell/2$, έχουμε:

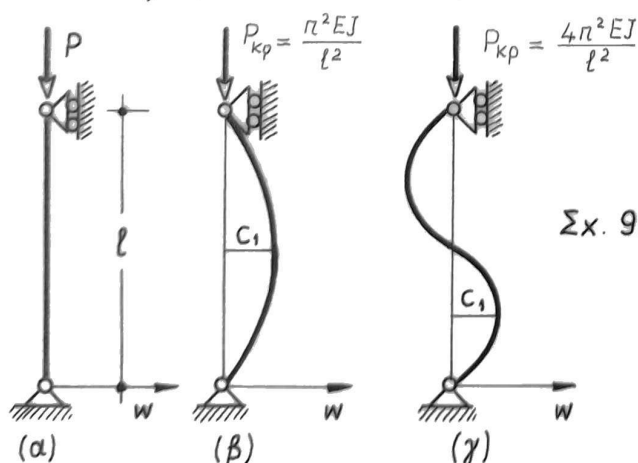
$$W = C_1 = W_{\max}.$$

Στο σχήμα 90 επομένως, το τμήμα του διαγράμματος $P-w$ που αντιστοιχεί στην τιμή $P_{\kappa\rho}$ είναι μία οριζόντια ευθεία εκατέρωθεν του κατακόρυφου άξονα.

Είναι φανερό, ότι η τιμή της C_1 , μολονότι είναι απροσδιόριστη, πρέπει να παραμένει πολύ μικρή σε σχέση με το μήκος της ράβδου, γιατί αυτό και αρχικά το υποθέσαμε, και επί πλέον για μεγαλύτερες τιμές της C_1 η ράβδος θα έσπαζε.

Η απροσδιοριστία αυτή της C_1 δείχνει ακριβώς το αδιάφορον της ισορροπίας της ράβδου.

Η καμπύλη του λυγισμού που προκύπτει απ' τη σχέση (11) είναι ημιτονοειδής, με σημεία καμπής τα άκρα της ράβδου.



Σχ. 91.

Δίνοντας όμως μεγαλύτερες τιμές του η στις εξισώσεις (8) και (9), παίρνουμε μία απείρια τιμών για τα κρίσιμα φορτία, σε συσχετισμό με τους αντίστοιχους τύπους ελαστικής γραμμής.

Στο σχήμα 91γ δίνεται ο τύπος της ελαστικής γραμμής για $n=2$, που έχει σαν αντίστοιχο κρίσιμο φορτίο τετραπλάσιο του $P_{κρ}$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ενώ το $P_{κρ}$ είναι ανάλογο του n^2 , ο αριθμός των τμημάτων της καμπύλης "μεταξύ δύο σημείων καμπής" είναι ανάλογος του n .

Τέτοιοι ανώτεροι τύποι λυγισμού ($n>1$) δεν παρουσιάζουν κανένα πρακτικό ενδιαφέρον, γιατί η ράβδος λυγίζει άμα η δύναμη P φτάει την τιμή της $P_{κρ}$.

Ο μόνος τρόπος για να πάρουμε ανώτερους τύπους λυγισμού, είναι να εξασφαλίσουμε πλευρική στήριξη στα "σημεία καμπής".

Συμπεράσματα.

Από διάφορα πειράματα λυγισμού έχει φανεί ότι, όταν η θλιπτική δύναμη πλησιάζει την τιμή της $P_{κρ}$, αρχίζει να εκδηλώνεται πλευρική κάμψη, που αυξάνει τόσο γρήγορα, ώστε όταν το φορτίο γίνει ίσο με το κρίσιμο, να έχει ήδη επέλθει ολοκληρωτική καταστροφή του δοκιμίου.

Έτσι, σαν κριτήριο αντοχής των λεπτών θλιβόμενων ράβδων θα πρέπει να λαμβάνεται πάντα το κρίσιμο φορτίο τους.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, το κρίσιμο αυτό φορτίο που προκύπτει απ' τη σχέση (10), δεν εξαρτάται καθόλου απ' την αντοχή του υλικού, αλλά απ' τις διαστάσεις (διατομή, μήκος) της ράβδου και απ' το μέτρο ελαστικότητάς της.

Αυτό σημαίνει ότι δύο λεπτές χαλύβδινες ράβδοι με ίσες διαστάσεις, που η μία είναι από χάλυβα υψηλής αντοχής ενώ η άλλη από κοινό χάλυβα, θα λυγίσουν κάτω απ' το ίδιο φορτίο, έστω και αν οι αντοχές των δύο υλικών διαφέρουν τόσο πολύ.

Η φορτοϊκανότητα μίας θλιβόμενης ράβδου μπορεί επίσης να αυξηθεί, αν η κατανομή του υλικού στη διατομή της γίνει έτσι, ώστε να προκύγει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας.

Γιὰ νὰ γίνει ὅμως αὐτὸ χωρὶς αὐξησὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς διατομῆς τῆς, θὰ πρέπει νὰ ἐπιδιώξουμε τὴν ἀπομάκρυνσιν τοῦ υἱικοῦ τῆς διατομῆς ἀπ' τὸ κεντροειδὲς τῆς.

Ἐτεῖ προκύπτει ὅτι, γιὰ θλιβόμενες ράβδους, οἱ διατομές σε σχῆμα κυκλικοῦ δακτυλίου εἶναι πρὸ οικονομικῆς ἀπὸ ἀλλῆς με πλήρη διατομὴ ἴσου ἐμβαδοῦ. Ἐπὶ πλέον ἔχουν τὸ πλεονέκτημα νὰ παρουσιάζουν ἰσὴ ἀντοχὴ σε ἰσχυρισμὸ πρὸς κάθε διεύθυνσιν.

Γιατὶ εἶναι φανερό ὅτι σε ράβδο με τυχούσα διατομή, ὁ ἰσχυρισμὸς θὰ γίνει σε ἐπίπεδο κάθετο πρὸς τὸν ἀξονα τῆς διατομῆς ὡς πρὸς τὸν ὁποῖο ἡ ροπή ἀδράνειας εἶναι ελάχιστη.

Ἡ ἐπίδραση πὺ μπορεῖ νὰ ἔχει τὸ ἴδιο βάρος τῆς ράβδου ἐπὶ κρίσιμο φορτίο τῆς εἶναι σχεδὸν πάντοτε ἀμελητέα, γιατί σεις διάφορες ἐφαρμογές, τὸ βάρος τῆς ράβδου εἶναι γενικὰ μικρὸ σε σχέση με τὸ κρίσιμο φορτίο τῆς.

3. Επίδραση τῶν συνθηκῶν στα ἄκρα τοῦ στύλου.

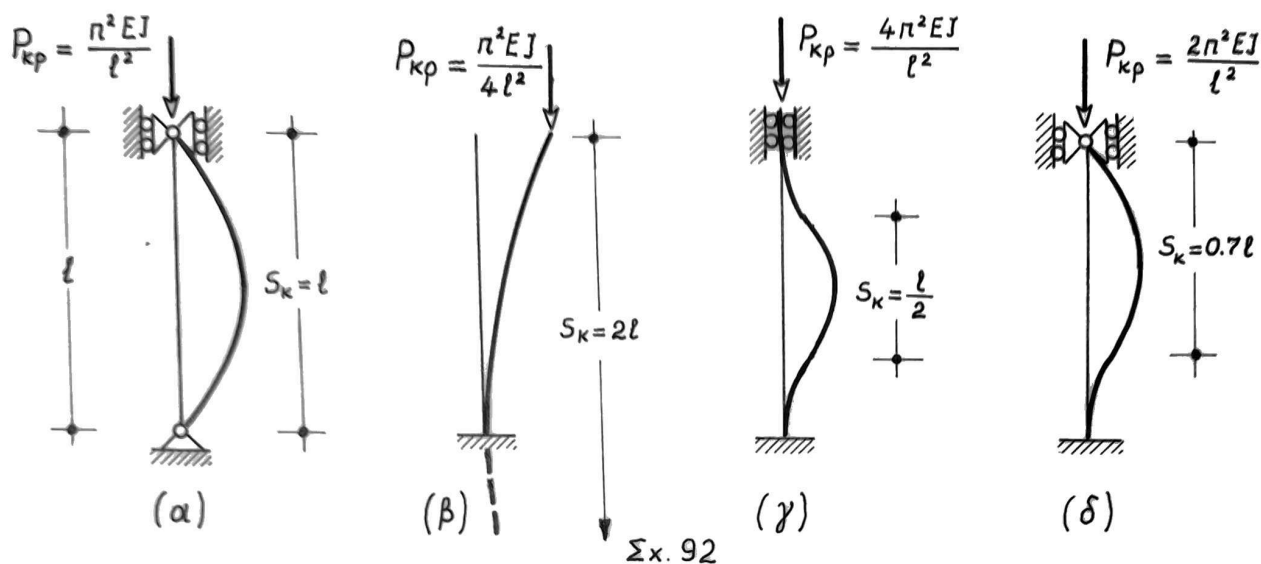
Ὅταν ἡ ἐτήριξη τῆς ράβδου πὺ ὑπὸκειται σε ἰσχυρισμὸ δὲν εἶναι ἀμφιαρθρωτὴ ὅπως αὐτὴ πὺ ἥδη ἐξετάσαμε, τότε ἡ ἐλαστικὴ τῆς γραμμὴ εἶναι πάλι ημιτονοειδής. Ὅμως τὰ σημεῖα καμπῆς τῆς (πραγματικὰ ἢ φανταστικὰ), δὲν εἶναι σεις ἐστηρίξεις, ἀλλὰ σε διαφορετικὲς θέσεις, τέτοιες, ὥστε μεταξύ δύο διαδοχικῶν σημείων καμπῆς ἡ ἐλαστικὴ γραμμὴ νὰ εἶναι ἡ ἴδια γιὰ κάθε περίπτωση ἐτήριξης.

Γίνεται λοιπὸν σαφές ὅτι ἐκεῖνο πὺ χαρακτηρίζει τὸ κρίσιμο φορτίο ἰσχυρισμοῦ δὲν εἶναι τὸ μήκος τῆς ράβδου αὐτὸ καθ' ἑαυτὸ ἀλλ' ἡ ἀπόσταση μεταξύ δύο διαδοχικῶν σημείων καμπῆς τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς πὺ ονομάζεται μήκος ἰσχυρισμοῦ καὶ συμβολίζεται με S_k

Τὸ μήκος ἰσχυρισμοῦ διαφέρει σε κάθε ράβδο, ἀνάλογα με τὸν

τρόπο στήριξής της.

Στο σχήμα 92 παρουσιάζονται τέσσερις διαφορετικοί τρόποι στήριξης των άκρων μιάς ράβδου μήκους l , με το αντίστοιχο, για την κάθε περίπτωση, μήκος λυγισμού S_K . Συγκεκριμένα:



Σχ. 92

Περίπτωση (α): Δύο αρθρώσεις εκ των οποίων η μία κυλιόμενη, που ήδη εξετάστηκε

- ||- (β): Μία πάκτωση με το άλλο άκρο ελεύθερο
- ||- (γ): Δύο πακτώσεις εκ των οποίων η μία κυλιόμενη
- ||- (δ): Μία πάκτωση και μία άρθρωση κυλιόμενη.

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του μήκους λυγισμού και το γεγονός ότι ο στύλος καμπυλώνεται σε επίπεδο κάθετο του άξονα της διατομής ως προς τον οποίο η ροπή αδράνειας είναι ελάχιστη (J_{min}), το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της σχέσης (10) εκφράζεται τώρα με την γενική σχέση:

$$P_{KP} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{S_K^2}, \quad (12)$$

που είναι ενιαία για κάθε περίπτωση στήριξης του στύλου.

Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι τιμές του μήκους λυγισμού, του κρίσιμου φορτίου και του λόγου του κρίσιμου φορτίου προς εκείνο της περίπτωσης (α), που αντιστοιχούν στους τρόπους στήριξης του σχ. 92.

Περίπτ.	Τρόπος στήριξης	Μήκος λυγισμού S_K	Κρίσιμο φορτίο P_K	$P_K : P_{K(a)}$
(α)	Άρθρωση - κιν. άρθρ.	l	$\pi^2 EJ / l^2$	1:1
(β)	Πάκτωση - ελεύθ. άκρ.	$2l$	$\pi^2 EJ / 4l^2$	1:4
(γ)	- - - κιν. πάκτ.	$l/2$	$4\pi^2 EJ / l^2$	4:1
(δ)	- - - - άρθρ.	$0.7l$	$2\pi^2 EJ / l^2$	2:1

Για την ευνοϊκότερη αντιμετώπιση του λυγισμού στην πράξη, π.χ. παραλαβή μεγαλύτερου κρίσιμου φορτίου από συγκεκριμένη διατομή, φροντίζουμε να διαμορφώσουμε τις στήριξεις των θλιβομένων ράβδων, έτσι, ώστε να λειτουργούν κατά το δυνατόν σαν πακτώσεις.

Όμως επειδή θεωρητικά οι πακτώσεις δεν είναι ποτέ τέλειες, στους υπολογισμούς δεν λαμβάνεται υπόψη το πλεονέκτημα της πακτώσεως, αλλά θεωρείται ότι οι ράβδοι στήριζονται αρθρωτά, και συνεπώς έχουν σαν κρίσιμο φορτίο, το:

$$P_{Kp} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2} \quad (S_K = l).$$

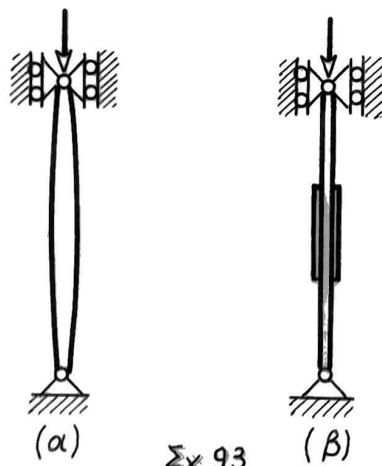
4. Βέλτιστοι τύποι υποστυλμάτων.

Όπως είναι γνωστό, τα περισσότερα υποστυλώματα σήμερα είναι πρισματικά, δηλαδή η διατομή τους είναι σταθερή σ' όλο το μήκος.

Όμως σ' ένα υποστυλόμενο που αποτελείται από μία συγκεκριμένη ποσότητα ύλης, το κρίσιμο φορτίο είναι δυνατόν να αυξηθεί σημαντικά αν αυξήσουμε τη διατομή του στο κεντρικό τμήμα του μήκους του.

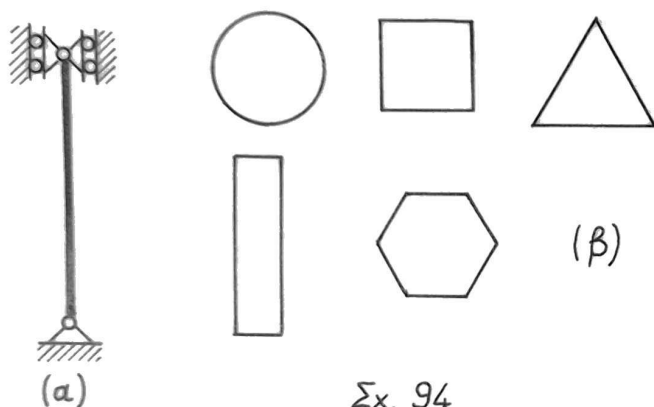
Η "ιχθυοειδής" π.χ. μορφή του υποστυλώματος του σχ. 93α μπορεί να παραλάβει πολύ μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο απ' εκείνο που θα παραλάμβανε πρισματικό υποστυλόμενο ίσου μήκους με τον ίδιο όγκο. Φυσικά η κατασκευή ενός τέτοιου υποστυλώματος δεν είναι πρακτικά εύκολη.

Όμως τα πρισματικά υποστυλώματα είναι δυνατόν να "οπλιστούν" με εξωτερικό μανδύα γύρω ένα κεντρικό τους τμήμα, βλ. 93β, δημιουργώντας έτσι ευνοϊκότερες συνθήκες για την αντιμετώπιση του λυγισμού.



Σχ. 93

Ας θεωρήσουμε τώρα την αμφιαρθρωτή ράβδο του βλ. 94α, που μπορεί να λυγίσει προς οποιαδήποτε διεύθυνση.



Σχ. 94

Η διατομή της ράβδου είναι δυνατό να έχει σχήμα κύκλου, τετραγώνου, ισοπλευρού τριγώνου, ορθογωνίου ή εξαγώνου (βλ. β).

Αν οι παραπάνω διατομές είναι ισοδύναμες (έχουν το ίδιο εμβαδόν),

ποιά απ' όλες θα δώσει την αποδοτικότερη ράβδο;

Δηλαδή μ' άλλα λόγια το ερώτημα που τίθεται είναι, ποιά διατομή μπορεί να παραλάβει το μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο λυγισμού που προκύπτει απ' τη σχέση $P_{kr} = \pi^2 EI_{min} / l^2$;

Η διαίεθηση των περιεβοτέρων ανδρώπων οδηγεί στην εκλογή της κυκλικής διατομής.

Όμως εύκολα αποδεικνύεται ότι η ελάχιστη ροπή αδράνειας (I_{min}) της διατομής του ισοπλευρού τριγώνου είναι κατά 21% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της κυκλικής διατομής ενώ παραμένει μεγαλύτερη εκείνης των υπολοίπων σχημάτων.

Έτσι, την πιο αποδοτική ράβδο θα δώσει η τριγωνική διατομή, μιάς και στη σχέση που εκφράζει το κρίσιμο φορτίο, οι υπόλοιποι όροι είναι σταθεροί.

Πρακτικά τα υποστρώματα εξαναγκάζονται να λυγίζουν σε ένα μόνο επίπεδο, και επομένως το σχήμα της διατομής πρέπει να εκλέγεται έτσι, ώστε να δίνει μια μεγάλη ροπή αδράνειας στο επίπεδο αυτό.

Στις βιομηχανικές κατασκευές οι διατομές των υποστρώματων (διπλά ταύ κ.λ.π.) είναι τέτοιες που να ικανοποιούν την απαίτηση αυτή.

Στις κατασκευές από οπλισμένο βκυρόδεμα ή ξύλο χρησιμοποιούνται συνήθως ορθογωνικές ή κυκλικές διατομές.

Τα σχήματα των κατασκευών που χρησιμοποιούνται στην αεροναυπηγική ή στα αυτοκίνητα ποικίλουν, ανάλογα με την εκάστοτε απαίτηση.

Γενικά όμως, όπως τονίστηκε πιο πριν, οι διατομές που έχουν εσωτερικά κενό είναι πιο αποδοτικές, επειδή παρουσιάζουν μεγαλύτερη ροπή αδράνειας για ίδιο εμβαδόν διατομής.

5. Ελαστικός και πλαστικός λυγισμός.

Από το γενικό τύπο του Euler

$$P_{κρ} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{S_{κ}^2}$$

προσδιορίζεται η λεγόμενη τάση λυγισμού $\sigma_{κ}$, που αναπτύσσεται στη διατομή της ράβδου κατά την στιγμή που εμφανίζεται το φαινόμενο του λυγισμού, οπότε η ράβδος αναλαμβάνει το κρίσιμο φορτίο.

Πραγματικά, αν F το εμβαδόν της διατομής της ράβδου, θα είναι:

$$\sigma_{κ} = \frac{P_{κρ}}{F} = \frac{\pi^2 E}{S_{κ}^2} \cdot \frac{I_{min}}{F} = \frac{\pi^2 E}{S_{κ}^2} \cdot i_{min}^2 \quad (13)$$

όπου $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}}$ η ελάχιστη ακτίνα αδράνειας της διατομής.

Η σχέση (13) μπορεί ακόμα να γραφεί:

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{S_K}{i_{\min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (14)$$

Ο λόγος $\lambda = S_K / i_{\min}$ ονομάζεται *λ υ γ η ρ ό τ η τ α* της ράβδου και είναι καθαρός αριθμός. Η λυγηρότητα δίνει ένα μέτρο λεπτότητας της ράβδου και επομένως εκφράζει το μέγεθος της ευαισθησίας της σε λυγισμό.

Η εξίσωση (14), που παριστάνει κυβική υπερβολή, αποτελεί την ανηγμένη μορφή του τύπου του Euler και εκφράζει την μεταβολή της κρίσιμης τάσης λυγισμού σε σχέση με τη λυγηρότητα της ράβδου.

Αν λάβουμε υπόψη ότι το μέτρο ελαστικότητας E για τα διάφορα είδη του ελατού βιδήρου και χάλυβα είναι το ίδιο, συμπεραίνουμε ότι, σε τέτοιες κατασκευές η τάση λυγισμού δεν εξαρτάται απ' την ποιότητα αλλά μόνον απ' τη λυγηρότητα λ της ράβδου.

Πειραματικά διαπιστώθηκε ότι ο τύπος του Euler δίνει εξαγόμενα σύμφωνα με τα δεδομένα του πειράματος, μόνον όταν η λυγηρότητα λ είναι μεγαλύτερη από κάποια συγκεκριμένη τιμή, που ποικίλει ανάλογα με το χρησιμοποιούμενο υλικό.

Επομένως για να εμφανιστεί λυγισμός, θα πρέπει το μήκος της ράβδου να είναι μεγαλύτερο από κάποιο πολλαπλάσιο της ακτίνας αδράνειας $i_{\min}$.

Εξ άλλου ο τύπος του Euler βρέθηκε με την προϋπόθεση ότι το υλικό της ράβδου ακολουθεί το νόμο του Hooke. Αυτό σημαίνει ότι η κρίσιμη τάση λυγισμού σ_K θα πρέπει πάντα να είναι μικρότερη από το όριο αναλογίας του υλικού.

$$\sigma_K \leq \sigma_A \quad \text{ή} \quad \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_A \implies \lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_A}}. \quad (15)$$

Η σχέση (15) δείχνει ότι, για να ισχύει ο νόμος του Hooke, δηλαδή να έχει εφαρμογή ο τύπος του Euler, θα πρέπει η

λυγηρότητα να είναι μεγαλύτερη από την τιμή:

$$\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{E}{6_A}}$$

που αντιστοιχεί στο όριο αναλογίας του υλικού και ονομάζεται οριακή λυγηρότητα

Έτσι, αν η λυγηρότητα λ της ράβδου είναι μεγαλύτερη της λ_a , ο λυγισμός γίνεται με τάξεις που βρίσκονται στην ελαστική περιοχή των τάσεων, ενώ αν η λ είναι μικρότερη της λ_a ο λυγισμός θα γίνει με τάξεις μεγαλύτερες της σ_A που αντιστοιχούν στην πλαστική περιοχή του υλικού.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε τον ελαστικό λυγισμό, ενώ στη δεύτερη τον πλαστικό.

Ενδεικτικά για χαλβυα St 37, με $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ και $\sigma_A \approx 2.050 \text{ kg/cm}^2$, η οριακή λυγηρότητα είναι:

$$\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^6}{2.050}} = 100$$

6. Ο τύπος του Tetmayer.

Στον πλαστικό λυγισμό, όπου είναι $\lambda < \lambda_a$, η τάση λυγισμού σ_k προφανώς είναι μεγαλύτερη της σ_A παίρνοντας τιμές μεγαλύτερες για μικρότερα λ .

Είναι όμως φανερό, ότι αν η σ_k , καθώς αυξάνεται, φθάσει την τιμή του ορίου διαρροής σ_s του υλικού, η ράβδος γίνεται πλέον άχρηστη σαν στοιχείο κατασκευής γιατί θεωρείται πρακτικά ότι εξάντλησε τη φορτική της ικανότητα και επομένως η αντιμετώπιση του λυγισμού στην κατάσταση αυτή δεν παρουσιάζει κανένα ενδιαφέρον. Επομένως θα πρέπει να είναι:

$$\sigma_k \leq \sigma_s \quad (16)$$

Για τις τιμές της θ_k που κυμαίνονται ανάμεσα στο όριο αναλογίας και το όριο διαρροής του υλικού, ο Tetmayer δι-
ετύπωσε, ύστερα από πειραματική έρευνα, μία νέα σχέση που
εκφράζει την θ_k σαν γραμμική συνάρτηση της λυγνρότητας λ ,

$$\sigma_k = \alpha - b \cdot \lambda, \quad (17)$$

όπου οι σταθερές a και b προσδιορίζονται πειραματικά και είναι διαφορετικές για κάθε υλικό.

Για κάλυψες π.χ. St 37, St 48 και St 52, η σχέση 17
γράφεται αντίστοιχα:

[illegible]

ενώ για διάφορα ξύλα (δρύς οξυά κ. λ. π.) είναι:

$$\sigma_K = 375 - 2,75 \lambda \quad \text{για} \quad 1,8 \leq \lambda \leq 100 \quad (17\beta)$$

Η περιοχή ισχύος του τύπου του Tetmajer (σχέση 17),
προσδιορίζεται απ' τη συνθήκη (16), οπότε θα πρέπει:

$$a - b\lambda \leq \delta_s \implies \lambda \geq \frac{a - \delta_s}{b}. \quad (18)$$

Η οριακή τιμή $\lambda_s = \frac{\alpha - \epsilon_s}{b}$ ονομάζεται ελάχιστη λυ-
γυρότητα και είναι απαραίτητη για να λάβει χώρα ο πλα-
στικός λυγισμός.

7. Διερεύνηση - έλεγχος αντοχής.

Απ' όσα έχουν πιο πάνω αναπτυχθεί, προκύπτει ότι ο πλα-
στικός λυγιμός εμφανίζεται μόνον όταν η λυγηρότητα λ , είναι:

$$\lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_\alpha. \quad (19)$$

Για τιμές της αυξηρότητας μικρότερες της λ_s δεν υπάρχει

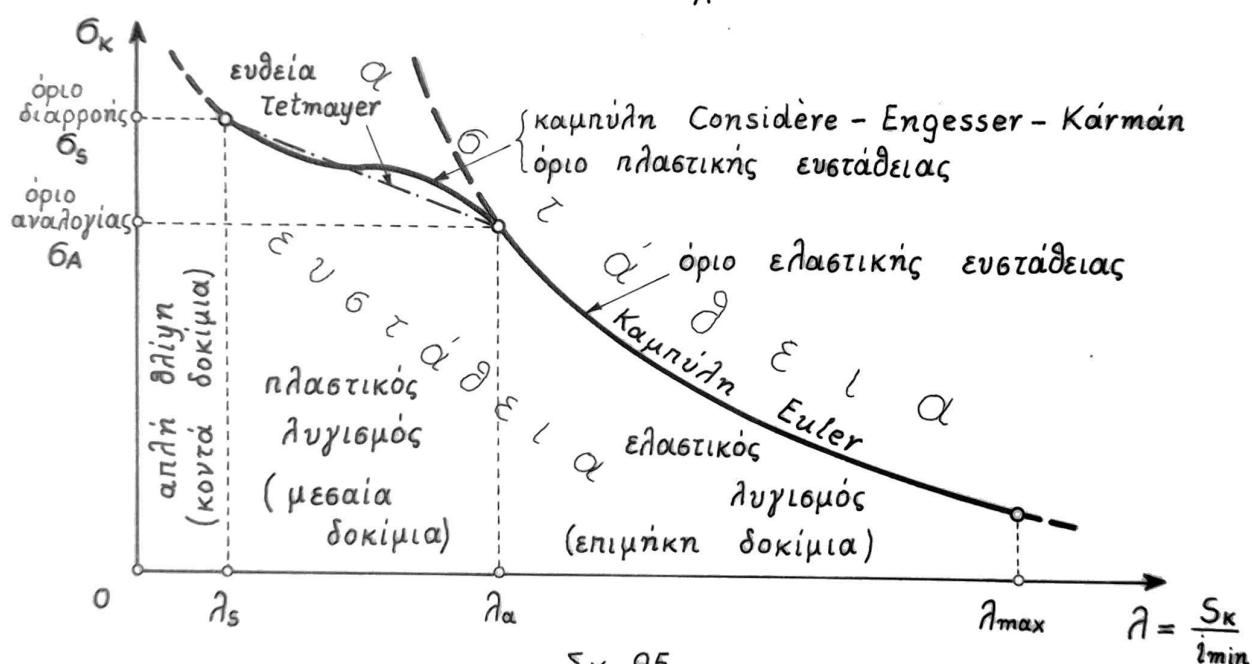
καν φαινόμενο λυγισμού και η ράβδος υπολογίζεται απλά σε θλίψη.

Απ' την άλλη μεριά όμως, όταν η λυγηρότητα, όντας μεγαλύτερη της λ_a , είναι πολύ μεγάλη, η τάση λυγισμού που προκύπτει απ' τη σχέση (14) είναι πολύ μικρή και επομένως ο λυγισμός εμφανίζεται για πολύ μικρές τιμές του φορτίου.

Έτσι η ράβδος είναι πάλι άχρηστη σαν στοιχείο κατασκευής. Γι αυτό στην πράξη γενικά δεν χρησιμοποιούνται ράβδοι με λυγηρότητα μεγαλύτερη της $\lambda_{\max} = 200 \div 250$.

Για τον ελαστικό λυγισμό βρήκαμε ήδη, (σχέση 14), ότι είναι:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$



Στο σύστημα συντεταγμένων $\lambda - \sigma_k$ του σχ. 95 η σχέση αυτή παριστάνεται απ' τη λεγόμενη κυβική υπερβολή του Euler.

Για τον πλαστικό όμως λυγισμό, οι ερευνητές Considère, Engesser, Kármán κ.λ.π. (βλέπε παράρτημα βελ. Πθ) βρήκαν θεωρητικά και πειραματικά ότι ισχύει η σχέση:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 T}{\lambda^2} \quad (20)$$

που είναι ανάλογη με τη σχέση (14) του Euler, όπου όμως το T παριστάνει το λεγόμενο "εφαπτομενικό" ή "μειωμένο" μέτρο ελαστικότητας, μεταβλητό και δύσκολα προσδιοριζόμενο συνάρτησει του λ . Η σχέση (20) παριστάνεται στο σχ. 95 με την ομώνυμη καμπύλη των παραπάνω ερευνητών, που όμως, επειδή η μορφή της δεν μπορεί να δοθεί με απλή εξίσωση, στην πράξη αντικαθίσταται με την ευθεία του Tetmayer, (σχέση 17).

Ο υπολογισμός των θλιβομένων ράβδων σε λυγισμό, γίνεται τώρα με το σκεπτικό ότι η υπάρχουσα θλιπτική τάση που αναπτύσσεται στη ράβδο πρέπει να είναι μικρότερη του πηλίκου σ_k/ν , όπου σ_k είναι η γνωστή τάση λυγισμού, που εδώ παίζει τον βασικό ρόλο ατοχίας και ν ο συντελεστής ασφαλείας σε λυγισμό.

$$\sigma_{\text{th}} \leq \frac{\sigma_k}{\nu}.$$

Στην παραπάνω σχέση, αν αντικαταστήσουμε την σ_{th} με το πηλίκο P/F όπου P το φορτίο και F η διατομή της ράβδου και την σ_k με την τιμή που παίρνουμε είτε απ' τη σχέση (14) για τον ελαστικό λυγισμό είτε από μία των σχέσεων 17α, 17β, 20 για τον πλαστικό, θα βρούμε μία σχέση μεταξύ των P , F , λ , E και ν απ' την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε την άγνωστη παράμετρο, που συνήθως είναι ή η P ή η λ .

Τα προβλήματα αυτού του είδους ακολουθούν συνήθως κυκλικές λύσεις με δοκιμές.

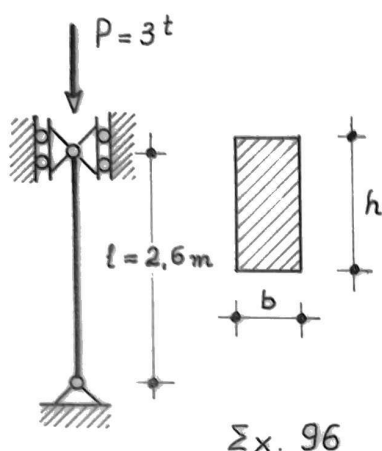
Παράδειγμα.

Η χαλύβδινη ράβδος του σχ. 96 έχει μήκος 2,2 m και φέρει αξονικό φορτίο $P=3\text{ t}$. Να προσδιοριστούν οι απαραίτητες διαστάσεις της διατομής της, όταν αυτή είναι:

- α) ορθογωνική με λόγο πλευρών $h/b = 2$,
- β) τετραγωνική με πλευρά b , και

γ) Ισοσκελές γωνιακό έλασμα L. Δίνονται:
 Συντελεστής ασφαλείας σε λυγισμό $\gamma = 2,5$
 Επιτρεπόμενη θλιπτική τάση $\sigma_{ελ} = 1400 \text{ kg/cm}^2$
 Μέτρο ελαστικότητας $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

Λύση.



α) Η διατομή της ράβδου και η ελάχιστη ακτίνα αδράνειας της διατομής της είναι αντίστοιχα:

$$F = b \cdot h = b \cdot 2b = 2b^2 \quad (i)$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{hb^3}{12}\right)}{bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}} \quad (ii)$$

Ξεκινώντας απ' τον υπολογισμό σε αλή

θλίψη, θα πρέπει:

$$\sigma_{υη} = \frac{P}{F_{αη}} \leq \sigma_{ελ} \quad \text{ή} \quad \frac{3.000}{2b^2} \leq 1400 \Rightarrow b \geq 1,035 \text{ cm.}$$

Η διατομή που προκύπτει τότε έχει ελάχιστη ακτίνα αδράνειας

$$i_{min} = \frac{1,035}{\sqrt{12}} = 0,3 \text{ cm}$$

και επομένως η αντίστοιχη λυγνρότητα της ράβδου είναι

$$\lambda = \frac{220}{0,3} = 733 \gg 250, \quad (iii)$$

που όμως, επειδή είναι πολύ μεγαλύτερη του 250, απορρίπτεται.

Ουσιαστικά επιθυμούμε εδώ να εντοπίσουμε τη μεγαλύτερη λυγνρότητα μεταξύ 100 και 250, για να εξασφαλίσουμε ελαστικό λυγισμό σε χρήσιμη και ασφαλή ράβδο. Άρα, θα πρέπει:

$$\lambda \leq 250 \quad \text{ή} \quad \frac{220}{i_{min}} \leq 250 \Rightarrow i_{min} \geq 0,88 \text{ cm.}$$

Αυτή η ακτίνα αδράνειας αντιστοιχεί, βάσει των (ii) και (i), σε διατομή με:

$$b = 0,88 \cdot \sqrt{12} = 3,05 \text{ cm}$$

$$\text{και} \quad F = 2 \cdot 3,05^2 = 18,6 \text{ cm}^2.$$

Γιά $\lambda = 250$ η τάση λυγισμού σ_k , (εξέση 14), είναι:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{250^2} = 332 \text{ kg/cm}^2$$

και επομένως η υπάρχουσα τάση στη ράβδο θα πρέπει να είναι μικρότερη της

$$\frac{\sigma_k}{\nu} = \frac{332}{2,5} = 132,8 \text{ kg/cm}^2.$$

Η τάση όμως στη ράβδο είναι:

$$\sigma_{\text{υπ}} = \frac{P}{F} = \frac{3.000}{18,6} = 161,3 \text{ kg/cm}^2 > 132,8.$$

Άρα θα πρέπει να εκλέξουμε μεγαλύτερη διατομή.

Γιά $b = 3,5 \text{ cm}$, οι σχέσεις (i), (ii) και (iii) δίνουν αντίστοιχα:

$$F = 2 \cdot 3,5^2 = 24,5 \text{ cm}^2, \quad i_{\min} = \frac{3,5}{\sqrt{12}} = 1,01 \text{ cm} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{220}{1,01} = 218.$$

$$\text{Άρα:} \quad \sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{218^2} = 436 \text{ kg/cm}^2$$

και επομένως θα πρέπει:

$$\sigma_{\text{υπ}} = \frac{P}{F} = \frac{3.000}{24,5} = 122,4 \text{ kg/cm}^2 \leq \frac{\sigma_k}{\nu} = \frac{436}{2,5} = 174,4 \text{ kg/cm}^2,$$

πράγμα που ισχύει. Αν επιδιώκουμε μεγαλύτερη οικονομία υλικού ή ακρίβεια διαστάσεων, μπορούμε να δοκιμάσουμε μία ενδιαμέση τιμή π.χ. $b = 3,3 \text{ cm}$, οπότε προκύπτει αντίστοιχα:

$$F = 2 \cdot 3,3^2 = 21,78 \text{ cm}^2, \quad i_{\min} = \frac{3,3}{\sqrt{12}} = 0,95 \text{ cm}, \quad \lambda = \frac{220}{0,95} = 232$$

$$\sigma_k = \frac{20,72 \cdot 10^6}{232^2} = 385 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{και} \quad \sigma_{\text{υπ}} = \frac{3.000}{21,78} = 137,7 \text{ kg/cm}^2 \leq \frac{385}{2,5} = 154, \quad \text{που ισχύει.}$$

β) Αν η διατομή ήταν τετράγωνη, θα είχαμε:

$$F = b^2 \quad i_{\min} = b/\sqrt{12}$$

Αρχικά λοιπόν (υπολογισμός βε θλίψη), θα είχαμε:

$$\sigma_{\text{υπ}} = \frac{3000}{F_{\text{απ}}} \leq 1400 \quad \text{ή} \quad b \geq 1,46 \text{ cm}$$

Η διατομή με $b = 1,46 \text{ cm}$ δίνει:

$$i_{\text{min}} = \frac{1,46}{\sqrt{12}} = 0,42 \text{ cm} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{220}{0,42} = \gg 250, \text{ απορρίπτεται.}$$

$$\text{Γιά } \lambda = 250 \quad \text{ή} \quad \frac{220}{i_{\text{min}}} = 250, \quad \text{δηλαδή} \quad i_{\text{min}} = 0,88 \text{ cm}$$

προκύπτει διατομή με $b = 3,05 \text{ cm}$ και $F = 9,3 \text{ cm}^2$, που έχει:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = 332 \text{ kg/cm}^2.$$

Άρα θα πρέπει να είναι:

$$\sigma_{\text{υπ}} = \frac{P}{F} \leq \sigma_{\text{επ}} \quad \text{ή} \quad \frac{3.000}{9,3} \leq \frac{332}{2,5} \quad \text{δηλαδή} \quad 322 \leq 132,8,$$

που όμως δεν ισχύει, γιαυτό αυξάνουμε τη διατομή.

Γιά $b = 4 \text{ cm}$ προκύπτουν αντίστοιχα:

$$F = 16 \text{ cm}^2, \quad i_{\text{min}} = 4/\sqrt{12} = 1,15 \text{ cm}, \quad \lambda = 220/1,15 = 191$$

$$\sigma_k = \frac{20,72 \cdot 10^6}{191^2} = 568 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Άρα πρέπει: } \frac{3.000}{16} \leq \frac{568}{2,5} \quad \text{ή} \quad 187,5 \leq 227,2,$$

πράγμα που ισχύει. Γιά μεγαλύτερη όμως ακρίβεια, δοκιμάζουμε με $b = 3,8 \text{ cm}$, οπότε έχουμε αντίστοιχα:

$$F = 14,44 \text{ cm}^2, \quad i_{\text{min}} = 1,1 \text{ cm} \quad \text{και} \quad \lambda = 200,$$

$$\text{ενώ:} \quad \sigma_k = \frac{20,72 \cdot 10^6}{200^2} = 518.$$

$$\text{Θα πρέπει λοιπόν: } \frac{3.000}{14,44} \leq \frac{518}{2,5} \quad \text{ή} \quad 207,7 \leq 207,2$$

πράγμα που ισχύει οριακά. Εκλέγεται λοιπόν $b = 3,8 \text{ cm}$.

Γίνεται τώρα φανερό η οικονομία που προκύπτει στο υλικό της ράβδου που καταπονείται σε λυγισμό, όταν αποφεύγεται το επίμηκες σχήμα της διατομής της.

γ) Ο υπολογισμός δε θλίψη δίνει:

$$\frac{P}{F_{αλ}} \leq \sigma_{επ} \quad \text{ή} \quad F_{αλ} \geq \frac{3.000}{1.400} = 2,14 \text{ cm}^2$$

Απ' τους πίνακες των ισοσκελών γωνιακών ελασμάτων προκύπτει ότι η απαιτούμενη αυτή διατομή καλύπτεται από το L 25×5.

Περιορίζοντας το επίπεδο λυγισμού σε διεύθυνση παρ/λη του άξονα x-x της διατομής, το γωνιακό αυτό έχει $i_{min} = 0,69 \text{ cm}$.

(Αν ο λυγισμός ήταν ελεύθερος, θα θεωρούσαμε τη δυσμενέστερη διεύθυνσή του, που βρίσκεται στο κάθετο του άξονα η-η επίπεδο, οπότε θα είχαμε $i_{min} = i_n = 0,47 \text{ cm}$).

Έτσι η λυγηρότητα της ράβδου είναι:

$$\lambda = \frac{220}{0,69} = 319 \gg 250, \quad \text{γιαυτό απορρίπτεται.}$$

$$\text{Γιά } \lambda \leq 250, \quad \text{δηλαδή } \frac{220}{i_{min}} \leq 250, \quad \text{ή } i_{min} \geq 0,88$$

προκύπτει το γωνιακό L 30×5 με $F = 2,78 \text{ cm}^2$ και $i_{min} = 0,88 \text{ cm}$, για το οποίο, όπως και στην περίπτωση (α), είναι:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{250^2} = 332 \text{ kg/cm}^2,$$

και επομένως η $\sigma_{υπ}$ της ράβδου θα πρέπει να είναι μικρότερη

$$\text{της } \frac{\sigma_k}{\gamma} = \frac{332}{2,5} = 132,8 \text{ kg/cm}^2.$$

Όμως η υπάρχουσα τάση στη ράβδο είναι:

$$\sigma_{υπ} = \frac{P}{F} = \frac{3.000}{2,78} = 1.079 \text{ kg/cm}^2 \gg 132,8 \text{ kg/cm}^2$$

άρα πρέπει να εκλέξουμε μεγαλύτερη διατομή.

Το L 50×5, με $F = 4,80$ και $i_{min} = 1,51$, δίνει:

$$\lambda = \frac{220}{1,51} = 146 \quad \text{και} \quad \sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{146^2} = 972 \text{ kg/cm}^2.$$

Θα πρέπει λοιπόν τώρα να είναι:

$$\frac{P}{F} = \frac{3.000}{4,8} = 625 \leq \frac{\sigma_k}{\gamma} = \frac{972}{2,5} = 389 \text{ kg/cm}^2,$$

γ) Ο υπολογισμός σε θλίψη δίνει:

$$\frac{P}{F_{\alpha\eta}} \leq \sigma_{\epsilon\eta} \quad \text{ή} \quad F_{\alpha\eta} \geq \frac{3.000}{1.400} = 2,14 \text{ cm}^2$$

Απ' τους πίνακες των ισοσκελών γωνιακών ελασμάτων προκύπτει ότι η απαιτούμενη αυτή διατομή καλύπτεται από το L 25×5.

Περιορίζοντας το επίπεδο λυγισμού σε διεύθυνση παρ/λη του άξονα x-x της διατομής, το γωνιακό αυτό έχει $i_{\min} = 0,69 \text{ cm}$.

(Αν ο λυγισμός ήταν ελεύθερος, θα θεωρούσαμε τη δυσμενέστερη διεύθυνσή του, που βρίσκεται στο κάθετο του άξονα η-η επίπεδο, οπότε θα είχαμε $i_{\min} = i_{\eta} = 0,47 \text{ cm}$).

Έτσι η λυγηρότητα της ράβδου είναι:

$$\lambda = \frac{220}{0,69} = 319 \gg 250, \quad \text{γιαυτό απορρίπτεται.}$$

$$\text{Για } \lambda \leq 250, \quad \text{δηλαδή } \frac{220}{i_{\min}} \leq 250, \quad \text{ή } i_{\min} \geq 0,88$$

προκύπτει το γωνιακό L 30×5 με $F = 2,78 \text{ cm}^2$ και $i_{\min} = 0,88 \text{ cm}$, για το οποίο, όπως και στην περίπτωση (α), είναι:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{250^2} = 332 \text{ kg/cm}^2,$$

και επομένως η $\sigma_{\eta\eta}$ της ράβδου θα πρέπει να είναι μικρότερη

$$\text{της } \frac{\sigma_k}{\gamma} = \frac{332}{2,5} = 132,8 \text{ kg/cm}^2.$$

Όμως η υπάρχουσα τάση στη ράβδο είναι:

$$\sigma_{\eta\eta} = \frac{P}{F} = \frac{3.000}{2,78} = 1.079 \text{ kg/cm}^2 \gg 132,8 \text{ kg/cm}^2$$

άρα πρέπει να εκλέξουμε μεγαλύτερη διατομή.

Το L 50×5, με $F = 4,80$ και $i_{\min} = 1,51$, δίνει:

$$\lambda = \frac{220}{1,51} = 146 \quad \text{και} \quad \sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{20,72 \cdot 10^6}{146^2} = 972 \text{ kg/cm}^2.$$

Θα πρέπει λοιπόν τώρα να είναι:

$$\frac{P}{F} = \frac{3.000}{4,8} = 625 \leq \frac{\sigma_k}{\gamma} = \frac{972}{2,5} = 389 \text{ kg/cm}^2,$$

που δεν ικχύει, γιαυτό αυξάνουμε κι άλλο τη διατομή.

Το γωνιακό $L 60 \times 5$, με $F = 5,82$ και $i_{min} = 1,82$, δίνει:

$$\lambda = \frac{220}{1,82} = 121 \quad \text{και} \quad \sigma_k = \frac{20,72 \cdot 10^6}{121^2} = 1415 \text{ kg/cm}^2,$$

οπότε θα πρέπει:

$$\frac{P}{F} = \frac{3.000}{5,82} = 515,5 \leq \frac{\sigma_k}{\nu} = \frac{1415}{2,5} = 566 \text{ kg/cm}^2,$$

που ικχύει. Η εκλογή νέας διατομής γίνεται όταν είναι δυνατόν να ελαχιστοποιηθεί η διαφορά μεταξύ των τιμών P/F και σ_k/ν , ή όταν ειδικές συνθήκες το επιβάλλουν.

Στην περίπτωση του ελεύθερου λυγισμού, μετά τον υπολογισμό σε θλίψη, θα οδηγηθούμε προφανώς σε γωνιακό με $i_{min} = 0,88 \text{ cm}$.

Το $L 50 \times 5$ με $F = 4,8$ και $i_{n(min)} = 0,98$, δίνει:

$$\lambda = \frac{220}{0,98} = 224 \quad \text{και} \quad \sigma_k = \frac{20,72 \cdot 10^6}{224^2} = 413 \text{ kg/cm}^2.$$

Άρα θα πρέπει:

$$\frac{P}{F} = \frac{3000}{4,8} = 625 \leq \frac{\sigma_k}{\nu} = \frac{413}{2,5} = 165 \text{ kg/cm}^2,$$

που δεν ικχύει, γιαυτό αυξάνουμε τη διατομή.

Το γωνιακό $L 70 \times 7$ με $F = 9,4$ και $i_{n(min)} = 1,37$, δίνει:

$$\lambda = \frac{220}{1,37} = 161 \quad \text{και} \quad \sigma_k = \frac{20,72 \cdot 10^6}{161^2} = 799 \text{ kg/cm}^2,$$

οπότε πρέπει:

$$\frac{3000}{9,4} = 319 \leq \frac{799}{2,5} = 319,6, \quad \text{που ικχύει οριακά.}$$

Για συνοπτικώτερη εικόνα σ' ότι αφορά την απαιτούμενη ποσότητα υλικού στην κάθε περίπτωση, είναι:

α) ορθογωνική διατομή με λόγο πλευρών $h/b=2$, $F_o = 21,78 \text{ cm}^2$,

β) τετραγωνική διατομή, $F_t = 14,44 \text{ cm}^2$ και

γ) ισοσκελές γωνιακό L , $F_L = 5,82 \text{ cm}^2$

- II - - II - $\wedge$, $F_{\wedge} = 9,4 \text{ cm}^2$.

8. Η μέθοδος ω .

Με τη μέθοδο υπολογισμού που περιγράφηκε παραπάνω, είναι δυνατό, για κάθε υλικό με οποιαδήποτε λυγνρότητα, να προσδιοριστεί η αριθμητική τιμή της κρίσιμης τάσης λυγισμού σ_K , η οποία :

α) για την ελαστική περιοχή δίνεται απ' τον ανηγμένο τύπο του Euler

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad \text{ενώ}$$

β) για την πλαστική περιοχή απ' τη σχέση του Tetmayer

$$\sigma_K = \alpha - b\lambda,$$

με διαχωριστική γραμμή μεταξύ των δύο περιοχών την οριακή λυγνρότητα

$$\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_A}}.$$

Ο συντελεστής ασφαλείας γ προδιαγράφεται απ' τους Κανονισμούς και έτσι για κάθε λυγνρότητα μπορεί να υπολογιστεί η επιτρεπόμενη θλιπτική τάση σε λυγισμό

$$\sigma_{\lambda\epsilon\pi} = \frac{\sigma_K}{\gamma},$$

οπότε ο έλεγχος των τάσεων περιορίζεται απλά στη διαπίστωση ότι

$$\sigma_{\nu\kappa} = \frac{P}{F} \leq \sigma_{\lambda\epsilon\pi} \quad (21)$$

Σημειώνεται ότι η επιτρεπόμενη τάση σε λυγισμό $\sigma_{\lambda\epsilon\pi}$, δεν είναι σταθερή και υπολογίζεται κάθε φορά σαν συνάρτηση της λυγνρότητας λ .

Σήμερα η παραπάνω μέθοδος υπολογισμού δεν είναι σε μεγάλη χρήση. Αντί αυτής οι ράβδοι υπολογίζονται σε λυγισμό όπως και στη θλίψη, με τη διαφορά ότι η υπάρχουσα τάση P/F

αυξάνεται, αφού πολλαπλασιαστεί επί έναν καθαρό αριθμό ω , ο οποίος λαμβάνει υπόψη το φαινόμενο του λυγισμού.

Έτσι η διαστασιολόγηση των θλιβομένων ράβδων γίνεται τώρα απ' τη σχέση

$$\omega \frac{P}{F} \leq \sigma_{ελ}, \quad (22)$$

όπου $\sigma_{ελ}$ η επιτρεπόμενη θλιπτική τάση του υλικού χωρίς λυγισμό.

Οι τιμές των συντελεστών ω εξαρτώνται απ' το υλικό της ράβδου και τη λυγνηρότητά της. Δίνονται σε πίνακες χωριστά για κάθε υλικό (βλέπε τέλος θεωρητικού μέρους) και βέβαια είναι πάντα $\omega \geq 1$.

Ο συντελεστής ω προέκυψε ως εξής:

Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της ανισότητας (21) επί $\sigma_{ελ}$, έχουμε:

$$\frac{P}{F} \cdot \sigma_{ελ} \leq \sigma_{λελ} \cdot \sigma_{ελ} \quad \text{ή} \quad \frac{P}{F} \cdot \frac{\sigma_{ελ}}{\sigma_{λελ}} \leq \sigma_{ελ},$$

που είναι ήδη η σχέση (22), αν τεθεί:

$$\frac{\sigma_{ελ}}{\sigma_{λελ}} = \omega = \frac{\nu \cdot \sigma_{ελ}}{\sigma_k}. \quad (23)$$

Είναι επομένως ο συντελεστής ω ο λόγος της κανονικής επιτρεπόμενης θλιπτικής τάσης του υλικού χωρίς λυγισμό, προς την επιτρεπόμενη θλιπτική τάση με λυγισμό.

Απ' τη σχέση (23) προκύπτει τώρα η μαθηματική έκφραση του ω , που είναι:

α) Για την περιοχή του ελαστικού λυγισμού, όπου

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \implies \omega_{ελ} = \frac{\sigma_{ελ} \cdot \nu \cdot \lambda^2}{\pi^2 E}, \quad \text{ενώ}$$

β) για την περιοχή του πλαστικού λυγισμού, όπου

$$\sigma_k = a - b\lambda \implies \omega_{πλ} = \frac{\sigma_{ελ} \cdot \nu}{a - b\lambda}.$$

Επομένως, για την επάρκεια π.χ. μίας δομένης διατομής, δεν χρειάζεται να αναζητηθεί αν θα εφαρμοστούν οι τύποι της ελαστικής ή πλαστικής περιοχής, γιατί αυτό έγινε όταν καταρτίστηκαν οι πίνακες με τις τιμές του ω . Το μόνο που πρέπει να ελεγχθεί είναι αν ισχύει η σχέση (22).

Σημειώνεται ότι η σχέση (22) δεν προσδιορίζει την τάση που υπάρχει στη ράβδο, αλλά ελέγχει αν η ράβδος είναι ευσταθής. Γιαυτό κανονικά δεν πρέπει να μιλάμε για έλεγχο τάσεων, αλλά για έλεγχο ευστάθειας. Δεν μπορούμε επομένως να λύσουμε την (22) ως προς F για να καθορίσουμε τη διατομή, γιατί ο συντελεστής ω είναι συνάρτηση της λυγηρότητας και συνεπώς της ροπής αδράνειας της διατομής που ζητούμε.

Η διαστασιολόγηση στην πράξη γίνεται ως εξής:

Δίνεται η θλιπτική δύναμη P και το μήκος l της ράβδου.

Εκλέγεται αρχικά μία διατομή με εμβαδόν F και ελάχιστη ακτίνα αδράνειας $i_{\min}$, και

Καθορίζονται: 1. Το μήκος λυγισμού S_k ανάλογα με τις συνθήκες στήριξης,

$$2. \text{ Η λυγηρότητα } \lambda = \frac{S_k}{i_{\min}},$$

3. Ο συντελεστής ω σαν συνάρτηση του λ από πίνακα που αντιστοιχεί στο υλικό της ράβδου, και

$$4. \text{ Ο έλεγχος } \omega \frac{P}{F} \leq \sigma_{\text{ελ}}.$$

Αν η τελευταία σχέση δεν ισχύει, τότε εκλέγεται νέα μεγαλύτερη διατομή και επαναλαμβάνεται ο υπολογισμός.

Παράδειγμα.

Το ίδιο ακριβώς με το προηγούμενο.

Λύση.

α) Ξεκινώντας τον υπολογισμό απ' τη διατομή που μας ε-
ξασφαλίζει τη χρησιμότητα της ράβδου με $\lambda = 250$, δηλαδή

$$i_{\min} = \frac{S_x}{\lambda} = \frac{220}{250} = 0,88 \text{ cm},$$

προκύπτει ότι η διατομή θα πρέπει να έχει τη μικρή της πλευρά

$$b = i_{\min} \sqrt{12} = 0,88 \sqrt{12} = 3,05 \text{ cm}$$

και εμβαδόν $F = 2b^2 = 2 \cdot 3,05^2 = 18,6 \text{ cm}^2$.

Απ' τον πίνακα συντελεστών λυγισμού για χάλυβες St 33 και St 37 προκύπτει ότι για $\lambda = 250$ είναι $\omega = 10,55$. Άρα θα πρέπει:

$$\omega \frac{P}{F} \leq \sigma_{\text{ελ}} \quad \text{ή} \quad 10,55 \frac{3.000}{18,6} \leq 1400 \quad \text{ή} \quad 1701 \leq 1400,$$

που δεν ισχύει, γιαυτό αυξάνουμε τη διατομή.

Γιά $b = 3,5$, με $F = 2 \cdot 3,5^2 = 24,5$, $i_{\min} = 3,5/\sqrt{12} = 1,01$ και $\lambda = \frac{220}{1,01} = 218$
προκύπτει απ' τους πίνακες ότι $\omega = 8,03$, οπότε πρέπει:

$$8,03 \frac{3000}{24,5} \leq 1400 \quad \text{ή} \quad 983 \leq 1400, \quad \text{που ισχύει.}$$

Για μεγαλύτερη οικονομία ή ακρίβεια διαστάσεων εκλέγουμε

$$\underline{b = 3,3 \text{ cm}} \quad \text{με} \quad F = 21,78, \quad i_{\min} = 0,95, \quad \lambda = 232 \quad \text{και} \quad \omega = 9,09,$$

οπότε θα πρέπει $9,09 \frac{3000}{21,78} \leq 1400 \quad \text{ή} \quad 1252 \leq 1400$, που ισχύει.

β) Στην τετραγωνική διατομή, αρχίζοντας πάλι με $\lambda = 250$, δη-
λαδή $i_{\min} = 0,88$, $b = 3,05$, $F = 3,05^2 = 9,3$, και $\omega = 10,55$,

θα οδηγηθούμε στην σχέση $10,55 \frac{3000}{9,3} \leq 1400 \quad \text{ή} \quad 3.403 \leq 1400$,

που δεν ισχύει, γιαυτό αυξάνουμε τη διατομή.

Γιά $b = 4 \text{ cm}$, με $F = 16$, $i_{\min} = 1,15$, $\lambda = 191$ και $\omega = 6,16$, θα πρέπει

$$6,16 \frac{3000}{16} \leq 1400 \quad \text{ή} \quad 1.155 \leq 1400, \quad \text{που ισχύει.}$$

Για μεγαλύτερη οικονομία υλικού εκλέγουμε $b = 3,8 \text{ cm}$, με:

$F = 14,44 \text{ cm}^2$, $i_{\min} = 1,1 \text{ cm}$, $\lambda = 200$ και (μέσω πίνακος) $\omega = 6,75$,
 οπότε $6,75 \frac{3000}{14,44} \leq 1400$ ή $1402 \leq 1400$, που ιχύνει οριακά.

γ) Για διατομή ισοσκελούς γωνιακού που παρουσιάζει επίπεδο
 λυγισμού παρ/λο του άξονα $x-x$ της διατομής του (βλέπε το σχή-
 μα του πίνακα ισοσκελών γωνιακών), μιά αρχική λυγηρότητα $\lambda = 250$
 με $\omega = 10,55$ και $i_{\min} = 220/250 = 0,88 \text{ cm}$, οδηγεί στην εκλογή του
 $L 30 \times 5$ ($F = 2,78 \text{ cm}^2$), οπότε θα πρέπει:

$$10,55 \frac{3000}{2,78} \leq 1400 \quad \text{ή} \quad 11.385 \leq 1400$$

που δεν ιχύνει, γι'αυτό αυξάνουμε τη διατομή

Το $L 50 \times 5$ με $F = 4,8 \text{ cm}^2$, $i_{\min} = 1,51 \text{ cm}$ και $\lambda = 146$, δίνει
 $\omega = 3,60$, οπότε πρέπει

$$3,6 \frac{3000}{4,8} \leq 1400 \quad \text{ή} \quad 2250 \leq 1450,$$

που επειδή δεν ιχύνει, αυξάνουμε κι άλλο τη διατομή

Το $L 60 \times 5$, με $F = 5,82$, $i_{\min} = 1,82$, $\lambda = 121$ και $\omega = 2,47$, δίνει

$$2,47 \frac{3000}{5,82} \leq 1400 \quad \text{ή} \quad 1273,2 \leq 1400, \quad \text{που ιχύνει.}$$

Στην περίπτωση του ελεύθερου λυγισμού, το $L 60 \times 6$ με

$$F = 6,91 \text{ cm}^2, \quad i_{n(\min)} = 1,17 \text{ cm}, \quad \lambda = 220/1,17 = 188 \quad \text{και} \quad \omega = 5,97,$$

θα δώσει

$$5,97 \frac{3000}{6,91} \leq 1400 \quad \text{ή} \quad 2.592 \leq 1400,$$

που δεν ιχύνει γι'αυτό αυξάνουμε τη διατομή.

Τελικά το $L 70 \times 7$ με $F = 9,40 \text{ cm}^2$, $i_{n(\min)} = 1,37$, $\lambda = 161$

και $\omega = 4,38$, δίνει

$$4,38 \frac{3000}{9,4} \leq 1400 \quad \text{ή} \quad 1.398 \leq 1400, \quad \text{που ιχύνει οριακά.}$$

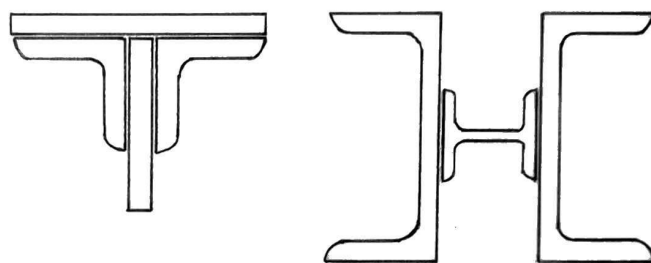
9. Ράβδοι σύνδετης και πολυμελούς διατομής.

Τα μεγάλα θλιπτικά φορτία που καταπονούν αξονικά μία ράβδο, σε συνδυασμό με την αντοχή της σε λυγισμό, επιβάλλουν, πολλές φορές στην πράξη, την διαμόρφωση της διατομής της σαν σύνδετης ή σαν πολυμελούς.

Οι ράβδοι σύνδετης διατομής αποτελούνται από διάφορα ελάσματα που ενώνονται μεταξύ τους σε όλο το μήκος με ήλωση ή συγκόλληση έτσι ώστε να αποτελούν ένα σώμα.

(βλ. 97).

Ο υπολογισμός τους γίνεται όπως περιγράφηκε στην παράγραφο 8, με την προϋπόθεση ότι θα προσδιοριστεί το συνολικό εμβαδόν και η ελάχιστη ακτίνα αδράνειας της διατομής.

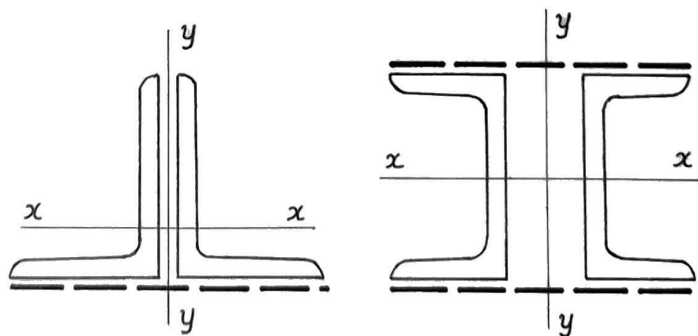


Σχ. 97

Οι ράβδοι πολυμελούς διατομής αποτελούνται από δύο ή περισσότερα ελάσματα που συνδέονται μεταξύ τους κατά διαστήματα με συνδετικές λεπίδες ή με δικτύωση (βλ. 98).

Ανάλογα με τον αριθμό των μελών της η ράβδος ονομάζεται διμελής, τριμελής κ.λπ.

Ο υπολογισμός των πολυμελών ράβδων γίνεται ως εξής:



Σχ. 98

α) Υπολογισμός ως προς τον άξονα $x-x$

Είναι φανερό ότι ο λυγισμός γύρω από τον άξονα $x-x$,

που ονομάζεται **άξονας υλικού** γιατί τέμνει το υλικό των ελασμάτων, δεν επηρεάζεται απ' την απόσταση των διατομών που συνδέτουν την πολυμελή ράβδο, επειδή κάθε μέλος εργάζεται ανεξάρτητα οποιαδήποτε αν είναι η σύνδεση.

Έτσι η ράβδος θεωρείται ότι είναι μονομελής, οπότε ο υπολογισμός της γίνεται κανονικά.

Δηλαδή, αν $S_{κx}$ είναι το μήκος λυγισμού της ράβδου ως προς τον άξονα x και $i_x = \sqrt{J_{x01}/F_{01}}$ η αντίστοιχη ακτίνα αδράνειας της συνολικής διατομής, τότε στη λυγηρότητα

$$\lambda_x = \frac{S_{κx}}{i_x} \quad (24)$$

αντιστοιχεί ο συντελεστής λυγισμού ω_x , οπότε θα πρέπει να ισχύει η σχέση (22) της βελ. 193, δηλαδή

$$\omega_x \frac{P}{F_{01}} \leq \sigma_{ελ}.$$

β) Υπολογισμός ως προς τον άξονα $y-y$.

Ο άξονας $y-y$ που δεν τέμνει το υλικό των ελασμάτων, ονομάζεται **άξονας ελεύθερος υλικού**.

Ο λυγισμός γύρω απ' τον άξονα αυτό εξαρτάται βασικά απ' τον τρόπο που συνδέονται τα μέλη της διατομής μεταξύ τους και την αποτελεσματικότητα της σύνδεσης. Γιατί μ' αυτή επιτυγχάνεται η συνεργασία των μελών της διατομής που οδηγεί διαδοχικά σε μεγάλη ροπή αδράνειας J_y , μεγάλη ακτίνα αδράνειας i_y και επομένως μικρή λυγηρότητα κατά τη διεύθυνση αυτή.

Η πιο απλή σύνδεση που απαιτείται για τη συνεργασία των παραπάνω μελών, περιλαμβάνει ενώσεις σε τέσσερα τουλάχιστον σημεία, που τριχοτομούν τη ράβδο (δύο ακραία και δύο ενδιάμεσα).

Στις **χαλύβδινες** ράβδους η σύνδεση γίνεται με ληπίδες σε τέτοιες αποστάσεις ώστε η λυγηρότητα λ_1 για κάθε ένα μέλος της ράβδου να μην υπερβαίνει την οριακή τιμή 50, δηλαδή θα πρέπει να είναι:

$$\lambda_1 = \frac{S_{K1}}{i_1(\min)} \leq 50 \quad (25)$$

όπου S_{K1} το μήκος λυγισμού του ενός μέλους της ράβδου που περιλαμβάνεται μεταξύ των μέσων δύο διαδοχικών συνδέσεων και $i_1(\min)$ η αντίστοιχη ελάχιστη ακτίνα αδράνειας της διατομής του.

Αν λ_y είναι η λυγηρότητα όλης της ράβδου με το συνολικό μήκος λυγισμού της S_{Ky} , θα είναι:

$$\lambda_y = \frac{S_{Ky}}{i_y} \quad (26)$$

όπου $i_y = \sqrt{J_{y_{\alpha\lambda}}/F_{\alpha\lambda}}$ η ακτίνα αδράνειας της συνολικής διατομής ως προς τον άξονα $y-y$.

Απ' τις λυγηρότητες λ_1 και λ_y προκύπτει η καλούμενη **ιδεατή λυγηρότητα**.

$$\lambda_{y_i} = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_y^2}, \quad (27)$$

στην οποία προφανώς αντιστοιχεί - μέσω πινάκων - ο συντελεστής λυγισμού ω_{y_i} .

Έτσι η συνθήκη λυγισμού που προκύπτει για τη ράβδο πολυμελούς διατομής από χάλυβα ως προς τον άξονα $y-y$, αντίστοιχη της σχέσης (22), διαμορφώνεται τελικά στην

$$\omega_{y_i} \frac{P}{F} \leq \sigma_{\text{ελ.}}$$

Ο έλεγχος αυτός κατά την διεύθυνση y είναι περιττός, όταν

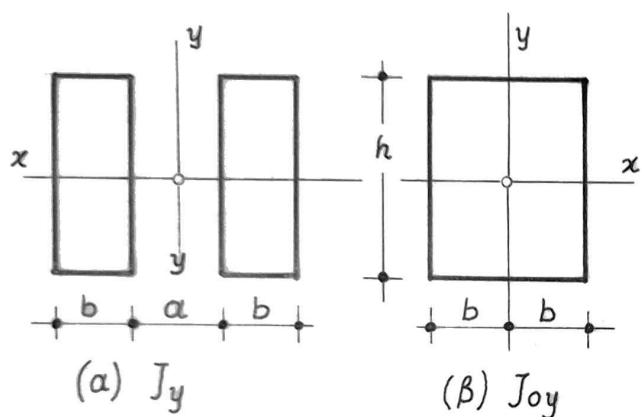
$$\lambda_{y_i} \leq \lambda_x,$$

ή λόγω της (27) όταν

$$\lambda_1^2 + \lambda_y^2 \leq \lambda_x^2 \quad \text{και} \quad \lambda_1 \leq \sqrt{\lambda_x^2 - \lambda_y^2}$$

Η επί πλέον της λ_y ιδεατή λυγνρότητα λ_{yi} που προκύπτει απ' την σχέση (27) είναι απαραίτητη, γιατί στις περιπτώσεις των πολυμελών ράβδων καμμία σύνδεση δεν εξασφαλίζει πλήρη συνεργασία μεταξύ των μελών της διατομής.

Στις **ξύλινες** ράβδους εισάγεται η λεγόμενη ενεργός ροπή αδράνειας J_{wy} που υπολογίζεται απ' τον πειραματικό τύπο



Σχ. 99

$$J_{wy} = \frac{3}{4} J_{oy} + \frac{1}{4} J_y,$$

όπου J_{oy} η ροπή αδράνειας της διατομής που προκύπτει αν τα μέλη της έλθουν σε επαφή χωρίς την μεταξύ τους απόσταση (βλ. 99 β) και J_y η ροπή αδράνειας

της διμελούς (ή πολυμελούς) διατομής (βλ. 99 α).

Σημειώνεται ότι η απόσταση a μεταξύ των μελών της διατομής δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη απ' το διπλάσιο του πλάτους κάθε μέλους ($a \leq 2b$).

Σε αντίθετη περίπτωση, για τον υπολογισμό της J_y , χρησιμοποιείται αντί του a , το μέγεθος $2b$.

Στή συνέχεια υπολογίζεται κανονικά η ενεργός ακτίνα αδράνειας

$$i_{wy} = \sqrt{J_{wy} / F_{ol}},$$

και εξ αυτής η λυγνρότητα

$$\lambda_y = \frac{S_{ky}}{i_{wy}},$$

στην οποία αντιστοιχεί τώρα ο συντελεστής ω_y , οπότε θα πρέπει:

$$\omega_y \frac{P}{F} \leq \delta_{\text{επ}}. \quad (28)$$

Ο έλεγχος αυτός είναι επίσης περιττός όταν $\lambda_y \leq \lambda_x$. Όσον αφορά τη σύνδεση των μελών της διατομής, οι κανονισμοί επιβάλλουν να γίνεται ή με παρεμβλήματα που τριχοτομούν την ξύλινη ράβδο όπως στην περίπτωση των καλυβδίνων, ή με δικτύωση των μελών σ' όλο το μήκος της ράβδου.

Στην περίπτωση αυτή ο έλεγχος του ενός μέλους της ράβδου γίνεται κατα Euler, με την προϋπόθεση ότι η υπάρχουσα θλιπτική δύναμη σ' αυτό δεν ξεπερνά την τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού.

Έτσι, αν S_{ky} είναι όλη ο το μήκος λυγισμού του ενός από τα n μέλη της διατομής, με ελάχιστη ροπή αδράνειας $J_{1(\min)}$, θα πρέπει να είναι:

$$\frac{P}{n} \leq \frac{\pi^2 E J_{1(\min)}}{S_{ky}^2} \quad \text{ή} \quad J_{1(\min)} \geq \frac{P \cdot S_{ky}^2}{n \pi^2 E} \quad (29)$$

Η σχέση (29) πρέπει να ισχύει πέρα και ανεξάρτητα απ' τις σχέσεις (24) ή (28).

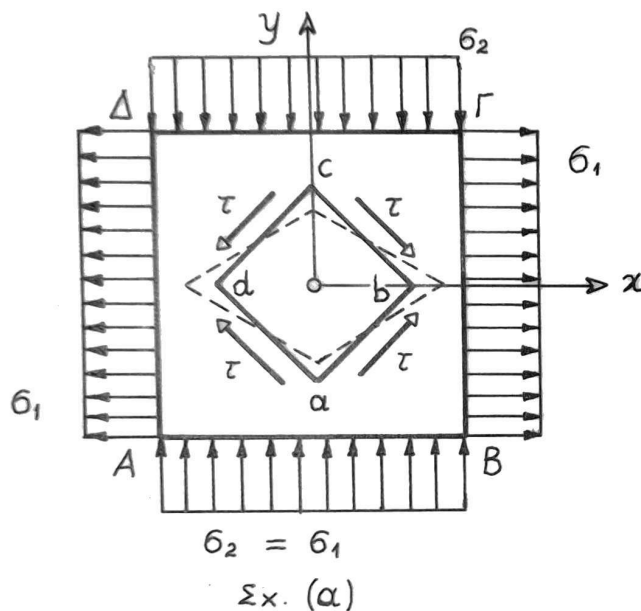
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1. Η περίπτωση της καθαρής διάτμησης.

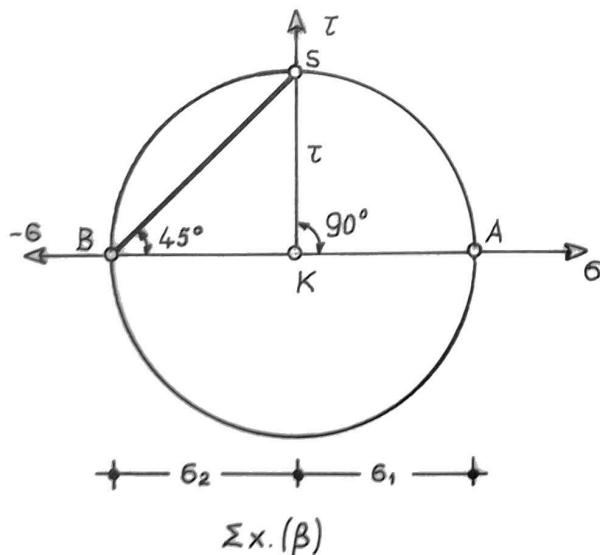
Ας εξετάσουμε την ιδιαίτερη περίπτωση επίπεδης εντατικής κατάστασης, όπου, στο τετραγωνικό πρίσμα ΑΒΓΔ (βλ. α), ασκείται, κατά τον άξονα x η εφελκυστική τάση σ_1 και κατά τον άξονα

y η θλιπτική τάση $\sigma_2 = -\sigma_1$.

Τότε στις έδρες του επιπέδου τετραγωνικού πρίσματος $abcd$, που έχουν κλίση 45° προς τις αντίστοιχες του ΑΒΓΔ, θα ενεργούν μόνο διατμητικές τάσεις $\tau = \sigma_1$, ενώ το πρίσμα $abcd$ θα λέμε ότι βρίσκεται σε κατάσταση καθαρής διάτμησης.



Πραγματικά, σύμφωνα με τους τύπους (7'') και (8'') της βελ. 24, θα έχουμε για την ορθή και διατμητική τάση στις έδρες του $abcd$ ($2\phi = 90^\circ$),



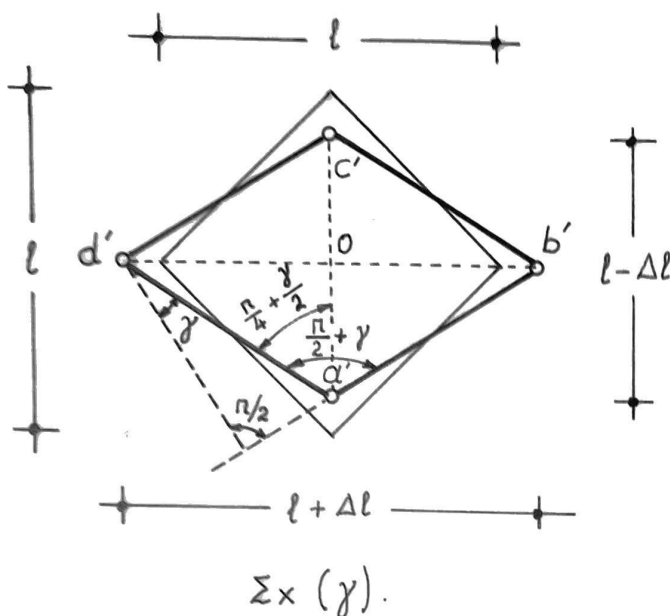
$$\sigma = \frac{\sigma_1 + (-\sigma_1)}{2} + \frac{\sigma_1 - (-\sigma_1)}{2} \sin 90^\circ = 0 \quad (1)$$

και

$$\tau = \frac{\sigma_1 - (-\sigma_1)}{2} \sin 90^\circ = \sigma_1 \quad (2)$$

Ο αντίστοιχος κύκλος του Mohr εικονίζεται στο βλ. (β), όπου το S παριστάνει τις τάσεις που ενεργούν στις έδρες bc και ad (δεξιόστροφες).

2. Σχέση μεταξύ των δύο μέτρων ελαστικότητας E και G.



Έστω α'β'γ'δ' (σχ. γ)
η μορφή του παραμορφω-
θέντος τετραγωνικού πρίσ-
ματος abcd του σχ. (α).

Σύμφωνα με τη σχέ-
ση (13) της σελ. 38, που
αφορά τη γενίκευση του
νόμου του Hooke, η
ανηγμένη επιμήκυνση ϵ_1
κατά την διεύθυνση

της σ_1 , (σχήμα α), θα

$$\text{είναι: } \epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2) = \frac{1}{E} (\sigma_1 + \mu \sigma_1) = \frac{\sigma_1}{E} (1 + \mu) = \frac{\Delta l}{l}, \quad (3)$$

προς την οποία θα ισούται και η ανηγμένη επιβράχυνση που
γίνεται κατά την διεύθυνση της σ_2 .

Οι έδρες ab και ad που αρχικά ήταν κάθετες μεταξύ τους,
εξηματίζουν, μετά την παραμόρφωση, όπως φαίνεται στο σχ. (γ), την
αμβλεία γωνία $\pi/2 + \gamma$.

Η διαφορά των δύο γωνιών οφείλεται στην λόγω της διατμητι-
κής τάσης τ μετατόπιση (ολίσθηση) των εδρών ab και cd, (βλέ-
πε σχέση (17) σελ. 40), κατά γωνία:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\sigma_1}{G} \quad (4)$$

Η γωνία d'α'Ο, σαν μισό της αμβλείας αυτής γωνίας, θα
είναι ίση με $\pi/4 + \gamma/2$. Επομένως:

$$\epsilon \phi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{d'O}{a'O} = \frac{\frac{1}{2} (l + \Delta l)}{\frac{1}{2} (l - \Delta l)} = \frac{1 + \frac{\Delta l}{l}}{1 - \frac{\Delta l}{l}} \quad (5)$$

Αλλά απ' την τριγωνομετρία είναι γνωστό ότι:

$$\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\varepsilon\phi\frac{\pi}{4} + \varepsilon\phi\frac{\gamma}{2}}{1 - \varepsilon\phi\frac{\pi}{4} \cdot \varepsilon\phi\frac{\gamma}{2}} \simeq \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}}, \quad (6)$$

επειδή η γωνία γ είναι πολύ μικρή, και επομένως

$$\varepsilon\phi\frac{\gamma}{2} \simeq \frac{\gamma}{2}.$$

Απ' τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει:

$$\frac{1 + \frac{\Delta l}{l}}{1 - \frac{\Delta l}{l}} = \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}}, \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{\gamma}{2}. \quad (7)$$

Συνδυάζοντας την (7) με τις (3) και (4), έχουμε:

$$\frac{\sigma_1}{E}(1+\mu) = \frac{\sigma_1}{2G}, \quad (8)$$

απ' την οποία βρίσκουμε τελικά την ζητούμενη σχέση:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (9)$$

3. Η ορθή τάση σε ειδικές θέσεις διατομών.

Η ομοιομορφία των στοιχειωδών δυνάμεων που ασκούν τα μόρια στη διατομή μιας εφελκυσμένης π.χ. ράβδου εξασφαλίζει την ισχύ της σχέσης:

$$\sigma = \frac{P}{F}, \quad (10)$$

όπως ήδη γνωρίσαμε στην παράγραφο 2 του κεφ. 3, σελ. 47.

Εδώ θα εξετάσουμε ορισμένες ειδικές θέσεις, σε διατομές όπου η παραπάνω σχέση (10) δεν ισχύει.

α) Διατομή με οπή ή εγκοπή.

Στην περίπτωση αυτή, το εμβαδόν F' της διατομής στη θέση της οπής ή εγκοπής είναι μικρότερο του F με αποτέλεσμα η μέση

ορθή τάση σ_m να είναι μεγαλύτερη από τη σ που δίνεται απ' τη σχέση (10).

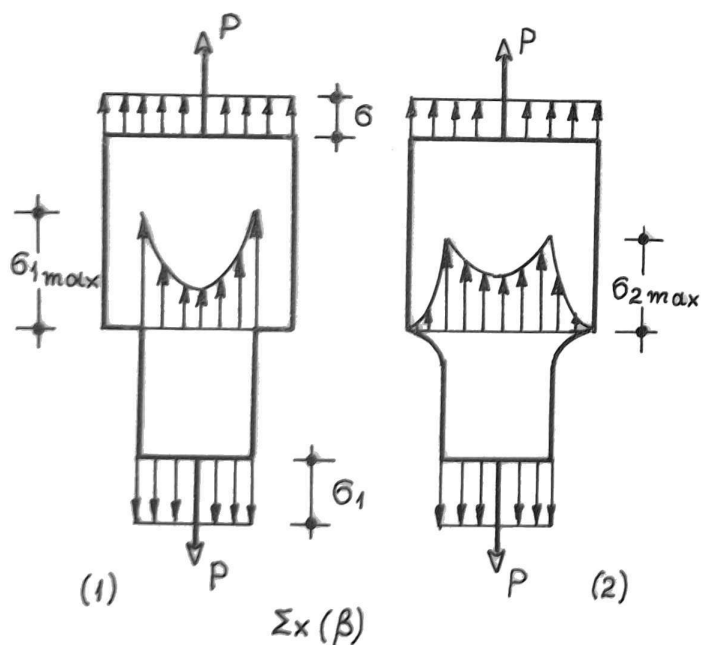
Πέρα όμως απ' αυτό, και τα μόρια που είναι γειτονικά προς την ανωμαλία (οπή ή εγκοπή),

όπως φαίνεται στο σχ. (α), εργάζονται περισσότερο απ' τα άλλα, με αποτέλεσμα η τάση να παίρνει μέγιστη τιμή διπλά ακριβώς απ' τις ανωμαλίες και να ελαττώνεται όσο απομακρυνόμαστε απ' αυτές.

Σύμφωνα λοιπόν με το διπλανό σχήμα, είναι:

$$\sigma = \frac{P}{F}, \quad \sigma_m = \frac{P}{F'} \quad (F' < F) \quad \text{και} \quad \sigma_{\max} > \sigma_m.$$

β) Διατομή απότομης μεταβολής. (σχ β).



Εδώ συμβαίνουν φαινόμενα ανάλογα με κείνα της εγκοπής. Πραγματικά, συγκρίνοντας το σχ. β₁ με το σχ. α₂, διαπιστώνουμε την αντιστοιχία ανάμεσα στη σ_1 με τη σ_m και στη $\sigma_{1\max}$ με τη $\sigma_{\max}$.

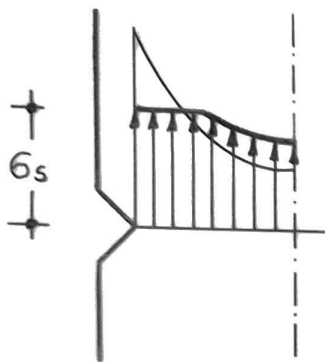
Όμως, αν η μεταβολή της διατομής γίνει βαθμιαία με ένα τόξο συναρμογής (σχ. β₂), η μέγιστη τάση στα άκρα

γίνεται μικρότερη ($\sigma_{2\max} < \sigma_{1\max}$), ενώ η κατανομή των τάσεων στη διατομή γίνεται ομαλότερη.

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι τέτοιες ανωμαλίες είναι αντιστοιχο-

μικές, γιατί δεν επιτρέπουν την εκμετάλλευση όλης της διατομής του υλικού, αλλά κύρια είναι επικίνδυνες ιδιαίτερα για τα γαθυρά υλικά, που δεν μπορούν να αμυνθούν στην υπερβολική αύξηση των τάσεων στη γειτονιά των ανωμαλιών.

Αυτό βέβαια δεν συμβαίνει στα συνεκτικά υλικά, γιατί όταν η μέγιστη τάση στη γειτονιά της ανωμαλίας φθάσει την τάση διαρροής σ_s , το υλικό παραμορφώνεται πλαστικά στην περιοχή αυτή και ανα-

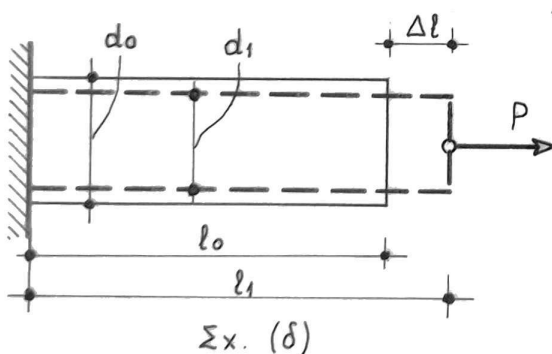


Σχ. (γ)

κουφίζεται, ενώ τα μόρια που βρίσκονται μακρύτερα εργάζονται περισσότερο από ότι θα εργάζονταν αν η τάση ξεπερνούσε την τιμή σ_s χωρίς το υλικό να παραμορφώνονταν πλαστικά (βλέπε παχειά γραμμή του διαγράμματος στο σχ. γ.).

Η λεπτή γραμμή του διαγράμματος, για να γίνει φανερή η διαφορά, δείχνει την εικόνα των τάσεων για ίδιας μορφής δοκίμιο αλλά από γαθυρό υλικό (βλέπε και σχ. α₂).

4. Η σταθερά του Poisson μ .



Θεωρούμε την εφελκούμενη κυλινδρική ράβδο του σχ. (δ).

Στην παράγραφο 5 του δευτέρου κεφαλαίου, βελ. 37-38, γνωρίσαμε ήδη τη σταθερά μ του Poisson σαν μαθηματική έκφραση, σε σχέση

με την ανηγμένη επιμήκυνση ε και την ανηγμένη εγκάρσια συστολή ε_q της ράβδου:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_q} \right| = \left| \frac{\frac{\Delta l}{l_0}}{\frac{\Delta d}{d_0}} \right| = \left| \frac{\frac{l_1 - l_0}{l_0}}{\frac{d_1 - d_0}{d_0}} \right| = \left| \frac{\frac{l_1}{l_0} - 1}{\frac{d_1}{d_0} - 1} \right| \quad (1)$$

Η σχέση (1) προϋποθέτει ότι το υλικό της ράβδου είναι ομογενές και ισοτροπο, δηλαδή έχει τις ίδιες ελαστικές ιδιότητες σε κάθε σημείο του σώματος, προς κάθε κατεύθυνση.

Ο συντελεστής εγκάρσιας συστολής:

$$\mu = \frac{1}{m}$$

ονομάστηκε και λόγος του Poisson, απ' τον φημιζόμενο Γάλλο μαθηματικό Siméon Denis Poisson (1781-1840) που προσπάθησε να τον υπολογίσει χρησιμοποιώντας τη μοριακή θεωρία των υλικών.

Για ισοτροπα υλικά ο Poisson βρήκε $\mu = 0,25$. Όμως πρόβ-
γεται υπολογισμοί, βασιζόμενοι σε πρότυπα ατομικής δομής, δίνουν $\mu = 0,33$. Και οι δύο αυτές τιμές είναι πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές του μ που μετρούνται σήμερα για διάφορα μέταλλα και υλικά και είναι μεταξύ 0,25 και 0,35.

Υλικά με πολύ μικρό μ είναι το σκυρόδεμα ($\mu = 0,1$ έως 0,2) και ο φελλός (πρακτικά $\mu = 0$), που χρησιμοποιείται γι' αυτό σαν πώμα.

Την θεωρητικά μεγαλύτερη τιμή του μ , που όπως θα δεί-
ξουμε παρακάτω είναι $\mu = 0,5$, πλησιάζει αρκετά το λάδιχο.

Για πρακτικούς λόγους η τιμή του μ λαμβάνεται η ίδια στον εφελκυσμό και τη θλίψη.

Λόγω μεταβολής των διαστάσεων της ράβδου που υπόκειται σε εφελκυσμό ή θλίψη, έχουμε, με την επιβολή του φορτίου, αντίστοιχη μεταβολή στον όγκο της.

Η αλλαγή αυτή του όγκου ΔV μπορεί να υπολογιστεί συναρ-
τήσει των ε και μ .

Πραγματικά, αν V_0 και V_1 είναι ο αρχικός και τελικός όγκος της ράβδου (βλ. δ), επειδή:

$$l_1 = l_0 (1 + \varepsilon) \quad \text{και} \quad d_1 = d_0 (1 - \varepsilon_2) = d_0 (1 - \mu \varepsilon),$$

θα έχουμε: $V_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} l_1 = \frac{\pi d_0^2}{4} l_0 (1 - \mu \epsilon)^2 (1 + \epsilon)$ (2)

Μετά την ανάπτυξη της σχέσης (2), εμφανίζονται όροι που περιέχουν το τετράγωνο και τον κύβο του ϵ . Επειδή όμως το ϵ είναι πολύ μικρό σε σχέση με τη μονάδα (ελαστική περιοχή), οι όροι αυτοί δίνουν τελικά αμελητέες ποσότητες που παραλείπονται.

Έτσι είναι: $V_1 = \frac{\pi d_0^2}{4} l_0 (1 + \epsilon - 2\mu \epsilon)$,

οπότε η μεταβολή ΔV του όγκου, είναι:

$$\Delta V = V_1 - V_0 = \frac{\pi d_0^2}{4} l_0 (\epsilon - 2\mu \epsilon) = V_0 \cdot \epsilon (1 - 2\mu) \quad (3)$$

Απ' την εξίσωση (3) προκύπτει ο λόγος:

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon (1 - 2\mu) = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu) \quad (4)$$

που ονομάζεται, αντίστοιχα προς την ανηγμένη επιμήκυνση, ανηγμένος όγκος ή διασταλτότητα και είναι καθαρός αριθμός.

Η εξίσωση (4) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της αύξησης του όγκου σε εφελκόμενη ράβδο, όταν είναι γνωστά τα ϵ ή σ και μ .

Είναι προφανές ότι στη θλίψη τα ϵ ή σ είναι αρνητικά, οπότε προκύπτει αντίστοιχα μείωση του όγκου.

Απ' την εξίσωση (4) βλέπουμε ότι η μέγιστη δυνατή τιμή του μ για κανονικά υλικά, προκύπτει

$$\text{για } e = 0, \text{ οπότε } \mu = 0,5,$$

γιατί για κάθε μεγαλύτερη τιμή, σημαίνει ότι έχουμε μείωση του όγκου της ράβδου όταν εφελκείται, πράγμα που είναι λογικά απίθανο.

Όπως τονίστηκε ήδη παραπάνω, για τα περισσότερα υλικά στην ελαστική περιοχή είναι περίπου $\mu = 0,25$ έως $0,33$, που

σημαίνει ότι ο ανηγμένος όγκος e κυμαίνεται αντίστοιχα από:

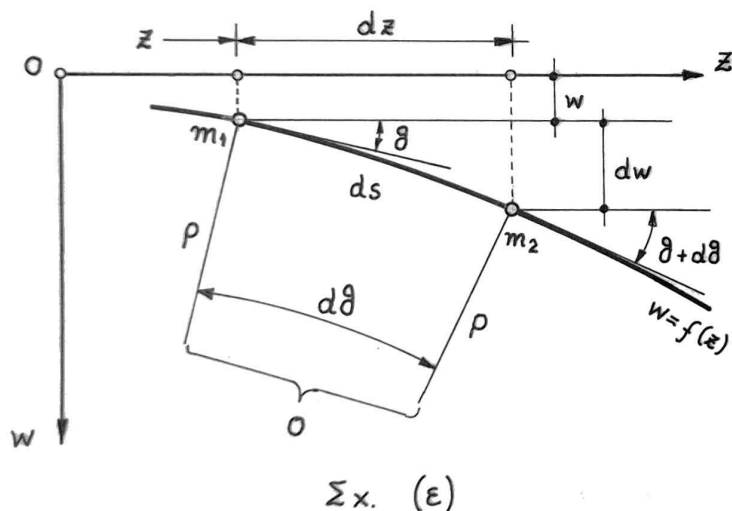
$$e = 0,5 \varepsilon \quad \text{έως} \quad 0,3 \varepsilon.$$

Στην πλαστική όμως περιοχή, όπου δεν εμφανίζεται μεταβολή του όγκου γιατί το υλικό της ράβδου μεταβαλλεται ισοό-ογκα είναι: $\Delta V = 0$, οπότε:

$$e = 0 \quad \text{και} \quad \mu = 0,5.$$

5. Υπολογισμός της καμπυλότητας $1/\rho$ σε τυχόν σημείο καμπύλης.

Στο σύστημα συντεταγμένων z, w του σχήματος ε , θεωρούμε δύο σημεία m_1 και m_2 της καμπύλης $w = f(z)$ σε απειροστή απόσταση μεταξύ τους, στις θέσεις z και $z+dz$ αντίστοιχα.



Αν O είναι το κέντρο καμπυλότητας των σημείων, με τη διαστασιολόγηση του σχήματος, θα έχουμε:

$$ds = \rho \cdot d\theta,$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dz} \cdot \frac{dz}{ds} \quad (1)$$

Το τμήμα ds θεωρείται ευθύγραμμο, άρα είναι:

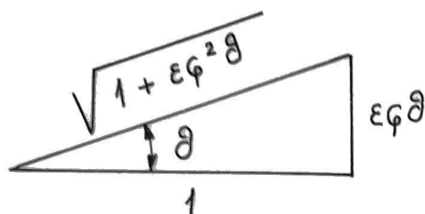
$$ds^2 = dz^2 + dw^2 \Rightarrow \left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2. \quad (2)$$

Και επειδή: $\frac{dw}{dz} = w' = \varepsilon \varphi \theta,$ (3)

η (2) γίνεται: $\frac{ds}{dz} = \pm (1 + w'^2)^{1/2}$ (4)

Αν' την σχέση (3) εξ' άλλου, διά παραγωγήδεως προκύπτει:

$$\frac{dw'}{dz} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dz} \implies \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{dw'}{dz} \sin^2 \vartheta \quad (5)$$



Όπως προκύπτει όμως απ' το σχήμα (ζ), είναι:

$$\sin^2 \vartheta = \frac{1}{1 + \varepsilon \varphi^2 \vartheta}$$

Σχ. (ζ)

και επομένως η (5) σε συνδυασμό με την (3) γίνεται:

$$\frac{d\vartheta}{dz} = \frac{dw'}{dz} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon \varphi^2 \vartheta} = \frac{w''}{1 + w'^2} \quad (6)$$

Έτσι η (1), λόγω των (4) και (6), παίρνει τελικά τη μορφή:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{w''}{1 + w'^2} \cdot \frac{1}{(1 + w'^2)^{1/2}} = \pm \frac{w''}{(1 + w'^2)^{3/2}}$$

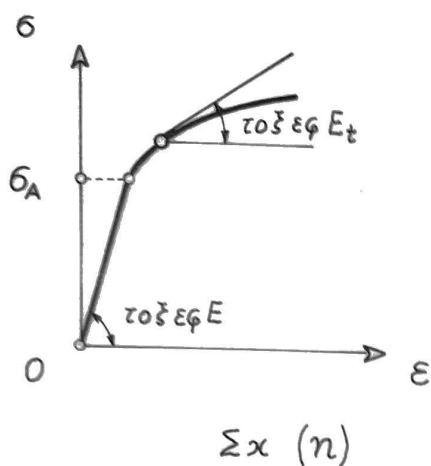
6. Σύντομη ιστορική αναδρομή του λυγισμού.

Ο τύπος του Euler (1744) που αφορά τον ελαστικό λυγισμό, όπως ήδη γνωρίσαμε στη βελ. 171, έδωσε αφορμή, εκατό χρόνια αργότερα, για ραγδαία εξέλιξη ερευνών και θεωριών που αναπτύχθηκαν, για τη μελέτη και συμπεριφορά των ράβδων στον **π λ α σ τ ι κ ό** λυγισμό.

Το 1845 ο Α.Η.Ε. Lamarle απέδειξε ότι ο τύπος του Euler θα έπρεπε να χρησιμοποιείται για λυγηρότητες πέρα από ένα συγκεκριμένο όριο. Τα πειραματικά δεδομένα ωστόσο θα έπρεπε να βαδίζουν σε ακόμα μικρότερες λυγηρότητες.

Το 1889 ο γάλλος μηχανικός Α. Considère αφού εκτέλεσε μία σειρά πειραμάτων από 32 δοκίμια παρατήρησε ότι ενώ οι τάξεις στην κυρτή πλευρά της ράβδου μικραίνουν ανάλογα με το μέτρο ελαστικότητας E , στην κοίλη πλευρά μεγάλωναν ανά-

λογα με κάποιο άλλο (εφαπτομενικό) μέτρο ελαστικότητας E_t ,



που αντιστοιχεί στη μεταξύ του όριου αναλογίας και όριου διαρροής περιοχή του διαγράμματος εφελκυσμού όπως φαίνεται στο σχ. η.

Έτσι απέδειξε ότι ο τύπος του Euler δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην πλαστική περιοχή.

Ταυτόχρονα όρισε ότι το "δραστι-

κό" μέτρο ελαστικότητας ήταν ανά-

μεσα στις τιμές E και E_t . Αν και δεν προσπάθησε να προσδιορίσει την τιμή αυτού του δραστικού μέτρου ελαστικότητας, θεωρείται σαν ο μοναδικός υπεύθυνος για την έναρξη της θεωρίας του "μειωμένου" μέτρου ελαστικότητας, που θα αναφέρουμε παρακάτω.

Τον ίδιο χρόνο, εντελώς ξαφνικά, ο γερμανός μηχανικός F. Engesser εισήγαγε την θεωρία του εφαπτομενικού μέτρου ελαστικότητας με το σύμβολο $T = d\sigma/d\varepsilon$, και πρότεινε το T να αντικαταστήσει το E στον τύπο του Euler για το κρίσιμο φορτίο.

Τον Μάρτιο του 1895, ο Engesser παρουσίασε ξανά τη θεωρία του εφαπτομενικού μέτρου ελαστικότητας, χωρίς να γνωρίζει την προηγούμενη εργασία του Considère.

Τρεις μήνες αργότερα ο πολωνός F. Jasinsky, μετέπειτα καθηγητής του St. Petersburg Αυστρίας, όπου είχε διατελέσει παλιότερα ο Euler, απέδειξε ότι η θεωρία του εφαπτομενικού μέτρου ελαστικότητας ήταν εφελκυσμένη, και, αφού επέδρασε την προδοχή στην εργασία του Considère, παρουσίασε τη θεωρία του "μειωμένου" μέτρου ελαστικότητας E_r , που για ορθογωνική διατομή είναι:

$$E_r = \frac{4 E \cdot E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}$$

Όριζε επίσης ότι το μειωμένο μέτρο ελαστικότητας δεν μπορούσε να υπολογιστεί θεωρητικά.

Σε απάντηση αυτών, ένα μήνα αργότερα, ο Engesser, αναγνωρίζοντας το λάθος στο εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας, πλησίαζε αρκετά στον τρόπο υπολογισμού του μειωμένου μέτρου ελαστικότητας για οποιαδήποτε διατομή.

Έτσι η θεωρία του εφαπτομενικού μέτρου ελαστικότητας ονομάζεται θεωρία του Engesser, ενώ η θεωρία του μειωμένου μέτρου ελαστικότητας θεωρία των Considere - Engesser.

Η θεωρία του μειωμένου μέτρου ελαστικότητας παρουσιάστηκε επίσης από τον γημιεμένο γερμανό επιτήμονα Theodore von Kármán (1881-1963), το 1908 και 1910, προφανώς ανεξάρτητα από τις προηγούμενες έρευνες.

Στην τελευταία του εργασία παρουσίαζε τύπους για το μειωμένο μέτρο ελαστικότητας E_r στην ορθογωνική και ιδεατή διατομή διπλού ταύ (που είναι η διατομή χωρίς τον κορμό).

Επέκτεινε τη θεωρία του για να συμπεριλάβει τα αποτελέσματα έκκεντρου λυγισμού και απέδειξε ότι το μέγιστο φορτίο ελατώνεται ραγδαία με την αύξηση της εκκεντρότητας.

Ο αγγλος R. V. Southwell παρουσίασε επίσης τη θεωρία του μειωμένου μέτρου ελαστικότητας σε μία εργασία του το 1912, όπου, αντί για μειωμένο μέτρο ελαστικότητας χρησιμοποίησε ένα "τροποποιημένο" μήκος της ράβδου. Η εργασία του φαίνεται να είναι ανεξάρτητη των άλλων, αν και οι βασικές έννοιες είναι οι ίδιες.

Η θεωρία του μειωμένου μέτρου ελαστικότητας ήταν αποδεκτή για τον πλαστικό λυγισμό μέχρι το 1946, όταν ο αμερικανός αεροναυπηγός - καθηγητής F. R. Shanley επεδίησε τα

λογικά παραδόξα που υπήρχαν στις παραπάνω θεωρίες του εφαπτομενικού και μειωμένου μέτρου ελαστικότητας.

Σε μία αξιοσημείωτη μονοεπίδη εργασία του όχι μόνον εξήγησε το λάθος που υπήρχε στις μέχρι τότε θεωρίες, αλλά επί πλέον πρότεινε τη δική του θεωρία, που ταυτόχρονα έδινε απάντηση στα παραδόξα των προηγούμενων.

Πέντε μήνες αργότερα, σε μία δεύτερη εργασία του, έδωσε περισσότερες αναλυτικές σχέσεις για να υποστηρίξει την προηγούμενη θεωρία του που συνοδεύονταν από αποτελέσματα πειραμάτων σε υποκυλώματα.

Παρά το γεγονός ότι διάφοροι άλλοι ερευνητές επιβεβαίωσαν και γενίκευαν τις έννοιες του Shanley, ακολούθησε ένα πλήθος από έρευνες και θεωρίες πάνω στον πλαστικό λυγισμό, που όμως, για λόγους οικονομίας χώρου, παραλείπονται.

λογικά παράδοξα που υπήρχαν στις παραπάνω θεωρίες του εφαπτομενικού και μειωμένου μέτρου ελαστικότητας.

Σε μία αξιοσημείωτη μονοεπίδη εργασία του όχι μόνον εξήγησε το λάθος που υπήρχε στις μέχρι τότε θεωρίες, αλλά επί πλέον πρότεινε τη δική του θεωρία, που ταυτόχρονα έδινε απάντηση στα παράδοξα των προηγούμενων.

Πέντε μήνες αργότερα, σε μία δεύτερη εργασία του, έδωσε περισσότερες αναλυτικές σχέσεις για να υποστηρίξει την προηγούμενη θεωρία του που συνοδεύονταν από αποτελέσματα πειραμάτων σε υποκυλώματα.

Παρά το γεγονός ότι διάφοροι άλλοι ερευνητές επιβεβαίωσαν και γενίκευσαν τις έννοιες του Shanley, ακολούθησε ένα πλήθος από έρευνες και θεωρίες πάνω στον πλαστικό λυγισμό, που όμως, για λόγους οικονομίας χώρου, παραλείπονται.

ΠΙΝΑΚΑΣ I

Τιμές του Μέτρου ελαστικότητας E
 του Μέτρου διάτμησης G
 και του Συντελεστή θερμικής διαστολής α_t ,
 διαφόρων υλικών.

Υ λ ι κ ό	E ($\text{κρ}/\text{cm}^2$)	G ($\text{κρ}/\text{cm}^2$)	α_t $\times 10^{-6}$ grad^{-1}
Σίδηρος καθαρός	2.040.000	815.000	12
Χάλυβας	2.100.000	825.000	12
Χυτοσίδηρος (μαντέμι)	1.000.000	380.000	10
Ορείχαλκος	850.000	310.000	19
Χαλκός	1.250.000	490.000	16
Αλουμίνιο	725.000	275.000	22,5
Σκυρόδεμα (beton)	140.000	—	12
Ξύλο // προς τις ίνες	100.000	5.000	9
Γρανίτης	130.000	—	8,7

Συντελεστές Αυγισμού ω για δομική
ξυλεία κατά DIN 1052, φύλλο 1.

[illegible]

Συντελεστές λυγισμού ω για χάλυβες
St 33 και St 37 κατά DIN 4114.

[illegible]

Συντελεστές λυγισμού ω για σωληνωτές διατομές.

α) Από χάλυβα St 33 και St 37

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
20	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	20
30	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	30
40	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	40
50	1,12	1,13	1,12	1,14	1,15	1,15	1,16	1,17	1,17	1,18	50
60	1,19	1,20	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	60
70	1,28	1,29	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	70
80	1,39	1,40	1,41	1,42	1,44	1,45	1,47	1,48	1,50	1,51	80
90	1,53	1,54	1,56	1,58	1,59	1,61	1,63	1,64	1,66	1,68	90
100	1,70	1,73	1,76	1,79	1,83	1,87	1,90	1,94	1,97	2,01	100
110	2,05	2,08	2,12	2,16	2,20	2,23	2,27	2,31	2,35	2,39	110
120	2,43	2,47	2,51	2,55	2,60	2,64	2,68	2,72	2,77	2,81	120

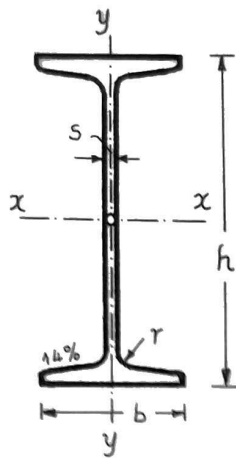
β) Από χάλυβα St 52

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
20	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	20
30	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,10	1,10	30
40	1,11	1,11	1,12	1,13	1,13	1,14	1,15	1,16	1,16	1,17	40
50	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,26	1,26	1,27	50
60	1,28	1,30	1,31	1,32	1,33	1,35	1,36	1,39	1,39	1,41	60
70	1,42	1,44	1,46	1,47	1,49	1,51	1,53	1,57	1,57	1,59	70
80	1,62	1,66	1,71	1,75	1,79	1,83	1,88	1,97	1,97	2,01	80
90	2,05	2,10	2,14	2,19	2,24	2,29	2,33	2,43	2,43	2,48	90

Για τιμές του λ κάτω απ' την παχιά γραμμή, θα πρέπει οι συντελεστές λυγισμού ω να παίρνονται απ' τους προηγούμενους αντίστοιχους πίνακες του DIN 4114.

Οι παραπάνω τιμές του ω , που είναι μικρότερες των αντιτοίχων κατά DIN 4114, μπορούν να χρησιμοποιηθούν όταν:

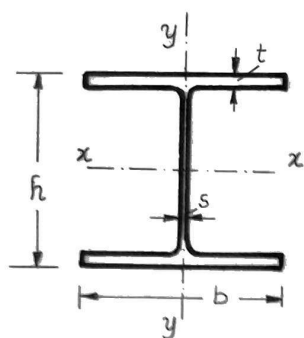
1. Το πάχος του σωλήνα είναι μικρότερο του $D/6$
2. Η ράβδος αποτελείται μόνο από ένα τμήμα, και
3. Δεν πρόκειται για κρίωμα από χαλυβδοσωλήνες.



Υγίκορμες δοκοί I με κεκλιμένες τις εσω- τερικές επιφάνειες των πελμάτων κατά DIN 1025/1.

F	Εμβαδόν διατομής	W	Ροπή αντίστασης
G	Βάρος	i	Ακτίνα αδράνειας
J	Ροπή αδράνειας	S _x	Στατική ροπή μωής διατομής.

Σύμ- βολο I	Διαστάσεις (mm)			F cm ²	G kg/m	x - x			y - y			S _x cm ³
	h	b	s=r			J _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	J _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	
80	80	42	3,9	7,57	5,94	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	11,4
100	100	50	4,5	10,6	8,34	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9
120	120	58	5,1	14,2	11,1	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8
140	140	66	5,7	18,2	14,3	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40	47,7
160	160	74	6,3	22,8	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0
180	180	82	6,9	27,9	21,9	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4
200	200	90	7,5	33,4	26,2	2140	214	8,00	117	26,0	1,87	125
220	220	98	8,1	39,5	31,1	3060	278	8,80	162	33,1	2,02	162
240	240	106	8,7	46,1	36,2	4250	354	9,59	221	41,7	2,20	206
260	260	113	9,4	53,3	41,9	5740	442	10,4	288	51,0	2,32	257
280	280	119	10,1	61,0	47,9	7590	542	11,1	364	61,2	2,45	316
300	300	125	10,8	69,0	54,2	9800	653	11,9	451	72,2	2,56	381
320	320	131	11,5	77,7	61,0	12510	782	12,7	555	84,7	2,67	457
340	340	137	12,2	86,7	68,0	15700	923	13,5	674	98,4	2,80	540
360	360	143	13,0	97,0	76,1	19610	1090	14,2	818	114	2,90	638
380	380	149	13,7	107	84,0	24010	1260	15,0	975	131	3,02	741
400	400	155	14,4	118	92,4	29210	1460	15,7	1160	149	3,13	857
425	425	163	15,3	132	104	36970	1740	16,7	1440	176	3,30	1020
450	450	170	16,2	147	115	45850	2040	17,7	1730	203	3,43	1200
475	475	178	17,1	163	128	56480	2380	18,6	2090	235	3,60	1400
500	500	185	18,0	179	141	68740	2750	19,6	2480	268	3,72	1620
550	550	200	19,0	212	166	99180	3610	21,6	3490	349	4,02	2120
600	600	215	21,6	254	199	139000	4630	23,4	4670	434	4,30	2730



Πλατύπελμες δοκοί I με ισοπαχή
πέδηματα ελαφράς κατασκευής, κα-
τά DIN 1025, φύλλο 3, Οκτ. 1963.

F Εμβαδόν διατομής

W Ροπή αντίστασης

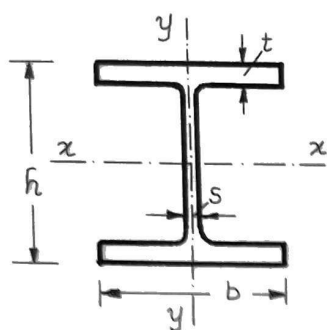
G Βάρος

i Ακτίνα αδράνειας τομής.

J Ροπή αδράνειας

Sx Στατική ροπή μίσης δια

Σύμ- βολο	Διαστάσεις (mm)				F cm ²	G kg/m	x - x			y - y			S _x cm ³
	h	b	s	t			J _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	J _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	
100	96	100	5	8	21,2	16,7	349	72,8	4,06	134	26,8	2,51	41,5
120	114	120	5	8	25,3	19,9	606	106	4,89	231	38,5	3,02	59,7
140	133	140	5,5	8,5	31,4	24,7	1030	155	5,73	389	55,6	3,52	86,7
160	152	160	6	9	38,8	30,4	1670	220	6,57	616	76,9	3,98	123
180	171	180	6	9,5	45,3	35,5	2510	294	7,45	925	103	4,52	162
200	190	200	6,5	10	53,8	42,3	3690	389	8,28	1340	134	4,98	215
220	210	220	7	11	64,3	50,5	5410	515	9,17	1950	178	5,51	284
240	230	240	7,5	12	76,8	60,3	7760	675	10,1	2770	231	6,00	372
260	250	260	7,5	12,5	86,8	68,2	10.450	836	11,0	3670	282	6,50	460
280	270	280	8	13	97,3	76,4	13.670	1010	11,9	4760	340	7,00	556
300	290	300	8,5	14	113	88,3	18.260	1260	12,7	6310	421	7,49	692
320	310	300	9	15,5	124	97,6	22.930	1480	13,6	6990	466	7,49	814
340	330	300	9,5	16,5	133	105	27.690	1680	14,4	7440	496	7,46	925
360	350	300	10	17,5	143	112	33.090	1890	15,2	7890	526	7,43	1040
400	390	300	11	19	159	125	45.070	2310	16,8	8560	571	7,34	1280
450	440	300	11,5	21	178	140	63.720	2900	18,9	9470	631	7,29	1610
500	490	300	12	23	198	155	86.970	3550	21,0	10.370	691	7,24	1970
550	540	300	12,5	24	212	166	111.900	4150	23,0	10.820	721	7,15	2310
600	590	300	13	25	226	178	141.200	4790	25,0	11.270	751	7,05	2680
650	640	300	13,5	26	242	190	175.200	5470	26,9	11.720	782	6,97	3070
700	690	300	14,5	27	260	204	215.300	6240	28,8	12.180	812	6,84	3520
800	790	300	15	28	286	224	303.400	7680	32,6	12.640	843	6,65	4350
900	890	300	16	30	321	252	422.100	9480	36,3	13.550	903	6,50	5410
1000	990	300	16,5	31	347	272	553.800	11.190	40,0	14.000	934	6,35	6410

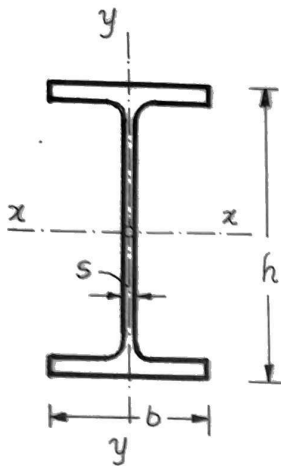


Πλατύπελμες δοκοί I με ισοπαχή
πέλματα ενισχυμένης κατασκευής
κατά DIN 1025, φύλλο 4, Οκτ. 1963.

F Εμβαδόν διατομής W Ροπή αντίστασης
G Βάρος i Ακτίνα αδράνειας
J Ροπή αδράνειας S_x Στατ. ροπή μίσης διατομής.

Σύμ- βολο	Διαστάσεις (mm)				F cm ²	G kg/m	x - x			y - y			S_x cm ³
	h	b	s	t			J_x cm ⁴	W_x cm ³	i_x cm	J_y cm ⁴	W_y cm ³	i_y cm	
IPB													
100	120	106	12	20	53,2	41,8	1140	190	4,63	399	75,3	2,74	118
120	140	126	12,5	21	66,4	52,1	2020	288	5,51	703	112	3,25	175
140	160	146	13	22	80,6	63,2	3290	411	6,39	1140	157	3,77	247
160	180	166	14	23	97,1	76,2	5100	566	7,25	1760	212	4,26	337
180	200	186	14,5	24	113	88,9	7480	748	8,13	2580	277	4,77	442
200	220	206	15	25	131	103	10.640	967	9,00	3650	354	5,27	568
220	240	226	15,5	26	149	117	14.600	1220	9,89	5010	444	5,79	710
240	270	248	18	32	200	157	24.290	1800	11,0	8150	657	6,30	1060
260	290	268	18	32	220	172	31.310	2160	11,9	10.450	780	6,90	1260
280	310	288	18,5	33	240	189	39.550	2550	12,8	13.160	914	7,40	1480
300	340	310	21	39	303	238	59.200	3480	14,0	19.400	1250	8,00	2040
320/305	320	305	16	29	225	177	40.950	2560	13,5	13.740	901	7,81	1460
320	359	309	21	40	312	245	68.130	3800	14,8	19.710	1280	7,95	2220
340	377	309	21	40	316	248	76.370	4050	15,6	19.710	1280	7,90	2360
360	395	308	21	40	319	250	84.870	4300	16,3	19.520	1270	7,83	2490
400	432	307	21	40	326	256	104.100	4820	17,9	19.340	1260	7,70	2790
450	478	307	21	40	335	263	131.500	5500	19,8	19.340	1260	7,59	3170
500	524	306	21	40	344	270	161.900	6180	21,7	19.150	1250	7,46	3550
550	572	306	21	40	354	278	198.000	6920	23,6	19.160	1250	7,35	3970
600	620	305	21	40	364	285	237.400	7660	25,6	18.970	1240	7,22	4390
650	668	305	21	40	374	293	281.700	8430	27,5	18.980	1240	7,13	4830
700	716	304	21	40	383	301	329.300	9200	29,3	18.800	1240	7,01	5270
800	814	303	21	40	404	317	442.600	10870	33,1	18.630	1230	6,79	6240
900	910	302	21	40	424	333	570.400	12.540	36,7	18.450	1220	6,60	7220
1000	1008	302	21	40	444	349	722.300	14.330	40,3	18.460	1220	6,45	8280

Σειρά **ΙΡΕ** (Έλαση εν θερμώ).

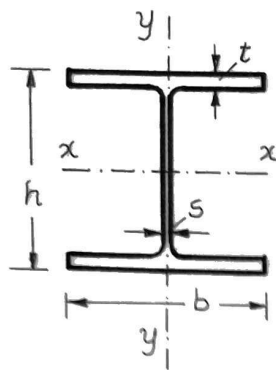


Δοκοί **I** μέσου πλάτους με
ισοπαχή πέλματα κατά DIN 1025, φύλ-
λο 5. Έκδοση Μαρτίου 1965.

Μήκη γενικά 4 ως 15 m.

F	Εμβαδόν διατομής	W	Ροπή αντίστασης
G	Βάρος	i	Ακτίνα αδράνειας
J	Ροπή αδράνειας	S_x	Στατική ροπή μωής διατομής

Σύμ- βολο ΙΡΕ	Διαστάσεις (mm)			F cm ²	G kg/m	$x - x$			$y - y$			S_x cm ³
	h	b	s			J_x cm ⁴	W_x cm ³	i_x cm	J_y cm ⁴	W_y cm ³	i_y cm	
80	80	46	3,8	7,04	6,00	80,1	20,0	3,24	8,49	3,69	1,05	11,6
100	100	55	4,1	10,3	8,10	171	34,2	4,07	15,9	5,79	1,24	19,7
120	120	64	4,4	13,2	10,4	318	53,0	4,90	27,7	8,65	1,45	30,4
140	140	73	4,7	16,4	12,9	541	77,3	5,74	44,9	12,3	1,65	44,2
160	160	82	5,0	20,1	15,8	869	109	6,58	68,3	16,7	1,84	61,9
180	180	91	5,3	23,9	18,8	1320	146	7,42	101	22,2	2,05	83,2
200	200	100	5,6	28,5	22,4	1940	194	8,26	142	28,5	2,24	110
220	220	110	5,9	33,4	26,2	2770	252	9,11	205	37,3	2,48	143
240	240	120	6,2	39,1	30,7	3890	324	9,97	284	47,3	2,69	183
270	270	135	6,6	45,9	36,1	5790	429	11,2	420	62,2	3,02	242
300	300	150	7,1	53,8	42,2	8360	557	12,5	640	80,5	3,35	314
330	330	160	7,5	62,6	49,1	11770	713	13,7	788	98,5	3,55	402
360	360	170	8,0	72,7	57,1	16270	904	15,0	1040	123	3,79	510
400	400	180	8,6	84,5	66,3	23130	1160	16,5	1320	146	3,95	654
450	450	190	9,4	98,8	77,6	33740	1500	18,5	1680	176	4,12	851
500	500	200	10,2	116	90,7	48200	1930	20,4	2140	214	4,31	1100
550	550	210	11,1	134	106	67120	2440	22,3	2670	254	4,45	1390
600	600	220	12,0	156	122	92080	3070	24,3	3390	308	4,06	1760



Σειρά IPB. Πλατύπελμες δοκοί I
με ισοπαχή πέλματα κατά DIN
1025, φύλλο 2, Οκτ. 1963.

F Εμβαδόν διατομής

W Ροπή αντίστασης

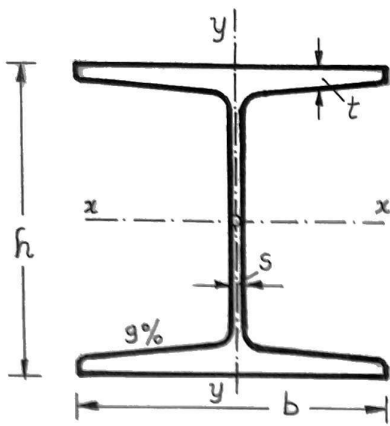
G Βάρος

i Ακτίνα αδράνειας

J Ροπή αδράνειας

S_x Στατ. ροπή μίσης διατομής.

Σύμ- βολο	Διαστάσεις (mm)				F cm ²	G kg/m	x - x			y - y			S _x cm ³
	h	b	s	t			J _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	J _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	
IPB													
100	100	100	6	10	26,0	20,4	450	89,9	4,16	167	33,5	2,53	52,1
120	120	120	6,5	11	34,0	26,7	864	144	5,04	318	52,9	3,06	82,6
140	140	140	7	12	43,0	33,7	1510	216	5,93	550	78,5	3,58	123
160	160	160	8	13	54,3	42,6	2490	311	6,78	889	111	4,05	177
180	180	180	8,5	14	65,3	51,2	3830	426	7,66	1360	151	4,57	241
200	200	200	9	15	78,1	61,3	5700	570	8,54	2 000	200	5,07	321
220	220	220	9,5	16	91,0	71,5	8090	736	9,43	2840	258	5,59	414
240	240	240	10	17	106	83,2	11.260	938	10,3	3920	327	6,08	527
260	260	260	10	17,5	118	93,0	14.920	1150	11,2	5130	395	6,58	641
280	280	280	10,5	18	131	103	19.270	1380	12,1	6590	471	7,09	767
300	300	300	11	19	149	117	25.170	1680	13,0	8560	571	7,58	934
320	320	300	11,5	20,5	161	127	30.820	1930	13,8	9240	616	7,57	1070
340	340	300	12	21,5	171	134	36.660	2160	14,6	9690	646	7,53	1200
360	360	300	12,5	22,5	181	142	43.190	2400	15,5	10.140	676	7,49	1340
400	400	300	13,5	24	198	155	57.680	2880	17,1	10.820	721	7,40	1620
450	450	300	14	26	218	171	79.890	3550	19,1	11.720	781	7,33	1990
500	500	300	14,5	28	239	187	107.200	4290	21,2	12.620	842	7,27	2410
550	550	300	15	29	254	199	136.700	4970	23,2	13.080	872	7,17	2800
600	600	300	15,5	30	270	212	171.000	5700	25,2	13.530	902	7,08	3210
650	650	300	16	31	286	225	210.600	6480	27,1	13.980	932	6,99	3660
700	700	300	17	32	306	241	256.900	7340	29,0	14.440	963	6,87	4160
800	800	300	17,5	33	334	262	359.100	8980	32,8	14.900	994	6,68	5110
900	900	300	18,5	35	371	291	494.100	10.980	36,5	15.820	1050	6,53	6290
1000	1000	300	19	36	400	314	644.700	12.890	40,1	16.280	1090	6,38	7430



Σειρά IB

Πλατύπελμες δοκοί I με κε-
κλιμένα εσωτερικά πέλματα
κατά DIN 1025, φυλ. 2, Οκτ. 1963.

F Εμβαδόν διατομής

W Ροπή αντίστασης

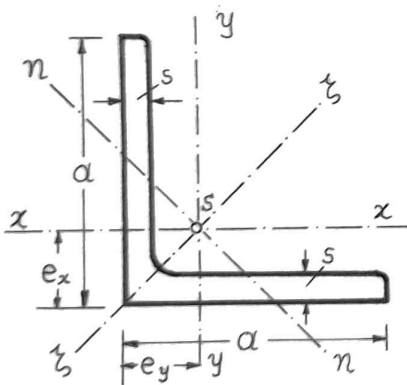
G Βάρος

i Ακτίνα αδράνειας

J Ροπή αδράνειας

S_x Στατ. ροπή μίσης διατ.

Συμ- βολο	Διαστάσεις (mm)				F cm ²	G kg/m	x - x			y - y			S _x cm ³
	h	b	s	t			J _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	J _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	
IB													
100	100	100	7,5	10,25	26,8	21,0	447	89,4	4,09	151	30,1	2,37	53
120	120	120	8	11	34,6	27,2	852	142	4,96	276	46,0	2,82	82
140	140	140	8	12	43,3	34,0	1490	213	5,86	475	67,8	3,31	122
160	160	160	9	14	57,4	45,0	2580	322	6,70	831	104	3,81	184
180	180	180	9	14	64,7	50,8	3750	417	7,62	1170	130	4,25	237



Ισοσκελή γωνιακά ελάσματα L
με στρογγυλεμένες ακμές, κατά
DIN 1028, Οκτ. 1963.

F Εμβαδόν διατομής

W Ροπή αντίστασης

G Βάρος

i Ακτίνα αδράνειας

J Ροπή αδράνειας

Ο άξονας ξ-ξ είναι διχοτόμος.

Συμβο- λιεμός L	Διαστάς (mm)		F cm ²	G kg/m	e _x =e _y cm	x - x = y - y			ξ - ξ		η - η		
	α	s				J _x =J _y cm ⁴	W _x =W _y cm ³	i _x =i _y cm	J _ξ cm ⁴	i _ξ cm	J _η cm ⁴	W _η cm ³	i _η (min) cm
20 x	3	3	1,12	0,88	0,60	0,39	0,28	0,59	0,62	0,74	0,15	0,18	0,37
	4	4	1,45	1,14	0,64	0,48	0,35	0,58	0,77	0,73	0,19	0,21	0,36
25 x	3	3	1,42	1,12	0,73	0,79	0,45	0,75	1,27	0,95	0,31	0,30	0,47
	4	4	1,85	1,45	0,76	1,01	0,58	0,74	1,61	0,93	0,40	0,37	0,47
	5	5	2,26	1,77	0,80	1,18	0,69	0,72	1,87	0,91	0,50	0,44	0,47

Συμβολισμός L	Διαστάσεις (mm)		F cm ²	G kg/m	e _x = e _y cm	x - x = y - y			ξ - ξ		n - n		
	α	s				J _x =J _y cm ⁴	W _x =W _y cm ³	i _x =i _y cm	J _ξ cm ⁴	i _ξ cm	J _n cm ⁴	W _n cm ³	i _n (mm) cm
30 x 4	30	3	1,74	1,36	0,84	1,41	0,65	0,90	2,24	1,14	0,57	0,48	0,57
		4	2,27	1,78	0,89	1,81	0,86	0,89	2,85	1,12	0,76	0,61	0,58
		5	2,78	2,18	0,92	2,16	1,04	0,88	3,41	1,11	0,91	0,70	0,57
35 x 4	35	3	2,04	1,60	0,96	2,29	0,90	1,06	3,63	1,34	0,95	0,70	0,68
		4	2,67	2,10	1,00	2,96	1,18	1,05	4,68	1,33	1,24	0,88	0,68
		5	3,28	2,57	1,04	3,56	1,45	1,04	5,63	1,31	1,49	1,10	0,67
		6	3,87	3,04	1,08	4,14	1,71	1,04	6,50	1,30	1,77	1,16	0,68
40 x 4	40	3	2,35	1,84	1,07	3,45	1,18	1,21	5,45	1,52	1,44	0,95	0,78
		4	3,08	2,42	1,12	4,48	1,56	1,21	7,09	1,52	1,86	1,18	0,78
		5	3,79	2,97	1,16	5,43	1,91	1,20	8,64	1,51	2,22	1,35	0,77
		6	4,48	3,52	1,20	6,33	2,26	1,19	9,98	1,49	2,67	1,57	0,77
45 x 4	45	4	3,49	2,74	1,23	6,43	1,97	1,36	10,2	1,71	2,68	1,53	0,88
		5	4,30	3,38	1,28	7,83	2,43	1,35	12,4	1,70	3,25	1,80	0,87
		6	5,09	4,00	1,32	9,16	2,88	1,34	14,5	1,69	3,83	2,05	0,87
		7	5,86	4,60	1,36	10,4	3,31	1,33	16,4	1,67	4,39	2,29	0,87
50 x 4	50	4	3,89	3,06	1,36	8,97	2,46	1,52	14,2	1,91	3,73	1,94	0,98
		5	4,80	3,77	1,40	11,0	3,05	1,51	17,4	1,90	4,59	2,32	0,98
		6	5,69	4,47	1,45	12,8	3,61	1,50	20,4	1,89	5,24	2,57	0,96
		7	6,56	5,15	1,49	14,6	4,15	1,49	23,1	1,88	6,02	2,85	0,96
		8	7,41	5,82	1,52	16,3	4,68	1,48	25,7	1,86	6,87	3,19	0,96
		9	8,24	6,47	1,56	17,9	5,20	1,47	28,1	1,85	7,67	3,47	0,97
55 x 4	55	5	5,32	4,18	1,52	14,7	3,70	1,66	23,3	2,09	6,11	2,84	1,07
		6	6,31	4,95	1,56	17,3	4,40	1,66	27,4	2,08	7,24	3,28	1,07
		8	8,23	6,46	1,64	22,1	5,72	1,64	34,8	2,06	9,35	4,03	1,07
		10	10,1	7,90	1,72	26,3	6,97	1,62	41,4	2,02	11,3	4,65	1,06
60 x 4	60	5	5,82	4,57	1,64	19,4	4,45	1,82	30,7	2,30	8,03	3,46	1,17
		6	6,91	5,42	1,69	22,8	5,29	1,82	36,1	2,29	9,43	3,95	1,17
		8	9,03	7,09	1,77	29,1	6,88	1,80	46,1	2,26	12,1	4,84	1,16
		10	11,1	8,69	1,85	34,9	8,41	1,78	55,1	2,23	14,6	5,57	1,15

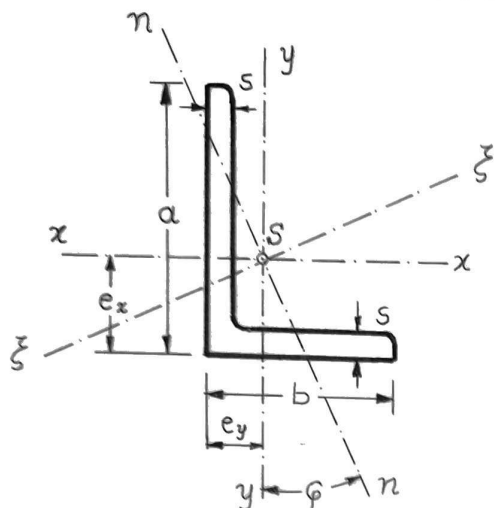
Συμβολισμός L	Διαστ. (mm)		F cm ²	G kg/m	e _x = e _y cm	x - x = y - y			ξ - ξ		n - n		
	a	s				J _x =J _y cm ⁴	W _x =W _y cm ³	i _x =i _y cm	J _ξ cm ⁴	i _ξ cm	J _n cm ⁴	W _n cm ³	i _n (min) cm
65 × 8	65	6	7,53	5,91	1,80	29,2	6,21	1,97	46,3	2,48	12,1	4,74	1,27
		7	8,70	6,83	1,85	33,4	7,18	1,96	53,0	2,47	13,8	5,27	1,26
		8	9,85	7,73	1,89	37,5	8,13	1,95	59,4	2,46	15,6	5,84	1,26
		9	11,0	8,62	1,93	41,3	9,04	1,94	65,4	2,44	17,2	6,30	1,25
		11	13,2	10,3	2,00	48,8	10,8	1,91	76,8	2,42	20,7	7,31	1,25
70 × 8	70	6	8,13	6,38	1,93	36,9	7,27	2,13	58,5	2,68	15,3	5,60	1,37
		7	9,40	7,38	1,97	42,4	8,43	2,12	67,1	2,67	17,6	6,31	1,37
		9	11,9	9,34	2,05	52,6	10,6	2,10	83,1	2,64	22,0	7,59	1,36
		11	14,3	11,2	2,13	61,8	12,7	2,08	97,6	2,61	26,0	8,64	1,35
75 × 8	75	6	8,75	6,87	2,04	45,6	8,35	2,28	72,2	2,87	18,9	6,54	1,47
		7	10,1	7,94	2,09	52,4	9,67	2,28	83,6	2,88	21,1	7,15	1,45
		8	11,5	9,03	2,13	58,9	11,0	2,26	93,3	2,85	24,4	8,11	1,46
		10	14,1	11,1	2,21	71,4	13,5	2,25	113	2,83	29,8	9,55	1,45
		12	16,7	13,1	2,29	82,4	15,8	2,22	130	2,79	34,7	10,7	1,44
80 × 10	80	7	10,8	8,49	2,21	64,2	11,1	2,44	102	3,07	26,5	8,48	1,57
		8	12,3	9,66	2,26	72,3	12,6	2,42	115	3,06	29,6	9,25	1,55
		10	15,1	11,9	2,34	87,5	15,5	2,41	139	3,03	35,9	10,9	1,54
		12	17,9	14,1	2,41	102	18,2	2,39	161	3,00	43,0	12,6	1,53
		14	20,6	16,1	2,48	115	20,8	2,36	181	2,96	48,6	13,9	1,54
90 × 11	85	8	13,9	10,9	2,50	104	16,1	2,74	165	3,45	43,5	12,3	1,77
		9	15,5	12,2	2,54	116	18,0	2,74	184	3,45	47,8	13,3	1,76
		11	18,7	14,7	2,62	138	21,6	2,72	218	3,41	57,1	15,4	1,75
		13	21,8	17,1	2,70	158	25,1	2,69	250	3,39	65,9	17,3	1,74
		16	26,4	20,7	2,81	186	30,1	2,66	294	3,34	79,1	19,9	1,73
100 × 14	90	8	15,5	12,2	2,74	145	19,9	3,06	230	3,85	59,9	15,5	1,96
		10	19,2	15,1	2,82	177	24,7	3,04	280	3,82	73,3	18,4	1,95
		12	22,7	17,8	2,90	207	29,2	3,02	328	3,80	86,2	21,0	1,95
		14	26,2	20,6	2,98	235	33,5	3,00	372	3,77	98,3	23,4	1,94
		16	29,6	23,2	3,06	262	37,7	2,97	413	3,74	111	25,6	1,93
		20	36,2	28,4	3,20	311	45,7	2,93	487	3,67	135	29,8	1,93

Συμβολισμός L	Διαστάσεις (mm)		F cm ²	G kg/m	e _x = e _y cm	x - x = y - y			ξ - ξ		η - η		
	α	ς				J _x =J _y cm ⁴	W _x =W _y cm ³	i _x =i _y cm	J _ξ cm ⁴	i _ξ cm	J _η cm ⁴	W _η cm ³	i _η (min) cm
10 110 × 12 14	110	10	21,2	16,6	3,07	239	30,1	3,36	379	4,23	98,6	22,7	2,16
		12	25,1	19,7	3,15	280	35,7	3,34	444	4,21	116	26,1	2,15
		14	29,0	22,8	3,21	319	41,0	3,32	505	4,18	133	29,3	2,14
11 120 × 12 13 15	120	11	25,4	19,9	3,36	341	39,5	3,66	541	4,62	140	29,5	2,35
		12	27,5	21,6	3,40	368	42,7	3,65	584	4,60	152	31,6	2,35
		13	29,7	23,3	3,44	394	46,0	3,64	625	4,59	162	33,3	2,34
		15	33,9	26,6	3,51	446	52,5	3,63	705	4,56	186	37,5	2,34
12 130 × 14 16	130	12	30,0	23,6	3,64	472	50,4	3,97	750	5,00	194	37,7	2,54
		14	34,7	27,2	3,72	540	58,2	3,94	857	4,97	223	42,4	2,53
		16	39,3	30,9	3,80	605	65,8	3,92	959	4,94	251	46,7	2,52
13 140 × 15	140	13	35,0	27,5	3,92	638	63,3	4,27	1010	5,38	262	47,3	2,74
		15	40,0	31,4	4,00	723	72,3	4,25	1150	5,36	298	52,7	2,73
12 14 150 × 15 16 18 20	150	12	34,8	27,3	4,12	737	67,7	4,60	1170	5,80	303	52,0	2,95
		14	40,3	31,6	4,21	845	78,2	4,58	1340	5,77	347	58,3	2,94
		15	43,0	33,8	4,25	898	83,5	4,57	1430	5,76	370	61,6	2,93
		16	45,7	35,9	4,29	949	88,7	4,56	1510	5,74	391	64,4	2,93
		18	51,0	40,1	4,36	1050	99,3	4,54	1670	5,70	438	71,0	2,93
		20	56,3	44,2	4,44	1150	109	4,51	1820	5,68	477	76,0	2,91
15 160 × 17 19	160	15	46,1	36,2	4,49	1100	95,6	4,88	1750	6,15	453	71,3	3,14
		17	51,8	40,7	4,57	1230	108	4,86	1950	6,13	506	78,3	3,13
		19	57,5	45,1	4,65	1350	118	4,84	2140	6,10	558	84,8	3,12
16 18 180 × 20 22	180	16	55,4	43,5	5,02	1680	130	5,51	2690	6,96	679	95,5	3,50
		18	61,9	48,6	5,10	1870	145	5,49	2970	6,93	757	105	3,49
		20	68,4	53,7	5,18	2040	160	5,47	3260	6,90	830	113	3,49
		22	74,7	58,6	5,26	2210	174	5,44	3510	6,86	918	123	3,50
16 18 200 × 20 24 28	200	16	61,8	48,5	5,52	2340	162	6,15	3740	7,78	943	121	3,91
		18	69,1	54,3	5,60	2600	181	6,13	4150	7,75	1050	133	3,90
		20	76,4	59,9	5,68	2850	199	6,11	4540	7,72	1160	144	3,89
		24	90,6	71,1	5,84	3330	235	6,06	5280	7,64	1380	167	3,90
		28	105	82,0	5,99	3780	270	6,02	5990	7,57	1580	186	3,89

Ανισοσκελή γωνιακά ελάσματα L

με βτρογγυλεμένες ακμές, κατά

DIN 1029, έκδ. Ιουν. 1967.



F Εμβαδόν διατομής | W Ροπή αντίστασης

G Βάρος

i Ακτίνα αδράνειας

J Ροπή αδράνειας

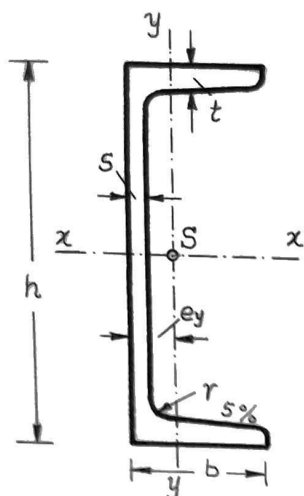
x-x, y-y κ.β. άξονες παρ/λοι των πελμάτων

ξ-ξ, η-η κ.β. κύριοι άξονες αδράνειας.

Συμβολισμός L	Διαστάσεις (mm)			F cm ²	G kg/m	Θέσεις αξόνων			x - x			y - y			ξ - ξ		η - η	
	a	b	s			e _x	e _y	εφφ	J _x	W _x	i _x	J _y	W _y	i _y	J _ξ	i _ξ	J _η	i _η
	cm	cm	cm			cm	cm	-	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm	cm ⁴	cm
30·20· ³ / ₄	30	20	3	1,42	1,11	0,99	0,50	0,431	1,25	0,62	0,94	0,44	0,29	0,56	1,43	1,00	0,25	0,42
			4	1,85	1,45	1,03	0,54	0,423	1,59	0,81	0,93	0,55	0,38	0,55	1,81	0,99	0,33	0,42
40·20· ³ / ₄	40	20	3	1,72	1,35	1,43	0,44	0,259	2,79	1,08	1,27	0,47	0,30	0,52	2,96	1,31	0,30	0,42
			4	2,25	1,77	1,47	0,48	0,252	3,59	1,42	1,26	0,60	0,39	0,52	3,79	1,30	0,39	0,42
45·30· ³ / ₄	45	30	3	2,19	1,72	1,43	0,70	0,436	4,47	1,46	1,43	1,60	0,70	0,86	5,15	1,53	0,93	0,65
			4	2,87	2,25	1,48	0,74	0,430	5,78	1,91	1,42	2,05	0,91	0,85	6,65	1,52	1,18	0,64
			5	3,53	2,77	1,52	0,78	0,430	6,99	2,35	1,41	2,47	1,11	0,84	8,02	1,51	1,44	0,64
50·30· ⁵ / ₅	50	30	5	3,78	2,96	1,73	0,74	0,353	9,41	2,88	1,58	2,54	1,12	0,82	10,4	1,66	1,56	0,64
50·40· ⁴ / ₅	50	40	4	3,46	2,71	1,52	1,03	0,629	8,54	2,47	1,57	4,86	1,64	1,19	10,9	1,78	2,46	0,84
			5	4,27	3,35	1,56	1,07	0,625	10,4	3,02	1,56	5,89	2,01	1,18	13,3	1,76	3,02	0,84
60·30· ⁵ / ₇	60	30	5	4,29	3,37	2,15	0,68	0,256	15,6	4,04	1,90	2,60	1,12	0,78	16,5	1,96	1,69	0,63
			7	5,85	4,59	2,24	0,76	0,248	20,7	5,50	1,88	3,41	1,52	0,76	21,8	1,93	2,28	0,62
60·40· ⁵ / ₆	60	40	5	4,79	3,76	1,96	0,97	0,437	17,2	4,25	1,89	6,11	2,02	1,13	19,8	2,03	3,50	0,86
			6	5,68	4,46	2,00	1,01	0,433	20,1	5,03	1,88	7,12	2,38	1,12	23,1	2,02	4,12	0,85
			7	6,55	5,14	2,04	1,05	0,429	23,0	5,79	1,87	8,07	2,74	1,11	26,3	2,00	4,73	0,85
65·50· ⁵ / ₇	65	50	5	5,54	4,35	1,99	1,25	0,583	23,1	5,11	2,04	11,9	3,18	1,47	28,8	2,28	6,21	1,06
			7	7,60	5,97	2,07	1,33	0,574	31,0	6,99	2,02	15,8	4,31	1,44	38,4	2,25	8,37	1,05
			9	9,58	7,52	2,15	1,41	0,567	38,2	8,77	2,00	19,4	5,39	1,42	47,0	2,22	10,5	1,05

Συμβολισμός L	Διαστάσεις (mm)			F cm ²	G kg/m	Θέσεις αξόνων			x - x			y - y			ξ - ξ		η - η	
	a	b	s			e _x cm	e _y cm	εφφ -	J _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	J _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	J _ξ cm ⁴	i _ξ cm	J _η cm ⁴	i _η cm
5			5	6,04	4,74	2,40	1,17	0,437	34,4	6,74	2,39	12,3	3,21	1,43	39,6	2,56	7,10	1,08
75·50·7	75	50	7	8,30	6,51	2,48	1,25	0,433	46,4	9,24	2,36	16,5	4,39	1,41	53,3	2,53	9,56	1,07
9			9	10,5	8,23	2,56	1,32	0,427	57,4	11,6	2,34	20,2	5,49	1,39	65,7	2,50	11,9	1,07
5			5	6,30	4,95	2,31	1,33	0,530	35,5	6,84	2,37	16,2	3,89	1,60	43,1	2,61	8,68	1,17
75·55·7	75	55	7	8,66	6,80	2,40	1,41	0,525	47,9	9,39	2,35	21,8	5,32	1,59	57,9	2,59	11,8	1,17
9			9	10,9	8,59	2,47	1,48	0,518	59,4	11,8	2,33	26,8	6,66	1,57	71,3	2,55	14,8	1,16
6			6	6,89	5,41	2,85	0,88	0,259	44,9	8,73	2,55	7,59	2,44	1,05	47,6	2,63	4,90	0,84
80·40·8	80	40	8	9,01	7,07	2,94	0,95	0,253	57,6	11,4	2,53	9,68	3,18	1,04	60,9	2,60	6,41	0,84
6			6	8,41	6,60	2,39	1,65	0,649	52,8	9,41	2,51	31,2	6,44	1,93	68,5	2,85	15,6	1,36
80·65·8	80	65	8	11,0	8,66	2,47	1,73	0,645	68,1	12,3	2,49	40,1	8,41	1,91	88,0	2,82	20,3	1,36
10			10	13,6	10,7	2,55	1,81	0,640	82,2	15,1	2,46	48,3	10,3	1,89	106	2,79	24,8	1,35
6			6	8,69	6,82	2,89	1,41	0,442	71,7	11,7	2,87	25,8	5,61	1,72	82,8	3,09	14,6	1,30
90·60·8	90	60	8	11,4	8,96	2,97	1,49	0,437	92,5	15,4	2,85	33,0	7,31	1,70	107	3,06	19,0	1,29
90·75·7	90	75	7	11,1	8,74	2,67	1,93	0,683	88,1	13,9	2,81	55,5	9,98	2,23	117	3,24	27,1	1,56
6			6	8,73	6,85	3,49	1,04	0,263	89,7	13,8	3,20	15,3	3,86	1,32	95,2	3,30	9,76	1,06
100·50·8	100	50	8	11,5	8,99	3,59	1,13	0,258	116	18,0	3,18	19,5	5,04	1,31	123	3,28	12,6	1,05
10			10	14,1	11,1	3,67	1,20	0,252	141	22,2	3,16	23,4	6,17	1,29	149	3,25	15,5	1,04
7			7	11,2	8,77	3,23	1,51	0,419	113	16,6	3,17	37,6	7,54	1,84	128	3,39	26,1	1,39
100·65·9	100	65	9	14,2	11,1	3,32	1,59	0,415	147	21,0	3,15	46,7	9,52	1,82	160	3,36	27,2	1,39
11			11	17,1	13,4	3,40	1,67	0,410	167	25,3	3,13	55,1	11,4	1,80	190	3,34	32,6	1,38
7			7	11,9	9,32	3,06	1,83	0,553	118	17,0	3,15	56,9	10,0	2,19	145	3,49	30,1	1,59
100·75·9	100	75	9	15,1	11,8	3,15	1,91	0,549	148	21,5	3,13	71,0	12,7	2,17	181	3,47	37,8	1,59
11			11	18,2	14,3	3,23	1,99	0,545	176	25,9	3,11	84,0	15,3	2,15	214	3,44	45,4	1,58
8			8	15,5	12,2	3,83	1,87	0,441	226	27,6	3,82	80,8	13,2	2,29	261	4,10	45,8	1,72
120·80·10	120	80	10	19,1	15,0	3,92	1,95	0,438	276	34,1	3,80	98,1	16,2	2,27	318	4,07	56,1	1,71
12			12	22,7	17,8	4,00	2,03	0,433	223	40,4	3,77	114	19,1	2,25	371	4,04	66,1	1,71
14			14	26,2	20,5	4,08	2,10	0,429	268	46,4	3,75	130	22,0	2,23	421	4,01	75,8	1,70

Συμβολισμός L	Διαστάσεις (mm)			F cm ²	G kg/m	Θέσεις αξόνων			x - x			y - y			ξ - ξ		η - η	
	α	b	S			e _x cm	e _y cm	ε _{φφ} -	J _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	J _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	J _ξ cm ⁴	i _ξ cm	J _η cm ⁴	i _η cm
8			8	15,1	11,9	4,56	1,37	0,263	263	31,1	4,17	44,8	8,72	1,72	280	4,31	28,6	1,38
130-65-10	130	65	10	18,6	14,6	4,65	1,45	0,259	321	38,4	4,15	54,2	10,7	1,71	340	4,27	35,0	1,37
12			12	22,1	17,3	4,74	1,53	0,255	376	45,5	4,12	63,0	12,7	1,69	397	4,24	41,2	1,37
8			8	15,9	12,5	4,36	1,65	0,339	276	31,9	4,17	68,3	11,7	2,08	303	4,37	41,3	1,61
130-75-10	130	75	10	19,6	15,4	4,45	1,73	0,336	337	39,4	4,14	82,9	14,4	2,06	369	4,34	50,6	1,61
12			12	23,3	18,3	4,53	1,81	0,332	395	46,6	4,12	96,5	17,0	2,04	432	4,31	59,6	1,60
10			10	21,2	16,6	4,15	2,18	0,472	358	40,5	4,11	141	20,6	2,58	420	4,46	78,5	1,93
130-90-12	130	90	12	25,1	19,7	4,24	2,26	0,468	420	48,0	4,09	165	24,4	2,56	492	4,43	92,6	1,92
9			9	19,5	15,3	5,28	1,57	0,265	455	46,8	4,83	78,3	13,2	2,00	484	4,98	50,0	1,60
150-75-11	150	75	11	23,6	18,6	5,37	1,65	0,261	545	56,6	4,80	93,0	15,9	1,98	578	4,95	59,8	1,59
10			10	23,2	18,2	4,99	2,03	0,360	532	53,1	4,79	145	20,9	2,51	5,89	5,05	88,0	1,95
150-90-12	150	90	12	27,5	21,6	5,08	2,11	0,358	626	63,1	4,77	170	24,7	2,49	6,93	5,02	103	1,94
10			10	24,2	19,0	4,80	2,34	0,442	552	54,1	4,78	198	25,8	2,86	637	5,13	112	2,15
150-100-12	150	100	12	28,7	22,6	4,89	2,42	0,439	650	64,2	4,76	232	30,6	2,84	749	5,10	132	2,15
14			14	33,2	26,1	4,97	2,50	0,435	744	74,1	4,73	264	35,2	2,82	856	5,07	152	2,14
10			10	23,2	18,2	5,63	1,69	0,263	611	58,9	5,14	104	16,5	2,12	648	5,29	67,0	1,70
160-80-12	160	80	12	27,5	21,6	5,72	1,77	0,259	720	70,0	5,11	122	19,6	2,10	763	5,26	78,9	1,69
14			14	31,8	25,0	5,81	1,85	0,256	823	80,7	5,09	139	22,5	2,09	871	5,23	90,5	1,69
10			10	26,2	20,6	6,28	1,85	0,262	880	75,1	5,80	151	21,2	2,40	934	5,97	97,4	1,93
180-90-12	180	90	12	31,2	24,5	6,37	1,93	0,261	1040	89,3	5,77	177	25,1	2,38	1100	5,94	114	1,92
14			14	36,1	28,3	6,46	2,01	0,259	1190	103	5,75	202	28,9	2,37	1260	5,92	131	1,91
10			10	29,2	23,0	6,93	2,01	0,266	1220	93,2	6,46	210	26,3	2,68	1300	6,66	133	2,14
12			12	34,8	27,3	7,03	2,10	0,264	1440	111	6,43	247	31,3	2,67	1530	6,63	158	2,13
200-100-14	200	100	14	40,3	31,6	7,12	2,18	0,262	1650	128	6,41	282	36,1	2,65	1760	6,60	181	2,12
16			16	45,7	35,9	7,20	2,26	0,259	1860	145	6,38	316	40,8	2,63	1970	6,57	204	2,11
10			10	33,2	26,1	9,45	1,56	0,154	2170	140	8,08	161	21,7	2,20	2220	8,17	112	1,84
12			12	39,6	31,1	9,55	1,65	0,153	2570	166	8,05	189	25,8	2,19	2630	8,14	132	1,83
250-90-14	250	90	14	45,9	36,0	9,65	1,73	0,152	2960	192	8,03	216	29,7	2,17	3020	8,11	152	1,82
16			16	52,1	40,9	9,74	1,81	0,150	3330	218	8,00	242	33,6	2,16	3400	8,08	171	1,81



Δοκοί C με ετρογγυλεμένες ακμές κα-
τά DIN 1026, Οκτ. 1963 (έλαση εν θερμώ).

F Εμβαδόν διατομής

G Βάρος

J Ροπή αδράνειας

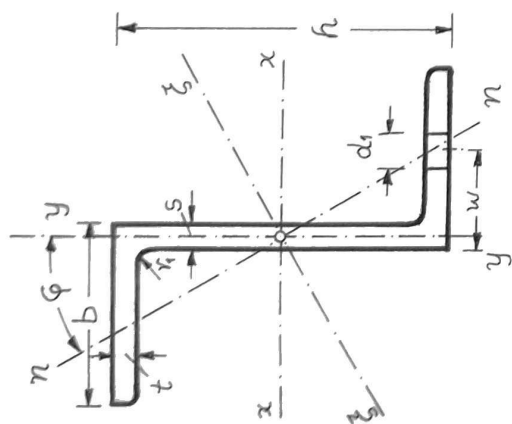
W Ροπή αντίστασης

i Ακτίνα αδράνειας

Κλίση για $\begin{cases} h \leq 300 : 8\% \\ h > 300 : 5\% \end{cases}$

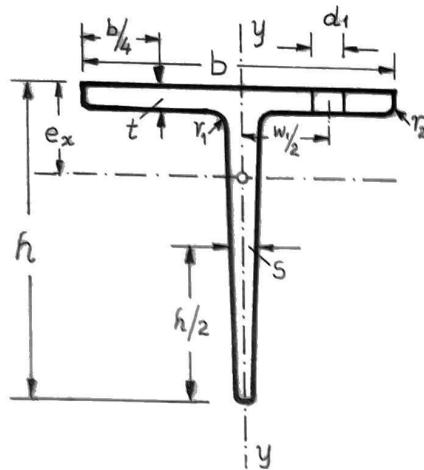
Σύμ- βολο. C	Διαστάσεις (mm)				F cm ²	G kg/m	x - x			y - y			e _y cm
	h	b	s	t=r			J _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	J _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	
30x15	30	15	4	4,5	2,21	1,74	2,53	1,69	1,07	0,38	0,39	0,42	0,52
30	30	33	5	7	5,44	4,27	6,39	4,26	1,08	5,33	2,68	0,99	1,31
40x20	40	20	5	5,5	3,66	2,87	7,58	3,79	1,44	1,14	0,86	0,56	0,67
40	40	35	5	7	6,21	4,87	14,1	7,05	1,50	6,68	3,08	1,04	1,33
50x25	50	25	5	6	4,92	3,86	16,8	6,73	1,85	2,49	1,48	0,71	0,81
50	50	38	5	7	7,12	5,59	26,4	10,6	1,92	9,12	3,75	1,13	1,37
60x30	60	30	6	6	6,46	5,07	31,6	10,5	2,21	4,51	2,16	0,84	0,91
65	65	42	5,5	7,5	9,03	7,09	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	1,42
80	80	45	6	8	11,0	8,64	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	1,45
100	100	50	6	8,5	13,5	10,6	206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	1,55
120	120	55	7	9	17,0	13,4	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	1,60
140	140	60	7	10	20,4	16,0	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	1,75
160	160	65	7,5	10,5	24,0	18,8	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	1,84
180	180	70	8	11	28,0	22,0	1350	150	6,95	114	22,4	2,02	1,92
200	200	75	8,5	11,5	32,2	25,3	1910	191	7,70	148	27,0	2,14	2,01
220	220	80	9	12,5	37,4	29,4	2690	245	8,48	197	33,6	2,30	2,14
240	240	85	9,5	13	42,3	33,2	3600	300	9,22	248	39,6	2,42	2,23
260	260	90	10	14	48,3	37,9	4820	371	9,99	317	47,7	2,56	2,36
280	280	95	10	15	53,3	41,8	6280	448	10,9	399	57,2	2,74	2,53
300	300	100	10	16	58,8	46,2	8030	535	11,7	495	67,8	2,90	2,70
320	320	100	14	17,5	75,8	59,5	10870	679	12,1	597	80,6	2,81	2,60
350	350	100	14	16	77,3	60,6	12840	734	12,9	570	75,0	2,72	2,40
380	380	102	13,5	16	80,4	63,1	15760	829	14,0	615	78,7	2,77	2,38
400	400	110	14	18	91,5	71,8	20350	1020	14,9	846	102	3,04	2,65

Δοκοί **L** με ετρογγυλεμένες ακμές κατά DIN 1027, Οκτ. 1963.



F Εμβαδόν διατομής i Ακτίνα αδράνειας
G Βάρος J_{xy} Φυγόκεντρο ροπή
J Ροπή αδράνειας $Oπές$ πελμάτων: κατά DIN 997
W Ροπή αντίστασης Υλικό κατασκευής: Χαλυβες κατά DIN 17100

Σύμ- βολο	Διαστάσεις (mm)				F cm ²	G kg/m	Θέση άξονα n-n εφφ	χ - x			y - y			ξ - ξ			η - η			Οπές πέλματος (mm)		
	h	b	s	t=r ₁				J _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	J _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	J _ξ cm ⁴	W _ξ cm ³	i _ξ cm	J _η cm ⁴	W _η cm ³	i _η cm	J _{xy} cm ⁴	d ₁	w
30	30	38	4	4,5	4,32	3,99	1,655	5,96	3,97	1,17	13,7	3,80	1,78	18,1	4,69	2,04	1,54	1,11	0,60	7,35	11	20
40	40	40	4,5	5	5,43	4,26	1,181	13,5	6,95	1,58	17,6	4,66	1,80	28,0	6,72	2,27	3,05	1,83	0,75	12,2	11	22
50	50	43	5	5,5	6,77	5,31	0,939	26,3	10,5	1,97	23,8	5,88	1,88	44,9	9,76	2,57	5,23	2,76	0,88	19,6	11	25
60	60	45	5	6	7,91	6,21	0,779	44,7	14,9	2,38	30,1	7,09	1,95	67,2	13,5	2,81	7,60	3,73	0,98	28,8	13	25
80	80	50	6	7	11,1	8,71	0,588	109	27,3	3,13	47,4	10,1	2,07	142	24,4	3,58	14,7	6,44	1,15	55,6	13	30
100	100	55	6,5	8	14,4	11,4	0,492	222	44,4	3,91	72,5	14,0	2,24	270	39,8	4,31	24,6	9,26	1,30	97,2	17	30
120	120	60	7	9	18,2	14,3	0,433	402	67,0	4,70	106	18,8	2,42	470	60,6	5,08	37,7	12,5	1,44	158	17	35
140	140	65	8	10	22,9	18,0	0,385	676	96,6	5,43	148	24,3	2,54	768	88,0	5,79	56,4	16,6	1,57	239	21	35
160	160	70	8,5	11	27,5	21,6	0,357	1060	132	6,20	204	31,0	2,72	1180	121	6,57	79,5	21,4	1,70	349	21	40
180	180	75	9,5	12	33,3	26,1	0,329	1600	178	6,92	270	38,4	2,84	1760	164	7,26	110	27,0	1,82	490	23	40
200	200	80	10	13	38,7	30,4	0,313	2300	230	7,71	357	47,6	3,04	2510	213	8,06	147	33,4	1,95	674	23	45



Ελάσματα Τ με στρογγυλε-
μένες ακμές, κατά DIN 1024, Οκτ. 1963

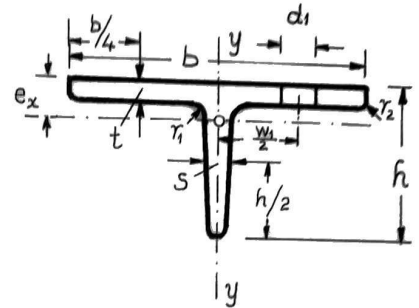
F Εμβαδόν διατομής

B Βάρος

J Ροπή αδράνειας

W Ροπή αντίστασης

i Ακτίνα αδράνειας.



Σύμ- βολο	Διαστάσεις (mm)				F cm ²	G kg/m	e _x cm	x - x			y - y			Οπές πελ- μάτων (mm) κατά DIN 997	
	h	b	s= ^t / _r	r ₂				J _x cm ⁴	W _x cm ³	l _x cm	J _y cm ⁴	W _y cm ³	l _y cm		
														d ₁	w ₁
Τ	Υ γ ι κ ο ρ μ α														
20	20	20	3	1,5	1,12	0,88	0,58	0,38	0,27	0,58	0,20	0,20	0,42	3,2	-
25	25	25	3,5	2	1,64	1,29	0,73	0,87	0,49	0,73	0,43	0,34	0,51	3,2	15
30	30	30	4	2	2,26	1,77	0,85	1,72	0,80	0,87	0,87	0,58	0,62	4,3	17
35	35	35	4,5	2,5	2,97	2,33	0,99	3,10	1,23	1,04	1,57	0,90	0,73	4,3	19
40	40	40	5	2,5	3,77	2,96	1,12	5,28	1,84	1,18	2,58	1,29	0,83	6,4	21
45	45	45	5,5	3	4,67	3,67	1,26	8,13	2,51	1,32	4,01	1,78	0,93	6,4	24
50	50	50	6	3	5,66	4,44	1,39	12,1	3,36	1,46	6,06	2,42	1,03	6,4	30
60	60	60	7	3,5	7,94	6,23	1,66	23,8	5,48	1,73	12,2	4,07	1,24	8,4	34
70	70	70	8	4	10,6	8,32	1,94	44,5	8,79	2,05	22,1	6,32	1,44	11	38
80	80	80	9	4,5	13,6	10,7	2,22	73,7	12,8	2,33	37,0	9,25	1,65	11	45
90	90	90	10	5	17,1	13,4	2,48	119	18,2	2,64	58,5	13,0	1,85	13	50
100	100	100	11	5,5	20,9	16,4	2,74	179	24,6	2,92	88,3	17,7	2,05	13	60
120	120	120	13	6,5	29,6	23,2	3,28	366	42,0	3,51	178	29,7	2,45	17	70
140	140	140	15	7,5	39,9	31,3	3,80	660	64,7	4,07	330	47,2	2,88	21	80
ΤΒ	Π λ α τ ύ π ε λ μ α														
30	30	60	5,5	3	4,64	3,64	0,67	2,58	1,11	0,75	8,62	2,87	1,36	8,4	34
35	35	70	6	3	5,94	4,66	0,77	4,49	1,65	0,87	15,1	4,31	1,59	11	37
40	40	80	7	3,5	7,91	6,21	0,88	7,81	2,50	0,99	28,5	7,13	1,90	11	45
50	50	100	8,5	4,5	12,0	9,42	1,09	18,7	4,78	1,25	67,7	13,5	2,38	13	55
60	60	120	10	5	17,0	13,4	1,30	38,0	8,09	1,49	137	22,8	2,84	17	65

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Μιχαήλ Κ. Κωβαίου, Αντοχή των Υλικών, Αθήναι, 1964.
2. Βασιλείου Περγαντή, Μηχανική ΙΙ (Αντοχή των Υ Υλικών, Θεσ/νίκη, 1976.
3. Ιάκωβου Α. Αμίρ - Αλέξιου Κ. Αναστασιάδη, Μηχανική ΙΙ (Αντοχή των υλικών), Θεσ/νίκη, 1984.
4. Π. Σ. Θεοχάρη, Στοιχεία πειραματικής αντοχής των υλικών, Ε.Μ.Π.
5. Γεωργίου Ρ. Γκρός, Αντοχή υλικών, Αθήνα, 1980.
6. Φιλοθέου Γ. Λόκκα, Εργαστηριακά θέματα Αντοχής Υλικών, Λάρισα, 1985.
7. Κωνστ. Χ. Γεωργικόπουλου, Τεχνική Μηχανική Γ'. Αντοχή των Υλικών, Αθήναι, 1967.
8. Gere & Timoshenko, Mechanics of Materials, Stanford University, Monterey, California.
9. William A. Nash, Theory and Problems of Strength of Materials, Amherst, Massachusetts, 1972.

10. Harmer E Davis - George Earl Troxel - Clement T. Wiskocil, *The testing and Inspection of Engineering Materials*, London, 1964.
11. V. Féodossiev, *Résistance des Matériaux*, Moscou, 1976.
12. Σοφοκλή Ξυνή, *Πειραματική Αντοχή των Υλικών*, Αθήναι, 1970.
13. Μιχαήλ Κ. Κωβαίου, *Προβλήματα Αντοχής των Υλικών*, Αθήνα, 1969.
14. Π. Θεοχάρη, *Κεφάλαια εκ της πειραματικής Μηχανικής των Υλικών*, Αθήναι, 1973.
15. Φιλοθέου Γ. Λόκκα, *Σημειώσεις Υπολογισμών Κατασκευών Ι*, Λάρισα, 1977.
16. Γ. Μ. Νιτσιώτα, *Εισαγωγή εις την Στατικήν, Θεωραλονίκη*, 1965.