

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ
ΙΔΡΥΜΑ

ΣΧΟΛΗ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΛΑΡΙΣΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΙΑΣ

Αρχές και Μέθοδοι στην
ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Φιλοθέου Γ. Λόκκα

Διπλωματούχου Πολ. Μηχ/κού Ε.Μ.Π.

M.Sc. U.M.I.S.T. Αγγλίας

Καθηγητή Σ.Τ.Ε.Φ./Τ.Ε.Ι. Λάριδας

Λάρισα, Οκτώβριος '90.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι σημειώσεις αυτές γράφηκαν για να χρησιμοποιηθούν απ' τους σπουδαστές που παρακολουθούν το μάθημα της ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ στο Γ' εξάμηνο σπουδών του τμήματος Ηλεκτρολογίας του Τ.Ε.Ι. Λάριδας.

Καταβλήθηκε προσπάθεια ώστε να καλύπτουν την από το Υ.Π.Ε.Π.Θ. προβλεπόμενη διδακτέα ύλη του μαθήματος, όπως διαμορφώθηκε πρόσφατα με τον εμπλουτισμό της σε βασικές έννοιες της Αντοχής των Υλικών, χωρίς να επεκτείνονται σε εξεζητημένα θέματα. Αυτό έγινε επειδή η διδασκαλία των 5 ωρών τη βδομάδα είναι μικρή για να καλύγει το αχανές περιεχόμενο του μαθήματος.

Για την καλύτερη κατανόηση της θεωρίας δόθηκαν εκλεκτικά αντίστοιχα παραδείγματα. Γενικότερη όμως επιδίωξη μου ήταν τόσο η ανάπτυξη του θεωρητικού μέρους όσο και η παράθεση των σχημάτων και παραδειγμάτων να γίνουν με απλότητα και σαφήνεια, ώστε να βοηθήσουν στην καλύτερη αφομοίωση του μαθήματος απ' τους σπουδαστές.

Με χαρά θα δεχθώ κάθε παρατήρηση και καλόπιστη κριτική στο περιεχόμενο των σημειώσεων, ώστε να τη λάβω μελλοντικά υπόψη μου.

Λάρισα, Οκτώβριος 1990

Φιλόθεος Γ. Λόκκας

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	III
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ	V
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
Βασικές αρχές και έννοιες της Μηχανικής	3

ΜΕΡΟΣ Α' - ΣΤΑΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

α) ΓΡΑΦΟΣΤΑΤΙΚΗ

1.1. Γενικά	7
1.2. Σύνθεση συνεπιπέδων συντρέχουσών δυνάμεων	7
1.3. Συνεπίπεδες τυχούσες δυνάμεις	8
1.3.1 Παραδείγματα	11
1.4. Προσδιορισμός αντιδράσεων	13
1.4.1 Παράδειγμα	16
1.5. Συνθήκες ισορροπίας	17

β) ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

1.6. Συνεπίπεδες συντρέχουσες δυνάμεις	19
1.7. - II - τυχούσες - II -	20
1.7.1 Παράδειγμα	21

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΟΥΣ

2.1. Γενικά	23
2.2. Κεντροειδές επιφανειών	24
2.2.1 Παράδειγμα	26

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο – ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

3.1	Γενικά	29
3.2	Ροπή αδράνειας ως προς άξονα	30
3.2.1	-"- -"- ορθογωνίου παραλληλογράμμου	31
3.2.2	-"- -"- παραλληλογράμμου	32
3.2.3	-"- -"- τριγώνου	32
3.2.4	-"- -"- κύκλου	33
3.3	Ακτίνα αδράνειας	34
3.4	Θεώρημα του παρ/λου άξονα (Steiner)	34
3.5	Παραδείγματα	36
3.6	Πολική ροπή αδράνειας	40
3.6.1	Παράδειγμα	41
3.7	Φυγόκεντρη ροπή αδράνειας	42
3.8	Φυσική σημασία των ροπών αδράνειας	43

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο – ΑΠΛΟΙ ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

4.1	Γενικά	44
4.2	Η δοκός σαν φορέας	45
4.3	Οι ετηρίξεις	48
4.4	Εξωτερικά φορτία και αντιδράσεις	49
4.5	Τα φορτία διατομής	52
4.6	Σήμανση και υπολογισμός των N , Q , M	54
4.7	Παράδειγμα	56
4.8	Βασικές σχέσεις ανάμεσα στα μεγέθη q , Q και M	57
4.9	Κατασκευή των διαγραμμάτων Q και M	60
4.10	Παραδείγματα	64
4.11	Γενικές παρατηρήσεις	75
4.12	Δυσμενείς φορτίσεις	76

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο - ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΔΙΚΤΥΩΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

5.1	Γενικά	79
5.2	Η αναλυτική μέθοδος ισορροπίας κόμβων	82
5.2.1	Παράδειγμα	83
5.3	Η γραφική μέθοδος Cremona	88
5.3.1	Παράδειγμα	89
5.4	Η αναλυτική μέθοδος των τομών (Ritter)	95
5.4.1	Παραδείγματα	98

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο - ΤΡΙΑΡΘΡΟΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

6.1	Γενικά	105
6.2	Υπολογισμός των αντιδράσεων	
	α) Γραφικά	106
	β) Αναλυτικά	108
6.3	Υπολογισμός της έντασης	109
6.4	Παράδειγμα	110

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο - ΤΡΙΒΗ

7.1	Γενικά	112
7.2	Γωνία τριβής	113
7.3	Τριβή κύλισης	114
7.4	Προσδιορισμός της τριβής κύλισης	115
7.5	Μέτρηση του συντελεστή τριβής κύλισης	116
7.6	Παράδειγμα	117

ΜΕΡΟΣ Β' - ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο - ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

8.1	Γενικά	123
8.2	Ευθύγραμμη κίνηση	124
8.2.1	Μετατόπιση	124
8.2.2	Ταχύτητα	125
8.2.3	Επιτάχυνση	126
8.3	Παραδείγματα	127
8.4	Υπολογισμός Μετατόπισης	139
8.4.1	Η επιτάχυνση δίνεται συνάρτηση του χρόνου	132
8.4.2	-II- -II- -II- της μετατόπισης	133
8.4.3	-II- -II- -II- της ταχύτητας	134
8.5	Παραδείγματα	135
8.6	Ευθύγραμμη ομοιόμορφη κίνηση	144
8.7	-II- ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση	144

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9ο - ΚΙΝΗΤΙΚΗ

9.1	Γενικά - Νόμοι του Νεύτωνα	146
9.1.1	1ος νόμος	147
9.1.2	2ος -II-	148
9.1.3	3ος -II-	150
9.2	Η γενική εξίσωση της κίνησης υλικού σημείου	151
9.3	Παραδείγματα	152

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10ο - ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

10.1	Κίνηση υλικού σημείου όπου ενεργεί δύναμη ανάλογη της μεταθέσης	161
10.2	Περίπτωση 1η, με αρχική μετάθεση χωρίς αρχική ταχύτητα	163
10.3	Περίπτωση 2η, χωρίς μετάθεση με αρχική ταχύτητα	166
10.4	-II- 3η, με αρχική ταχύτητα και αρχική μετάθεση	167
10.5	Παραδείγματα	169

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11ο - ΕΡΓΟ - ΕΝΕΡΓΕΙΑ

11.1	Έργο	174
11.2	-II- βάρους σώματος	176
11.3	-II- μεταβλητής δύναμης	177
11.4	-II- τάσης	178
11.5	Μηχανική ενέργεια	179
11.6	Δυναμική -II- λόγω βαρύτητας	180
11.7	-II- -II- ελαστικής παραμόρφωσης	181
11.8	Κινητική ενέργεια	181
11.9	Μεταβολή της κινητικής ενέργειας	183
11.10	Μετατροπές της -II- -II-	184
11.11	Παραδείγματα	186

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μηχανική είναι η εφαρμοσμένη φυσική επιστήμη που ασχολείται με σώματα τα οποία βρίσκονται σε ηρεμία ή κίνηση κάτω από την επίδραση δυνάμεων.

Ανάλογα με τη φυσική κατάσταση των σωμάτων που εξετάζει, διακρίνεται στη:

- α) Μηχανική των στερεών
- β) -"- -"- υγρών και
- γ) -"- -"- αερίων.

Η Μηχανική των στερεών μελετά την ισορροπία, την εντατική κατάσταση και την κίνηση των φορέων, δηλαδή των σωμάτων που φορτίζονται. Ειδικότερα, ανάλογα με το αντικείμενο μελέτης της, διακρίνουμε:

ι) Την **Στατική** που εξετάζει γενικά τις συνθήκες κάτω απ' τις οποίες ένας φορέας βρέσκεται, δηλαδή ισορροπεί.

Σαν προέκταση της Στατικής θεωρείται η **Αντοχή** των Υλικών που μελετά ειδικότερα τις εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στους φορείς σε συνδυασμό με τις παραμορφώσεις που προκαλούνται. Θεωρεί τα σώματα όπως είναι στη φυσική τους κατάσταση, δηλαδή ελαστικά και όχι απαραμόρφωτα όπως στη Στατική, καθορίζοντας ανώτατα επιτρεπόμενα όρια φορτίων - παραμορφώσεων.

Τα συμπεράσματα της ευρύτερης Στατικής μελέτης εφαρμόζονται γενικά στις κατασκευές των τεχνικών έργων, όπου προσδιορίζονται οι διαστάσεις των διαφόρων μερών της μετά από υπολογισμό των δυνάμεων που τα επιβαρύνουν, έτσι ώστε οι κατασκευές να είναι ασφαλείς, οικονομικές και χωρίς απαράδεκτες παραμορφώσεις.

ii) Τη **Δυναμική** που μελετά την κίνηση των σωμάτων καθώς και τις δυνάμεις που συσχετίζονται με τα κινούμενα σώματα. Έτσι διαιρούμε τη Δυναμική:

α) Στην **Κινηματική** που μελετά την κίνηση ενός σώματος χωρίς να εξετάζει τις δυνάμεις που την προκαλούν, οπότε οι σχέσεις που προκύπτουν είναι χωρο - χρονικές.

Όταν π.χ. βλέπουμε ένα τροχό να κυλίεται σε ευθύγραμμη τροχιά με σταθερή ταχύτητα, ο καθορισμός του σήματος της τροχιάς που διαγράφει όπως κινείται ένα σημείο της στεφάνης του καθώς και της θέσης του σημείου αυτού σε μία δοσμένη χρονική στιγμή, είναι προβλήματα της Κινηματικής.

β) Στην **Κινητική** που μελετά την κίνηση ενός σώματος λαμβάνοντας υπόψη τις δυνάμεις που την προκαλούν.

Η εύρεση π.χ. του σταθερού ζεύγους που πρέπει να ασκηθεί στον άξονα ενός ρότορα, έτσι ώστε σε μία δοσμένη χρονική στιγμή να έχει μία συγκεκριμένη γωνιακή ταχύτητα, είναι πρόβλημα της Κινητικής.

Ενώ η συμβολή της Κλασικής περιόδου στη Στατική είναι μεγάλη, η Δυναμική εδραιώθηκε σαν επιστήμη στον μεσαίωνα.

Μεγάλη υπήρξε η συμβολή των Γαλιλαίου (1564 - 1642), Νεύτωνα (1642-1727), Huygens (1629-1695), D' Alembert (1717-1783), Lagrange (1736-1813), Hamilton (1788-1856) και άλλων.

Σε σχέση με τη Στατική, η Δυναμική σαν επιστήμη καθυστέρησε να αναπτυχθεί· η καθυστέρηση αυτή οφείλεται βασικά στη δυσκολία διεξαγωγής των αναγκαίων πειραμάτων.

Βασικές αρχές και έννοιες της Μηχανικής.

Η Μηχανική σαν επιστήμη στηρίζεται σε ορισμένες βασικές αρχές που θέτουμε απ' τα δεδομένα της εμπειρίας και του πειράματος, πάνω στις οποίες, με μαθηματικές μεθόδους, θεμελιώνουμε στη συνέχεια το οικοδόμημα της Μηχανικής.

Οι αρχές αυτές απορρέουν απ' τις έννοιες του χρόνου, της μάζας και της δύναμης που θα περιγράψουμε πιο κάτω και αποκτούμε απ' την εμπειρία, αλλά και απ' την πειραματική μελέτη αληθινών κινήσεων. Είναι δηλαδή προτάσεις ή νόμοι, η ισχύς των οποίων δεν αποδεικνύεται αλλά διαπιστώνεται πειραματικά. Οι αρχές αυτές είναι τρεις:

1. Η αρχή της αδράνειας
2. Η αρχή της ανεξαρτησίας του αποτελέσματος δυνάμεων (ή αρχή της επαλληλίας) και
3. Η αρχή της ισοότητας δράσης και αντίδρασης.

Απ' αυτές οι δύο πρώτες αρκούν για να οικοδομηθεί η Μηχανική του υλικού σημείου. Η αρχή της ισοότητας δράσης - αντίδρασης μας επιτρέπει να επεκταθούμε στη Μηχανική των Υλικών Συστημάτων.

Η αρχή της αδράνειας διατυπώθηκε στην αρχαιότητα απ' τον Αριστοτέλη, αργότερα απ' το Da Vinci, Γαλιλαίο και με την οριστική της μορφή απ' το Νεύτωνα ως εξής:

"Κάθε σώμα διατηρεί την κατάσταση ηρεμίας ή ευθύγραμμης ομαλής κίνησής του, εφ' όσον δεν ενεργήσει σ' αυτό καμμία εξωτερική δύναμη".

Η αρχή αυτή, στην οποία ο Νεύτων με την έννοια του σώματος θεωρεί το υλικό σημείο της σύγχρονης Μηχανικής, μπορεί να πάρει διαδοχικά τις παρακάτω διατυπώσεις:

– Αν υλικό σημείο του διαστήματος είναι μεμονομένο (δεν δρα καμμία δύναμη), η ταχύτητά του είναι μηδέν, ή διατηρείται σταθερή κατά μέτρο διεύθυνση και φορά· ή:

– Αν υλικό σημείο του διαστήματος είναι μεμονομένο, η επιτάχυνσή του είναι μηδέν· ή:

– Αν υλικό σημείο έχει επιτάχυνση, θα βρίσκεται αναγκαστικά στην περιοχή άλλων υλικών σημείων ή σωμάτων που δρούν πάνω σ' αυτό.

Άρα όταν ένα σώμα Α, επιδρώντας σε σώμα Β έχει σαν αποτέλεσμα να το επιταχύνει, θα λέμε στη Μηχανική ότι η δράση του Α πάνω στο Β είναι δύναμη που προέρχεται απ' το Α και εφαρμόζεται στο Β.

Ορίζουμε επομένως τη δύναμη σαν αιτία της επιτάχυνσης.

Όμως τίποτα δε γνωρίζουμε πάνω στο μηχανισμό κατά τον οποίο πραγματοποιείται η δράση του Α στην κίνηση του Β. Έτσι, ενώ λέμε π.χ. ότι ο ήλιος έλκει τη γή, τίποτα δε γνωρίζουμε για το μηχανισμό αυτής της έλξης.

Συμπεραίνοντας καταλήγουμε ότι η φύση της δύναμης μας είναι άγνωστη και κάθε έρευνα στον τομέα αυτό ανήκει στη Μεταφυσική.

Την έννοια της δύναμης αποκτούμε μόνο με τις αισθήσεις. Παρατηρούμε δηλαδή ότι για να αποκτήδει ένα υλικό σημείο επιτάχυνση, θα πρέπει να δράει πάνω του κάποια αιτία. Την αιτία αυτή ονομάζουμε δύναμη.

Προτού όμως ειδέλθουμε στη μελέτη της Μηχανικής είναι εκόπιμο να υπενθυμίσουμε ορισμένες έννοιες της Γενικής Φυσικής.

Χρόνος είναι μιά ποσότητα μέτρησης της διάρκειας ή της διαδοχής των γεγονότων. Στη Νευτώνια Μηχανική θεωρείται ποσότητα απόλυτη (θετική).

Χώρος ή **Διάστημα** είναι ένα κενό που εκτείνεται προς όλες τις διευθύνσεις. Ο καθορισμός ενός σημείου στο διάστημα είναι σχετικός και γίνεται με γραμμικές και γωνιακές μετρήσεις ως προς ένα σύστημα αναφοράς που θεωρείται ακίνητο.

Ύλη είναι η ουσία που κατέχει κάποιο χώρο στο διάστημα.

Αδράνεια είναι η ιδιότητα της ύλης ν' αντιζέκεται στην αλλαγή της κινητικής της κατάστασης.

Μάζα είναι η ποσοτική μέτρηση της αδράνειας της ύλης.

Σώμα είναι η ύλη που περικλείεται από κλειστή επιφάνεια.

Στερεό ή **συμπαγές σώμα** είναι ένα ιδεατό σώμα που δεν υφίσταται σχετικές παραμορφώσεις μεταξύ των μερών του. Επομένως διατηρεί το σχήμα του σταθερό.

Υλικό σημείο ονομάζεται σώμα, όχι κατ' ανάγκη μικρό, το οποίο όμως κατά την κίνησή του θεωρείται σαν μονάδα ύλης.

Είναι αυτονόητο ότι το υλικό σημείο είναι καθαρά θεωρητική έννοια η οποία όμως εξυπηρετεί πολύ στη λύση πολλών προβλημάτων. Έτσι στην Ουράνια Μηχανική, όπου οι αποστάσεις που εμφανίζονται είναι τεράστιες, η Γη θεωρείται σαν υλικό σημείο με όλη τη μάζα συγκεντρωμένη στο κέντρο της.

Τροχιά είναι το σύνολο των διαδοχικών θέσεων που καταλαμβάνει ένα υλικό σημείο κατά την κίνησή του.

ΜΕΡΟΣ Α'
ΣΤΑΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

α) ΓΡΑΦΟΣΤΑΤΙΚΗ

1.1 Γενικά

Η Γραφοστατική είναι το τμήμα εκείνο της Στατικής που έχει σαν αντικείμενο τη μελέτη των συνθηκών ισορροπίας των σωμάτων με γραφικές μόνο μεθόδους.

Αναχωρεί απ' τη διαπίστωση ότι σε κάθε σώμα που ηρεμεί δρουν δυνάμεις, η κάθε μία απ' τις οποίες αν ενεργούσε μόνη της, θα το έθετε σε κίνηση. Και ασχολείται, όπως αλλού και η στατική γενικότερα, με το ερώτημα πότε, των δυνάμεων αυτών αλληλοακυρυνόμενων, διατηρεί το σώμα την κατάσταση της ηρεμίας.

1.2 Σύνθεση συνεπιπέδων συντρέχουσών δυνάμεων

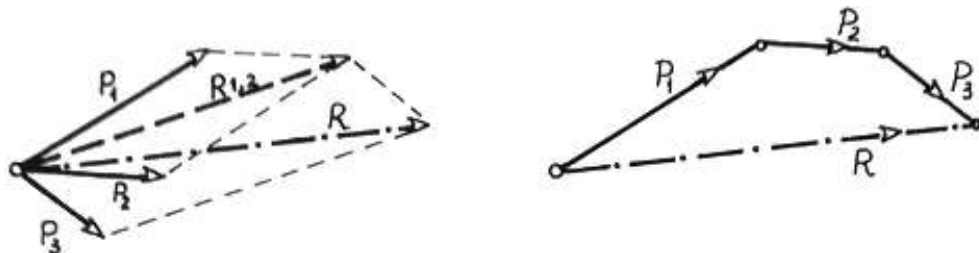
Θεωρούμε απόλυτα στερεό σώμα, σε σημείο A του οποίου ασκούνται οι συντρέχουσες δυνάμεις P_1 , P_2 και P_3 .

Αν R είναι η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών, είναι φανερό ότι ο φορέας της θα περνάει απ' το σημείο A , μιάς και οι δυνάμεις είναι συντρέχουσες.

Η διεύθυνση, η φορά και το μέτρο της μπορούν να βρεθούν γραφικά κατασκευάζοντας διαδοχικά το παρ/μο των δυνάμεων P_1 , P_2 και, συνθέτοντας στη συνέχεια τη συνισταμένη $R_{1,2}$ - διαγώνιο του παραλληλογράμου με τη δύναμη P_3 , οπότε προκύπτει η τελική συνισταμένη R των

δυνάμεων.

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε κατασκευάζοντας το αντίστοιχο δυναμοπολυγώνο, ξεκινώντας δηλαδή από τυχόν σημείο του επιπέδου να φέρουμε το διάνυσμα P_1 (δεξιό σχήμα) ίσο και παρ/λο προς την P_1 , στη συνέ-



χεια απ' το άκρο του P_1 διάνυσμα P_2 ίσο και παρ/λο της P_2 εξαντλώντας κατά τον ίδιο τρόπο όλες τις δυνάμεις, ανεξάρτητ' απ' τη σειρά τους.

Τότε η συνισταμένη R θα είναι το διάνυσμα που ενώνει την αρχή του πρώτου διανύσματος με το τέλος του τελευταίου.

1.3 Συνεπίπεδες τυχούδες δυνάμεις

Θεωρούμε επίπεδο σύστημα δυνάμεων $P_1, P_2, P_3, \dots$ που δεν τέμνονται στο ίδιο σημείο και ενεργούν σε απόλυτα στε-
ραιό σώμα.

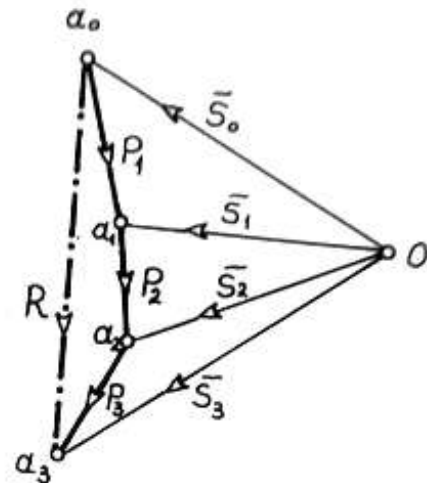
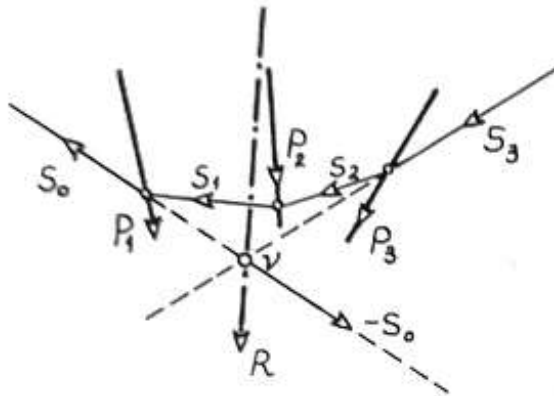
Το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά της συνισταμένης R των δυνάμεων μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν με την κατασκευή ενός δυναμοπολυγώνου όπως προηγουμένως. Παίρνοντας δηλαδή με κάποια κλίμακα δυνάμεων, (π.χ. $1\text{cm} \hat{=} 1\text{ton}$), διάνυσμα $a_0 a_1 = P_1$, $a_1 a_2 = P_2$ κ.λ.π.

Έτσι προκύπτει το διάνυσμα $a_0 a_3$ που εκφράζει τη συνισταμένη των δυνάμεων

$$R = P_1 + P_2 + P_3 ,$$

κατά διεύθυνση φορά και ένταση.

Απομένει να προσδιοριστεί ο φορέας της R στο διάγραμμα θέσης (αριστερό σχήμα).



Παρατηρούμε ότι αν στο σύστημα των δυνάμεων που δόθηκαν προσθέσουμε τις αλληλοακυρούμενες δυνάμεις S_0 και $-S_0$ που ενεργούν σε τυχαίο άξονα, και συνδέσουμε την S_0 με την P_1 στη συνισταμένη S_1 ,

$$S_0 + P_1 = S_1 ,$$

(η γραφική σύνθεση φαίνεται στο διάγραμμα δυνάμεων που είναι το δεξιό σχήμα), στη συνέχεια την S_1 με την P_2 στη συνισταμένη S_2 ,

$$S_1 + P_2 = S_0 + P_1 + P_2 = S_2 ,$$

όμοια την S_2 με την P_3 στη συνισταμένη S_3 κ.ο.κ.

$$S_2 + P_3 = S_0 + P_1 + P_2 + P_3 = S_3 ,$$

προκύπτει τελικά αντικατάσταση του συστήματος των αρχικών δυνάμεων με τις αλληλοακυρούμενες σε δύο μόνον απομένουσες δυνάμεις: την S_3 με την $-S_0$.

Άρα η τομή της S_3 με τη $-S_0$ θα μου δώσει το σημείο ν , το οποίο είναι φανερό ότι ανήκει στον άξονα ενέργειας (φορέα) της συνισταμένης R .

Πρακτικά μετά την κατασκευή του δυναμοπολυγώνου, εκλέγεται ένα τυχαίο σημείο O που ονομάζεται **πόλος** του δυναμοπολυγώνου. Η εκλογή του πόλου γίνεται έτσι, ώστε να μη βρίσκεται σε κανέναν απ' τους φορείς των δυνάμεων, οι δε πολικές ακτίνες (δυνάμεις), που φέρονται απ' το O προς τα σημεία $a_0, a_1, \dots$ να είναι κατά το δυνατόν πιο διακεκριμένες.

Στη συνέχεια, μεταβαίνοντας στο διάγραμμα θέσης, παίρνουμε πάνω στην P_1 ένα τυχόν σημείο, απ' όπου φέρνουμε τα διανύσματα S_0 και S_1 παρ/λα αντίστοιχα των $Oa_0 \equiv \bar{S}_0$ και $Oa_1 \equiv \bar{S}_1$.

Το διάνυσμα S_1 τέμνει τη δύναμη P_2 , που εμφανίζεται στο δυναμοπολύγωνο αμέσως μετά την P_1 , σ' άλλο σημείο, απ' όπου φέρνουμε το S_2 παρ/λο της $Oa_2 \equiv \bar{S}_2$ κ.ο.κ.

Τελικά φέρνουμε το φορέα του διανύσματος S_3 παρ/λο της $Oa_3 \equiv \bar{S}_3$ που είναι και η τελευταία πολική ακτίνα.

Η τομή της S_0 και της S_3 στο διάγραμμα θέσης, ορίζει το σημείο ν απ' όπου περνάει η συνισταμένη.

Η πολυγωνική γραμμή των δυνάμεων S_0, S_1, S_2, S_3 στο διάγραμμα θέσης ονομάζεται **εχοινοπολύγωνο**.

Κάθε πλευρά του εχοινοπολυγώνου που αντιστοιχεί στις παραπάνω δυνάμεις $S_1, S_2, \dots$ είναι φορέας της συνισταμένης: α) της S_0 πήραμε αυθαίρετα και

β) όλων των δυνάμεων $P_1, P_2, \dots$ αντίστοιχα που προηγήθηκαν κατά τη σύνθεση.

Παρατήρηση

Λόγω της παραλληλίας που υπάρχει ανάμεσα στις πλευρές

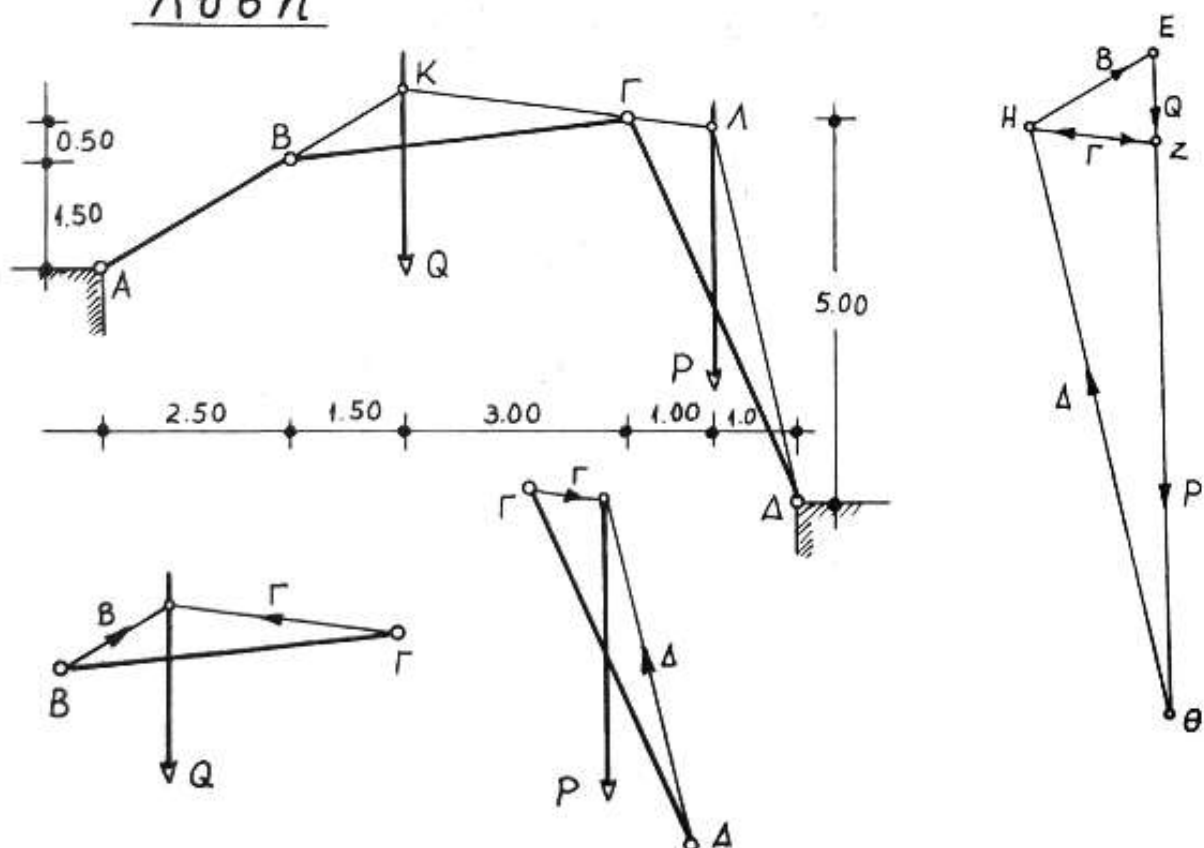
του δοκονοπολυγώνου στο διάγραμμα θέσης με τις αντίστοιχες πολικές ακτίνες στο διάγραμμα δυνάμεων, για τον προσδιορισμό της αντιστοιχίας των δυνάμεων στα δύο διαγράμματα, θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη ότι:

Κάθε δύναμη που περιλαμβάνεται μεταξύ δύο πολικών ακτίνων στο διάγραμμα δυνάμεων, έχει σαν αντίστοιχη τη δύναμη που περνάει απ' το σημείο τομής των αντιστοιχών πλευρών του δοκονοπολυγώνου στο διάγραμμα θέσης και αντισταθμίζει.

Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί η δύναμη P καθώς και οι αντιδράσεις που εμφανίζονται στα άκρα των ράβδων που συνδέονται αρθρωτά όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνεται ότι η δύναμη Q είναι 400 κρ. Να δοθεί γραφική λύση.

Λύση



Επειδή στη ράβδο AB δεν ασκείται καμμία εξωτερική δύναμη, έπεται ότι οι αντιδράσεις στα άκρα της A και B έχουν τη διεύθυνση της AB .

Έτσι η τομή της AB και του φορέα της Q ορίζει το σημείο K , απ' όπου οφείλει να περάσει η δύναμη που διαβιβάζεται μέσω του κόμβου Γ , μιάς και η ράβδος $B\Gamma$ ισορροπεί.

Γνωρίζοντας τώρα τη διεύθυνση της διά του Γ διαβιβαζόμενης δύναμης, βρίσκουμε το σημείο τομής Λ αυτής με το γνωστό φορέα της P , απ' όπου οφείλει να περάσει η αντίδραση Δ .

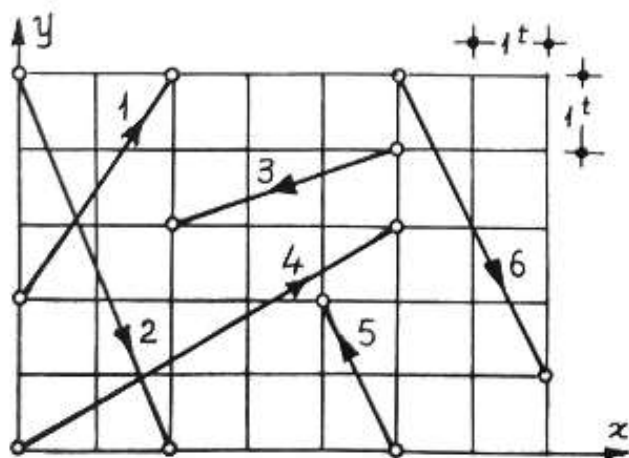
Υστερ' απ' αυτά, κατασκευάζουμε τα δυναμοτρίγωνα που εκφράζουν την ισορροπία των ράβδων $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$, που είναι τα EZH και $HZ\Theta$ αντίστοιχα.

Έτσι ορίζονται γραφικά οι αντιδράσεις B, Γ, Δ , η P και η $A = B$.

Απ' το διάγραμμα δυνάμεων, που έγινε με κλίμακα $1\text{cm} \hat{=} 333 \text{ κρ}$, προκύπτει:

$$A = B = 640 \text{ κρ}, \quad \Gamma = 540 \text{ κρ}, \quad \Delta = 2.660 \text{ κρ} \quad \text{και} \quad P = 2.500 \text{ κρ}.$$

2. Να προσδιοριστεί γραφικά η συνισταμένη των δυνάμεων που εικονίζονται στο σχήμα κατά τη σειρά 1, 2, 3, 4, 5 και 6 με τη μέθοδο του εχοινοπολυγώνου.

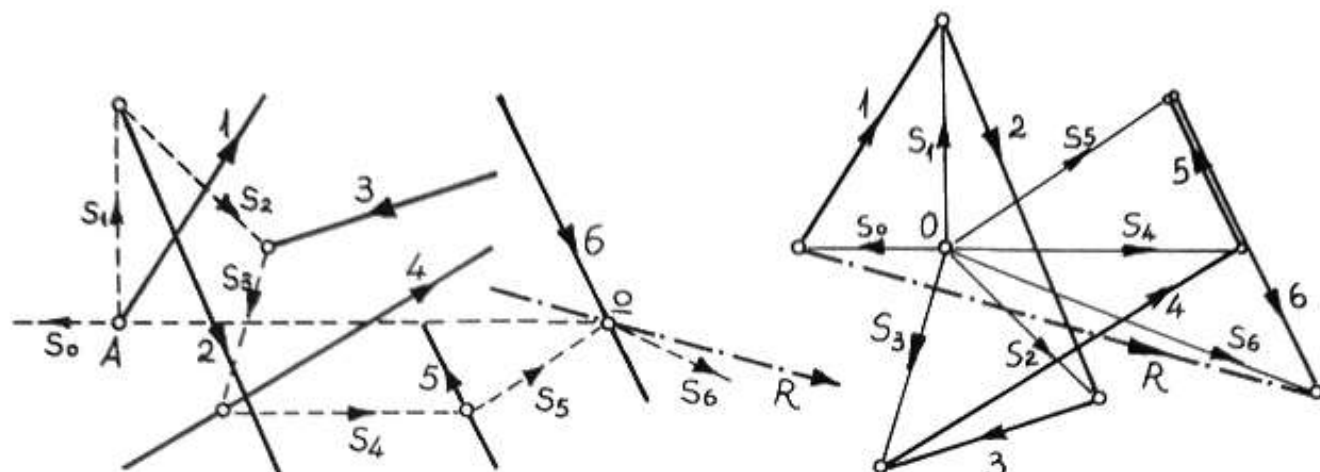


Λύση

Κατασκευάζουμε το δυναμοπολύγωνο των δυνάμεων, απ' το οποίο προκύπτει το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά της R .

Τη θέση του φορέα της

στο διάγραμμα θέσης προδιορίζουμε με τη μέθοδο του εχοινοπολυγώνου, παίρνοντας τυχόν σημείο A της δύναμης 1 , απ' όπου,



φέρνοντας κατά το γνωστό τρόπο παράλληλες προς τις αντίστοιχες πολικές ακτίνες, καταλήγουμε διαδοχικά στο σημείο Ω , που είναι η τομή της πρώτης και τελευταίας πλευράς του εχοινοπολυγώνου

Είναι φανερό ότι ο φορέας της συνισταμένης R περνάει απ' το Ω .

Απ' το διάγραμμα δυνάμεων, που έγινε με κλίμακα $1\text{cm} \triangleq 1\text{t}$, προκύπτει ότι $R = 7,3\text{ t}$.

1.4 Προδιορισμός αντιδράσεων

Θεωρούμε τον αμφιέρειστο φορέα που εικονίζεται στο σχήμα και στηρίζεται στο σημείο A με άρθρωση, ενώ στο σημείο B με κύλιση γνωστής διεύθυνσης.

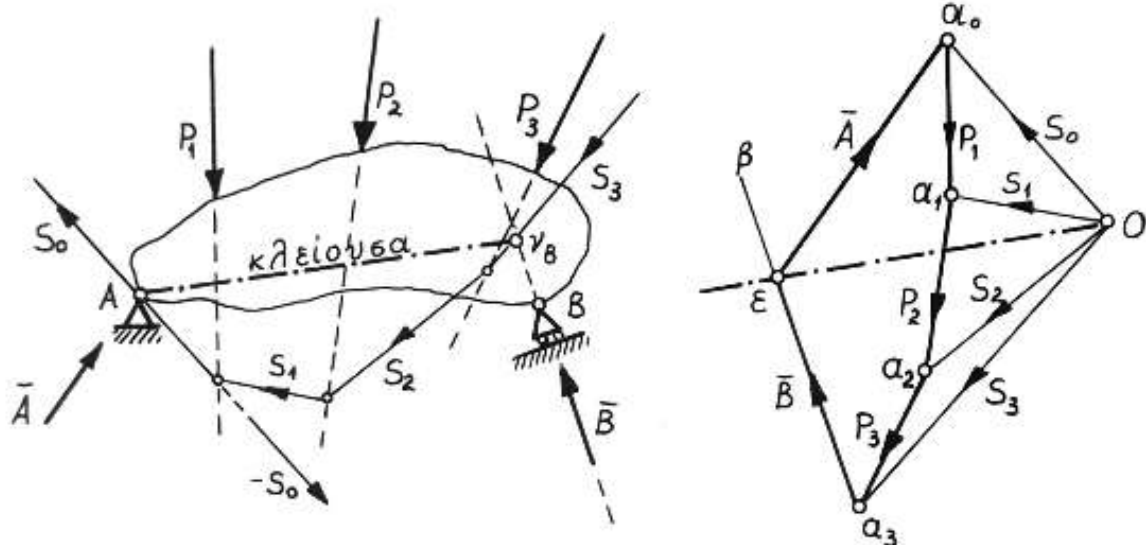
Τούτο σημαίνει ότι η αντίδραση B έχει σαν φορέα την ευθεία που περνάει απ' το B κάθετα στο επίπεδο κύλισης· άγνωστα επομένως το μέτρο και η φορά της.

Για την αντίδραση A , το μόνο γνωστό είναι ότι περνάει απ' το σημείο στήριξης A . (άγνωστα τα: μέτρο, διεύθυνση και φορά).

Γιά το γραφικό προσδιορισμό των αντιδράσεων A και B εργαζόμαστε ως εξής:

Απ' τις εξωτερικές δυνάμεις P_1, P_2, P_3 που δρούν στο φορέα, σχηματίζουμε, με κάποια κλίμακα, το δυναμοπολύγωνο, και απ' το τέλος της τελευταίας δύναμης (σημείο α_3) φέρνουμε την $\alpha_3\beta$, παράλληλη προς τη γνωστή διεύθυνση της αντίδρασης B .

Στη συνέχεια εκλέγουμε ένα τυχόν σημείο O σαν πόλο και φέρνουμε τις πολικές ακτίνες.



Για την κατασκευή του εχοινοπολυγώνου στο διάγραμμα θέσης, φέρνουμε την πρώτη του πλευρά S_0 έτσι, ώστε να περνάει απ' την άρθρωση A , ενώ η υπόλοιπη εργασία συνεχίζεται κατά το γνωστό τρόπο.

Μετά την κατασκευή του εχοινοπολυγώνου, το σύστημα των δυνάμεων P_1, P_2, P_3 αντικαταστάθηκε με τις: $-S_0$ και S_3 .

Επειδή όμως στο φορέα, εκτός απ' την εξωτερική φόρτιση (P_1, P_2, P_3) ενεργούν και οι αντιδράσεις του (A, B), το σύστημα των δυνάμεων ισορροπεί μόνον όταν η συνισταμένη του μηδενισθεί.

Είναι φανερό ότι οι δυνάμεις B και S_3 , που τέμνονται στο σημείο γ_B , δίνουν συνισταμένη που περνάει απ' αυτό.

Κατά τον ίδιο τρόπο οι δυνάμεις A και $-S_0$ δίνουν

συνισταμένη που περνάει απ' το Α.

Επειδή όμως το σύστημα των δυνάμεων ισορροπεί, θα πρέπει οι δύο αυτές συνισταμένες να είναι ίσες και αντίθετες και να έχουν κοινό φορέα.

Ο φορέας αυτός είναι η ευθεία $Αν_β$, η οποία ονομάζεται κλείουδα του εχοινοπολυγώνου.

Φέρνοντας τώρα στο διάγραμμα δυνάμεων την Οε παράλληλη προς την κλείουδα που έχουμε ήδη προσδιορίσει, ορίζουμε πάνω στην $α_3β$ το σημείο ε και στη συνέχεια τις ζητούμενες αντιδράσεις

$$α_3ε = \bar{B} \quad \text{και} \quad εα_0 = \bar{A}$$

Σημείωση

Η παρατήρηση που έγινε στο τέλος της ανάπτυξης της θεωρίας του εχοινοπολυγώνου, λόγω της αντιστοιχίας των πλευρών του εχοινοπολυγώνου στο διάγραμμα θέσης με τις πολικές ακτίνες στο διάγραμμα δυνάμεων, εδώ έχει ιδιαίτερη σημασία και μπορεί ν' αποβεί σημαντικά χρήσιμη για την αποφυγή λαθών.

Μιά διαφορετική διατύπωση απ' αυτή που ήδη γνωρίσαμε είναι:

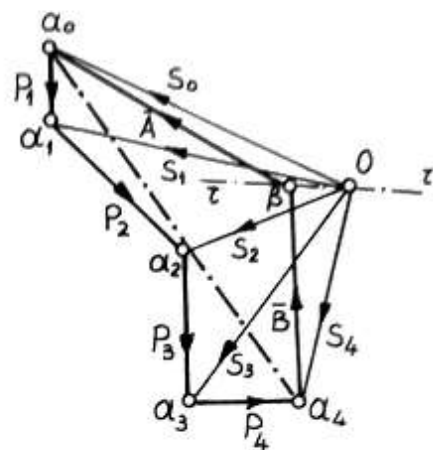
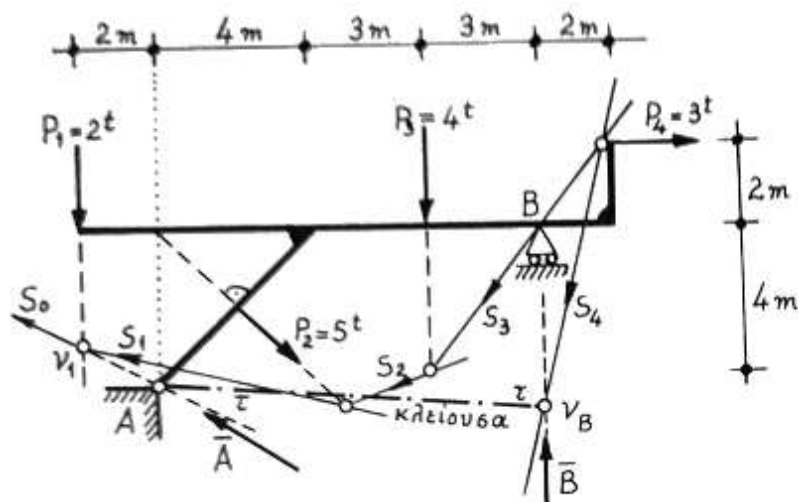
Κάθε σημείο που προκύπτει σαν τομή δύο δυνάμεων και μιάς πολικής ακτίνας στο διάγραμμα δυνάμεων, αντιστοιχεί σε τρίγωνο με πλευρές τις αντίστοιχες προς αυτές δυνάμεις και πλευρά του εχοινοπολυγώνου στο διάγραμμα θέσης.

Και αντίστροφα, κάθε σημείο - τομή δύο πλευρών του εχοινοπολυγώνου και μιάς δύναμης στο διάγραμμα θέσης, αντιστοιχεί σε τρίγωνο με πλευρές τις αντίστοιχες προς αυτές πολικές ακτίνες και δύναμη του διαγράμματος δυνάμεων.

Παράδειγμα

Να προσδιοριστούν γραφικά οι αντιδράσεις στα σημεία στήριξης A και B του φορέα που εικονίζεται παρακάτω.

Λύση



Με κλίμακα $1\text{cm} \hat{=} 2^t$ κατασκευάζω το δυναμοπολύγωνο των εξωτερικών δυνάμεων και, παίρνοντας τυχόντα πόλο O, φέρνω τις πολικές ακτίνες $S_0 \dots S_4$.

Απ' την άρθρωση A του φορέα φέρνω την S_0 παράλληλη προς την αντίστοιχη πολική ακτίνα, που τέμνει την πρώτη δύναμη που εμφανίζεται στο δυναμοπολύγωνο, P_1 , στο σημείο ν_1 .

Απ' εκεί καταλήγουμε κατά το γνωστό τρόπο στην τελευταία πλευρά του δυναμοπολύγωνου, την S_4 , που τέμνει τη γνωστή κατά διεύθυνση αντίδραση στην κύλιση, στο σημείο ν_B .

Η ευθεία $A\nu_B = \tau\tau$ είναι η κλείουσα.

Απ' τον πόλο O φέρνω παρ/λη προς την κλείουσα, που τέμνει την απ' το α_4 παρ/λη της αντίδρασης B στο σημείο β .

Έτσι ορίζονται γραφικά οι αντιδράσεις:

$$\alpha_4\beta = \bar{B} = 5,70^t \text{ και } \beta\alpha_0 = \bar{A} = 7,60^t.$$

1.5 Συνθήκες ισορροπίας

Απ' όσα ως τώρα έχουν εκτεθεί για τη γραφική εύθυση ομοεπιπέδων δυνάμεων, συμπεραίνουμε ότι οποιοδήποτε σύστημα δυνάμεων είναι ισοδύναμο με σύστημα που αποτελείται από δύο μόνο δυνάμεις:

α) τη $-\bar{S}_0$, που είναι ίση, αντίθετη και στον ίδιο φορέα κείμενη προς την ανθαίρετη πρώτη πλευρά του εχοινοπολυγώνου $\bar{S}_0$ και

β) τη $-\bar{S}_n$, τελευταία πλευρά του εχοινοπολυγώνου. Οι φορείς των δυνάμεων αυτών είναι αντίστοιχα παρ/ληλοί προς την πρώτη και τελευταία πολική ακτίνα του διαγράμματος δυνάμεων. Οι φορές τους όμως, όπως πάλι απ' το διάγραμμα προκύπτει, ορίζονται, της μεν πρώτης απ' την πρώτη κορυφή του δυναμοπολυγώνου προς τον πόλο, της δε δεύτερης απ' τον πόλο προς την τελευταία κορυφή του δυναμοπολυγώνου.

Άρα:

1) Όταν το δυναμοπολύγωνο ενός επιπέδου συστήματος δυνάμεων είναι ανοικτό, τότε το σύστημα ανάγεται σε μοναδική συνισταμένη, διότι $R \neq 0$.

2) Όταν το δυναμοπολύγωνο επιπέδου συστήματος δυνάμεων είναι κλειστό, τότε δεν υπάρχει συνισταμένη διότι $R = 0$. Άρα η πρώτη και η τελευταία πολική ακτίνα συμπίπτουν ($S_0 \equiv S_n$) και οι δυνάμεις (πλευρές του εχοινοπολυγώνου) $-\bar{S}_0$ και $\bar{S}_n$ είναι παρ/λές μεταξύ τους.

Το ερώτημα που τίθεται β' αυτή την περίπτωση είναι αν ο φορέας ισορροπεί. Διακρίνουμε λοιπόν τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

α) Αν οι $-\bar{S}_0$ και $\bar{S}_n$ δεν κείνται στην ίδια ευθεία αλλ' απέχουν μεταξύ τους απόσταση d , οπότε το

εχοινοπολύγωνο είναι ανοιχτό, τότε το σύστημα των δυνάμεων δεν ισορροπεί αλλά ισοδυναμεί με ζεύγος δυνάμεων, του οποίου η ροπή είναι $M = S \cdot d$.

β) Αν οι $-S_0$ και S_n κείνται στην ίδια ευθεία, οπότε και το εχοινοπολύγωνο είναι κλειστό, τότε το σύστημα των δυνάμεων ισορροπεί, διότι είναι $M = 0$.

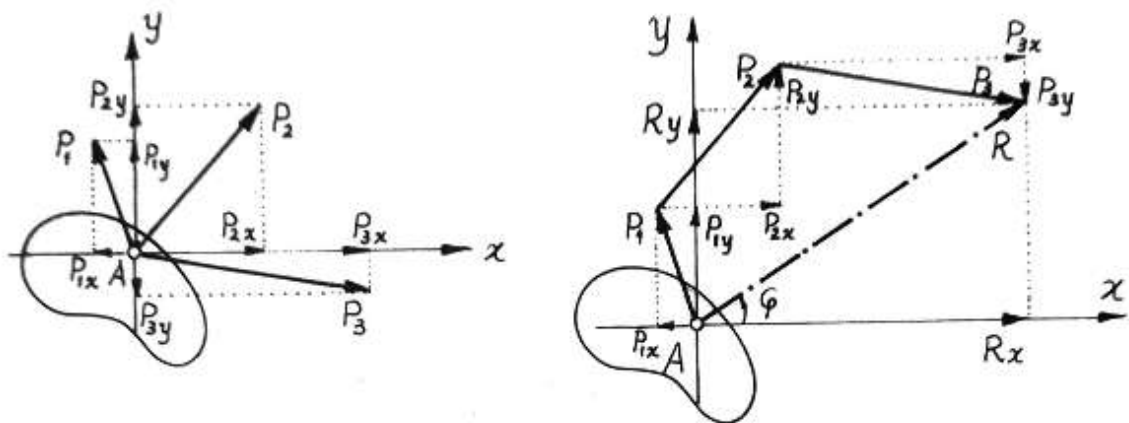
Όστε λοιπόν γενικά συμπεραίνουμε ότι:

Για να βρίσκεται ένα επίπεδο σύστημα δυνάμεων σε ισορροπία, πρέπει και αρκεί το δυναμοπολύγωνο και το εχοινοπολύγωνο του συστήματος να είναι κλειστά.

β) ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

1.6 Συνεπίπεδες συντρέχουσες δυνάμεις

Θεωρούμε ένα στερεό σώμα, σ' ένα σημείο A του οποίου ασκούνται οι συνεπίπεδες συντρέχουσες δυνάμεις P_1, P_2, P_3 .



Αν στο A εγκαταστήσουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αναφοράς xAy , και, χρησιμοποιώντας την μέχρι τώρα εμπειρία, κατασκευάσουμε το δυναμοπολλύγωνο των δυνάμεων P_1, P_2, P_3 , προσδιορίζοντας έτσι τη συνισταμένη τους R , παρατηρούμε ότι:

α) Το αλγεβρικό άθροισμα των οριζοντιών προβολών των δυνάμεων ισούται με την οριζόντια προβολή της συνισταμένης τους· και αντίστοιχα

β) Το αλγεβρικό άθροισμα των κατακόρυφων προβολών των δυνάμεων ισούται με την κατακόρυφη προβολή της συνισταμένης τους.

Όποτε λοιπόν αν R_x και R_y είναι αντίστοιχα η οριζόντια και η κατακόρυφη προβολή της συνισταμένης R συστήματος επιπέδων συντρέχουσών δυνάμεων P_i και φ η γωνία που σχηματίζει η R με τον οριζόντιο άξονα x , τότε είναι δυνατό να προσδιοριστεί το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά της R απ' τις σχέσεις:

$$R_x = \sum P_{ix} \quad (i=1,2,3,\dots)$$

$$R_y = \sum P_{iy} \quad (i=1,2,3,\dots)$$

$$\text{Μέτρο: } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (1)$$

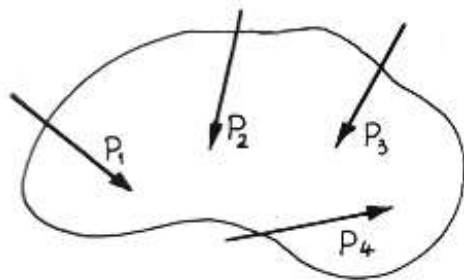
$$\text{Διεύθυνση: } \epsilon\phi\phi = \frac{R_y}{R_x} \implies \phi = \text{τοξ}\epsilon\phi \frac{R_y}{R_x} \quad (2)$$

$$\text{Φορά: } \text{πρόσημο } R_x, \text{ πρόσημο } R_y. \quad (3)$$

Είναι φανερό ότι ο φορέας της R θα περνάει απ' το A .

1.7 Συνεπίπεδες τυχούδες δυνάμεις

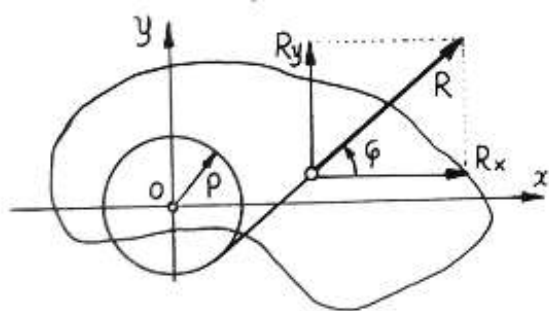
Θεωρούμε απόλυτα στερεό σώμα, σε διάφορα σημεία του οποίου ασκούνται οι δυνάμεις $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$



Ένα τέτοιο σύστημα δυνάμεων ανάγεται γενικά σε μία συνισταμένη δύναμη

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4, \dots$$

και μία ροπή, οι οποίες αναλυτικά ορίζονται ως εξής:



Εγκαθιστούμε στο επίπεδο των δυνάμεων ένα σύστημα αναφοράς xoy (συνήθως στην τομή δύο απ' τις δυνάμεις αυτές).

Τότε το μέτρο, η διεύθυνση

και η φορά της συνισταμένης

των δυνάμεων αυτών ορίζονται όπως και στην περίπτωση των συντεταγμένων δυνάμεων απ' τις σχέσεις (1), (2) και (3).

Απομένει ο καθορισμός του φορέα της R .

Γιά το έργο αυτό χρησιμοποιούμε το θεώρημα του

Varignon, που ορίζει:

Το αλγεβρικό άθροισμα των ροών συστήματος ομοεπιπέδων μη συντρεχουσών δυνάμεων ως προς τυχόν σημείο του επιπέδου των, ισούται προς τη ροή της συνισταμένης των ως προς το ίδιο σημείο.

Αν λοιπόν $(\Sigma M_i)_O^{\rightarrow+}$ είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροών των δυνάμεων (ή των συνιστωσών τους πάνω στους άξονες x, y) ως προς σημείο O (που συνήθως είναι η αρχή του συστήματος αναφοράς) και R η συνισταμένη τους σε απόσταση ρ απ' το O , τότε προκύπτει η σχέση:

$$(\Sigma M_i)_O^{\rightarrow+} = R \cdot \rho \implies \rho = \frac{(\Sigma M_i)_O^{\rightarrow+}}{R}$$

Η παραπάνω σχέση επιτρέπει τον προσδιορισμό της απόστασης ρ , που αποτελεί την ακτίνα του κύκλου, ως προς τον οποίο φέρνουμε την εφαπτομένη που είναι παρ/λη προς το διάνυσμα $R(R_x, R_y)$, γνωστό ήδη από πριν.

Επειδή το πρόβλημα έχει δύο λύσεις, εκλέγεται η εφαπτομένη εκείνη, η οποία ως προς το σημείο O δίνει ροή θετική ή αρνητική, αντίστοιχη προς την $(\Sigma M_i)_O^{\rightarrow+}$.

Παράδειγμα

Στο παρακάτω σύστημα των ομοεπιπέδων μη συντρεχουσών δυνάμεων, που δίνεται σε κλίμακα με κλίμακα $1\text{cm} \hat{=} 1\text{t}$ και $1\text{cm} \hat{=} 1\text{m}$, να προσδιοριστεί αναλυτικά η συνισταμένη.

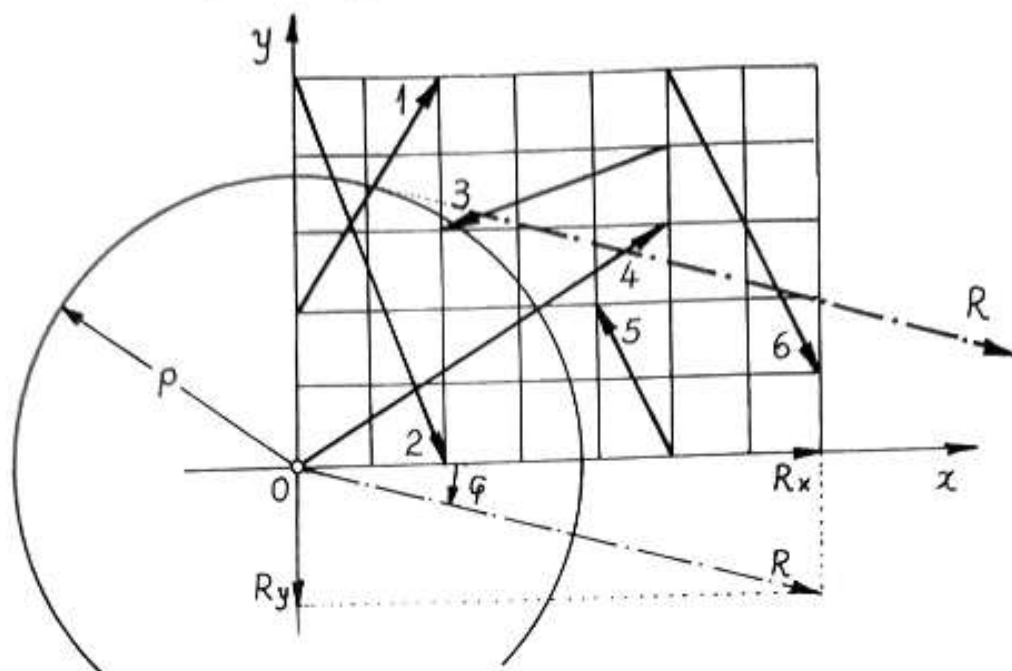
Λύση

Θεωρούμε το σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων xOy .

Αν R_x και R_y είναι αντίστοιχα η οριζόντια και κατακόρυφη προβολή της συνισταμένης και φ η γωνία της με τον οριζόντιο άξονα, τότε θα είναι:

$$R_x = \sum P_{ix} = 2 + 2 - 3 + 5 - 1 + 2 = 7 \text{ t}$$

$$R_y = \sum P_{iy} = 3 - 5 - 1 + 3 + 2 - 4 = -2 \text{ t}$$



Άρα: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = 7,27 \text{ t}$

$$\epsilon\phi\phi = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-2}{7} = -0,29 \Rightarrow \phi = -16,17^\circ$$

Και επειδή πρός. $R_x = +$, πρός. $R_y = -$, η φορά της R θα είναι:



Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Varignon για τις ροπές των προβολών των δυνάμεων ως προς το O και τη ροπή της R , θα έχουμε:

$$(\sum M_i)_O^+ = R \cdot \rho \Rightarrow 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 - 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 7,27 \cdot \rho$$

Άρα: $+27,00 = 7,27 \cdot \rho$ και $\rho = 3,71 \text{ m}$.

Γιά να κατασκευάσουμε τη συνισταμένη R , με κέντρο το O και ακτίνα $\rho = 3,71 \text{ m}$ ($= 3,71 \text{ cm}$) γράφουμε περιφέρεια κύκλου.

Στη συνέχεια φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου που είναι παρ/λη προς το διάνυσμα $(7, -2)$, εκείνη, που δίνει ως προς το O θετική ροπή, γιατί η ροπή $(\sum M_i)_O^+$ που βρήκαμε είναι θετική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΟΥΣ

2.1 Γενικά

Είναι γνωστό ότι όλα τα σώματα αποτελούνται από μικρά τεμάχια ύλης δε καθένα απ' τα οποία ενεργεί δύναμη ίση με το βάρος του, με κατεύθυνση προς το κέντρο της γης.

Η συνισταμένη όλων αυτών των παραλλήλων δυνάμεων ονομάζεται **βάρος** του σώματος.

Το σημείο εκείνο της ύλης του, όπου εφαρμόζεται η συνισταμένη αυτή ονομάζεται **κέντρο βάρους** του σώματος.

Είναι φανερό ότι αν το σώμα στραφεί, οι δυνάμεις θα παραμείνουν παράλληλες μεταξύ τους και θα έχουν συνισταμένη που θα εφαρμόζεται στο ίδιο σημείο όπως προηγούμενα.

Επομένως το κέντρο βάρους ενός σώματος είναι το σημείο εκείνο, απ' το οποίο περνάει η συνισταμένη των δυνάμεων βαρύτητας για οποιαδήποτε θέση του σώματος.

Αντίστοιχα προς το κέντρο βάρους σώματος έχουμε κέντρο βάρους γραμμών και επιφανειών, το οποίο ονομάζουμε **κέντροειδές**.

Για να βρούμε το κεντροειδές μίας επιφάνειας παίρνουμε σαν δυνάμεις τα εμβαδά των τμημάτων της, ενώ για το κεντροειδές μίας γραμμής τα μήκη των τμημάτων της.

Κάθε άξονας που περνάει απ' το κέντρο βάρους σώματος, επιφάνειας ή γραμμής ονομάζεται **κεντροβαρικός**.

Μιά ευθεία συμμετρίας αποτελεί κεντροβαρικό άξονα.

Το κέντρο βάρους ενός σώματος μπορούμε να βρούμε στην τομή δύο κεντροβαρικών αξόνων.

2.2 Κεντροειδές επιφανειών

Για τον προσδιορισμό του κεντροειδούς μιάς επιφάνειας είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί γραφική ή αναλυτική μέθοδος.

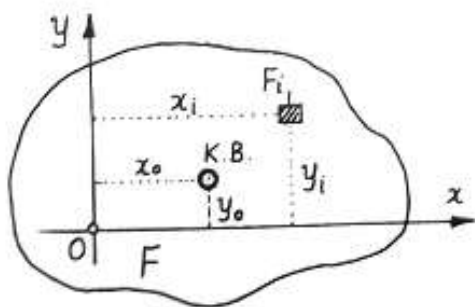
Στη γραφική μέθοδο, χωρίζεται η επιφάνεια που δίνεται σε άλλες μικρότερες επιφάνειες, π.χ. ορθογώνια, με εμβαδά $f_1, f_2, \dots, f_n$ αντίστοιχα και γνωστό το κεντροειδές στο καθένα απ' αυτά.

Στη συνέχεια θεωρώντας το εμβαδόν της κάθε επί μέρους επιφάνειας σαν ένταση κάποιας δύναμης, της οποίας είναι γνωστό το σημείο εφαρμογής καθώς και η διεύθυνση και φορά της την οποία καθορίζουμε, βρίσκουμε, με τη βοήθεια του δυναμοπολυγώνου και εχοινοπολυγώνου, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο, τη συνισταμένη τους.

Σχεδιάζοντας πάλι τις παραπάνω δυνάμεις, με το ίδιο σημείο εφαρμογής και μέγεθος, κατά μία άλλη όμως διεύθυνση, προσδιορίζουμε ξανά τη συνισταμένη τους.

Το σημείο τομής των δύο συνισταμένων, είναι το ζητούμενο κεντροειδές της επιφάνειας.

Για τον αναλυτικό προσδιορισμό του κεντροειδούς μιάς επιφάνειας, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν γενικά οι σχέσεις:



$$x_0 = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum (F_i x_i)}{\sum F_i}$$

$$y_0 = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum (F_i y_i)}{\sum F_i}$$

όπου x_0, y_0 οι συντεταγμένες του κεντροειδούς της επιφάνειας,

και F_i μία στοιχειώδης επιφάνεια της οποίας το κεντροειδές έχει συντεταγμένες x_i και y_i .

Ο όρος Sx (ή Sy), που ονομάζεται *στατική ροπή* της επιφάνειας ως προς τον άξονα x (ή y), εκφράζει το αλγεβρικό άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών επιφανειών F_i επί τις αποστάσεις αυτών y_i (ή x_i) από τον άξονα x (ή y) αντίστοιχα.

Πρακτικά, αν η δοσμένη επιφάνεια είναι δυνατό να διαιρεθεί σε γεωμετρικά σχήματα, στα οποία το κεντροειδές και το εμβαδόν είναι εύκολα προσδιορίσιμα, μετά τη διαίρεση αυτή, εργαζόμαστε ως εξής:

Τοποθετούμε στην επιφάνεια ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων Ox και Oy και υπολογίζουμε ως προς καθέναν απ' αυτούς τις "στατικές ροπές" κάθε γεωμετρικού σχήματος.

Γιά ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα, η στατική του ροπή ως προς ένα άξονα είναι το γινόμενο του εμβαδού του επί την απόσταση του κεντροειδούς του από τον άξονα.

Το γινόμενο αυτό είναι θετικό ή αρνητικό, αν η παραπάνω απόσταση είναι αντίστοιχα θετική ή αρνητική.

Στη συνέχεια, το αλγεβρικό άθροισμα των στατικών ροπών των επί μέρους γεωμετρικών σχημάτων ως προς ένα από τους άξονες, αν διαιρεθεί διά της συνολικής επιφάνειας των επί μέρους σχημάτων, μας δίνει την απόσταση του κεντροειδούς της επιφάνειας από τον παραπάνω αναφερόμενο άξονα.

Η όλη εργασία μεθοδεύεται σε πίνακα που παρουσιάζεται στο αριθμητικό παράδειγμα που ακολουθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

1. Αν η επιφάνεια έχει άξονα συμμετρίας, το κεντρο-

ειδές βρίσκεται πάνω στον άξονα.

2. Αν η επιφάνεια έχει δύο άξονες συμμετρίας, το κεντροειδές βρίσκεται στην τομή τους. και

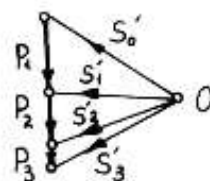
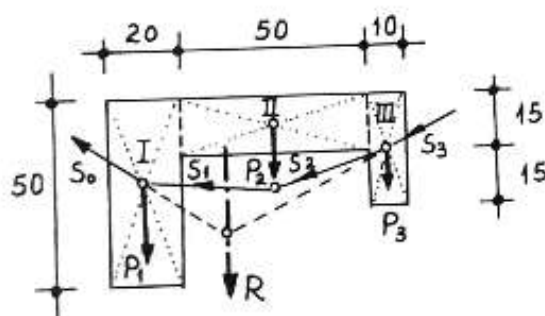
3. Κάθε τρύπα ή άνοιγμα στην επιφάνεια, εφόσον έχει ληφθεί υπόψη η εμπεριέχουσα το άνοιγμα επιφάνεια, λαμβάνεται, για τον υπολογισμό της στατικής ροπής (αναλυτικά) ή την ένταση της δύναμης (γραφικά), με αρνητικό πρόσημο.

Παράδειγμα

Της επιφάνειας που εικονίζεται στο σχήμα (διαστάσεις σε cm), να προσδιοριστεί γραφικά και αναλυτικά το κεντροειδές της.

Λύση

α) Γραφικά



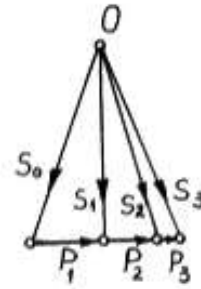
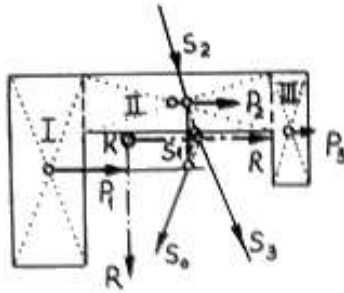
Μετά το χωρισμό της επιφάνειας στα ορθογώνια παρ/μα I, II και III με γνωστά κεντροειδή, υπολογίζουμε τα εμβαδά τους, που αποτελούν ταυτόχρονα τις εντάσεις των αντιστοίχων δυνάμεων που εφαρμόζονται στα κεντροειδή των.

$$P_1 = 50 \cdot 20 = 1000 \text{ cm}^2$$

$$P_2 = 50 \cdot 15 = 750 \text{ -" -}$$

$$P_3 = 10 \cdot 15 = 150 \text{ -" -}$$

Με τη βοήθεια του δυναμοπολυγώνου και εχοινοπολυγώνου προσδιορίζουμε, κατά το γνωστό τρόπο, τον φορέα της συνισταμένης των δυνάμεων αυτών.



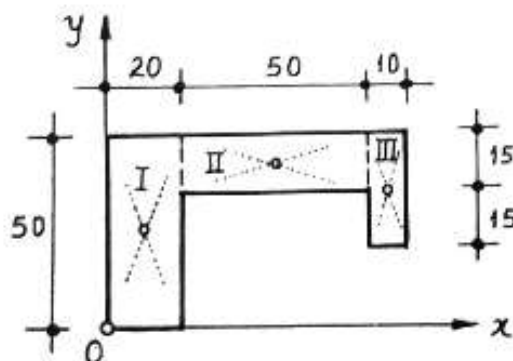
Στη συνέχεια, αλλάζοντας διεύθυνση των δυνάμεων, προσδιορίζουμε ξανά τη συνισταμένη τους.

Η τομή των φορέων των δύο τούτων συνισταμένων, προσδιορίζει το σημείο Κ του κεντροειδούς στην επιφάνεια που δόθηκε.

Β) Αναλυτικά

Μετά το χωρισμό της επιφάνειας στα ορθογώνια παρ/μα I, II και III όπως στη γραφική μέθοδο, εγκαθιστούμε στην επιφάνεια το σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων x και y και υπολογίζουμε ως προς καθένα απ' αυτούς τις στατικές ροπές των επί μέρους επιφανειών.

Έτσι θα έχουμε:



$$S_y = \sum (F_i x_i)$$

$$= F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3$$

$$S_x = \sum (F_i y_i)$$

$$= F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 \quad \text{και}$$

$$F = \sum F_i$$

$$= F_1 + F_2 + F_3$$

Τα παραπάνω αθροίσματα μπορούμε να υπολογίσουμε με

με μιά απλή και οργανωμένη διαδικασία στον πίνακα που ακολουθεί:

α/α Επιφάν.	x_i (cm)	y_i (cm)	F_i (cm ²)	$F_i \cdot x_i$ (cm ³)	$F_i \cdot y_i$ (cm ³)
I	10	25	1000	10.000	25.000
II	45	42,5	750	33.750	31.875
III	75	75	300	22.500	10.500
Σ Υ Ν Ο Λ Α			2.050	66.250	67.375
			$F = \Sigma F_i$	$S_y = \Sigma (F_i x_i)$	$S_x = \Sigma (F_i y_i)$

Έτσι οι συντεταγμένες του κεντροειδούς ως προς τους άξονες x και y είναι:

$$x_o = \frac{S_y}{F} = \frac{\Sigma (F_i \cdot x_i)}{\Sigma F_i} = \frac{66.250}{2.050} = 32,3 \text{ cm}$$

$$y_o = \frac{S_x}{F} = \frac{\Sigma (F_i \cdot y_i)}{\Sigma F_i} = \frac{67.375}{2.050} = 32,9 \text{ cm}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Μετά τον εντοπισμό του κεντροειδούς είτε με τη γραφική είτε με την αναλυτική μέθοδο, είναι φρόνιμο ν' ακολουθεί μιά προεκτική ματιά σαν έλεγχος, για την αποφυγή τυχόν χονδροειδούς βφαλματος.

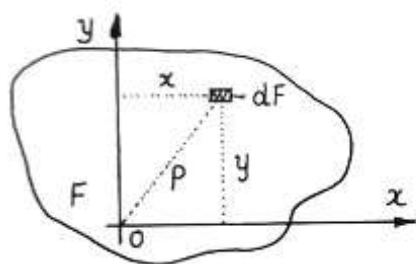
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

3.1 Γενικά

Σε υπολογισμούς τεχνικών εφαρμογών εμφανίζονται πολλές φορές στην πράξη μαθηματικές εκφράσεις της μορφής:

$$\int_F x^2 dF, \quad \int_F y^2 dF, \quad \int_F \rho^2 dF, \quad \int_F xy dF,$$



όπου είναι:

F τυχούσα επίπεδη επιφάνεια ως προς σύστημα αναφοράς xoy ,
 dF απειροστό στοιχείο της επιφάνειας, του οποίου το κέντρο-
 ειδές απέχει απόσταση:

x απ' τον άξονα y

y " " " " " " x

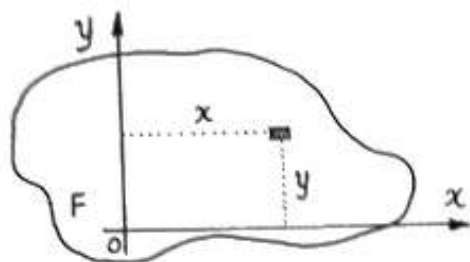
ρ απ' την αρχή των συντεταγμένων.

Οι παραπάνω εκφράσεις αποτελούν ξεχωριστές περιπτώσεις ενός γενικότερου μεγέθους που αναφέρεται στη δοσμένη επιφάνεια (ή μάζα) και ονομάζεται **ροπή αδράνειας**.

Στις επόμενες παραγράφους αναπτύσσονται χωριστά οι παραπάνω περιπτώσεις, με μεγαλύτερη βαρύτητα στις δύο πρώτες, που αλλωστε παρουσιάζονται πιο συχνά.

3.2. Ροπή αδράνειας ως προς άξονα

Έστω επίπεδη επιφάνεια F και σύστημα συντεταγμένων xoy που κείται στο επίπεδό της.



Αν dF είναι απειροστό στοιχείο της επιφάνειας και x, y οι συντεταγμένες του κεντροειδούς του, τότε θα ονομάζουμε ροπή αδράνειας του στοιχείου αυτού

ως προς άξονα x , το γινόμενο της απειροστής επιφάνειας dF επί το τετράγωνο της απόστασής του απ' τον άξονα x .

Τ' ολοκλήρωμα αυτών των στοιχειωδών ποσοτήτων αν εκταθεί σ' ολόκληρη την επιφάνεια F , δηλαδή η ποσότητα

$$J_x = \int_F y^2 dF$$

ονομάζεται ροπή αδράνειας της επιφάνειας F ως προς τον άξονα x .

Εντελώς ανάλογα θα ονομάζουμε ροπή αδράνειας της ίδιας επιφάνειας ως προς τον άξονα y την ποσότητα:

$$J_y = \int_F x^2 dF$$

Όπως προκύπτει απ' τον ορισμό της, η ροπή αδράνειας εκφράζεται σε μήκος⁴, εαν γινόμενο επιφάνειας επί το τετράγωνο απόστασης.

Επειδή τόσο η επιφάνεια κάθε σχήματος όσο και το τετράγωνο οποιασδήποτε απόστασης είναι θετικοί αριθμοί, έπεται ότι η ροπή αδράνειας κάθε σχήματος ως προς οποιονδήποτε άξονα είναι πάντα θετική ποσότητα.

Η ροπή αδράνειας μίας επιφάνειας ονομάζεται και ροπή επιφάνειας δευτέρου βαθμού, σε αντιδιαστολή με τη ροπή επιφάνειας πρώτου βαθμού ή στατική ροπή επιφάνειας, που γνωρίσαμε ήδη στα κεντροειδή.

Σε περιπτώσεις απλών γεωμετρικών σχημάτων οι ροπές αδράνειας μπορούν εύκολα να υπολογιστούν με τη βοήθεια της Μαθηματικής ανάλυσης.

Όταν όμως πρόκειται για σύνθετα σχήματα, ο υπολογισμός μπορεί ν' απλοποιηθεί μόνο όταν είναι δυνατό να διαιρεθεί σε απλούστερα σχήματα, των οποίων γνωρίζουμε ήδη τις ροπές αδράνειας ως προς το θεωρούμενο άξονα.

Συνήθως αναλύουμε τα σύνθετα σχήματα σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τρίγωνα ή κύκλους, των οποίων οι ροπές αδράνειας, μετά τον υπολογισμό τους στις παρακάτω εφαρμογές, θεωρούνται γνωστές.

3.2.1 Ροπή αδράνειας ορθογωνίου παρ/μου.

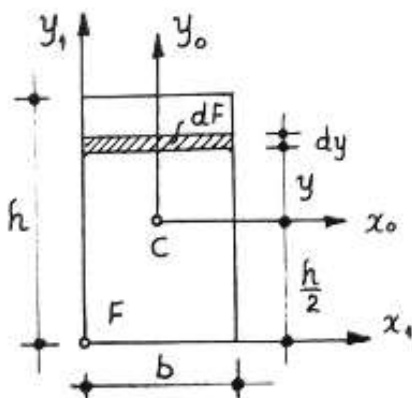
Για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας ενός ορθογωνίου ως προς οριζόντιο άξονα που περνάει απ' το κεντροειδές του, διαιρούμε το ορθογώνιο σε απειροστές οριζόντιες λωρίδες με εμβαδόν

$$dF = b \, dy$$

Αν y είναι η απόσταση του κεντροειδούς μίας τέτοιας λωρίδας απ' τον άξονα x_0 , τότε θα είναι:

$$\begin{aligned} J_{x_0} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 b \, dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \\ &= \frac{b}{3} \left[\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right] = \frac{bh^3}{12} \end{aligned}$$

Με ανάλογες εκέγεις η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου ως



προς άξονα x_1 που ταυτίζεται με τη βάση του, θα είναι:

$$J_{x_1} = \int_0^h y^2 b dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

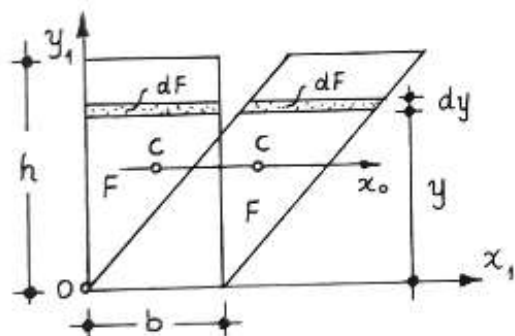
Για τους κατακόρυφους άξονες y_0 και y_1 θα έχουμε αντίστοιχα:

$$J_{y_0} = \frac{hb^3}{12} \quad \text{και} \quad J_{y_1} = \frac{hb^3}{3}$$

3.2.2. Ροπή αδράνειας παραλληλογράμμου

Οι σχέσεις της προηγούμενης παραγράφου μπορούν να χρησιμοποιηθούν επίσης και για τον προσδιορισμό της ροπής αδράνειας ενός παρ/μου ως προς αντίστοιχο άξονα, αρκεί αυτός (ο άξονας) να είναι παρ/λος προς μία πλευρά του παρ/μου.

Πραγματικά, αν ληφθεί υπόψη ότι ένα παρ/μο μπορεί να προκύψει από αντίστοιχο ορθογώνιο ίσων πλευρών αν η επάνω βάση του μετατεθεί οριζόντια, τότε τα εμβαδά των στοιχείων του και οι αποστάσεις των κεντροειδών τους απ' τον άξονα x παραμένουν τα ίδια.



Έτσι η ροπή αδράνειας του παρ/μου παραμένει η ίδια όπως και του ορθογωνίου. Δηλαδή:

$$J_{x_0} = \frac{bh^3}{12}$$

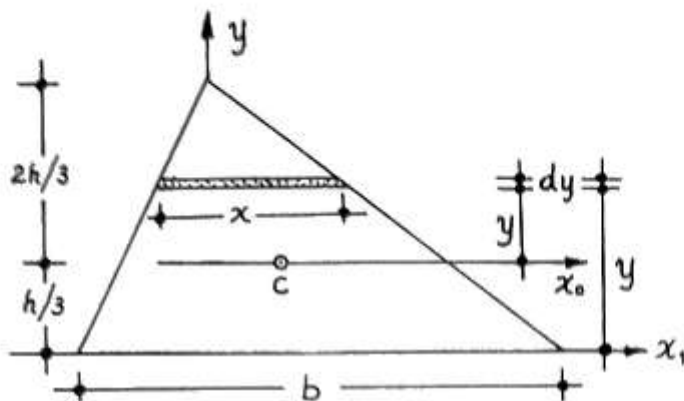
$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{3}$$

3.2.3 Ροπή αδράνειας τριγώνου

Για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας ενός τριγώνου ως προς τον άξονα x_1 που ταυτίζεται με τη βάση του, θεωρούμε παρ/λη προς τον άξονα λωρίδα σε απόσταση y απ'

αυτόν. Αν x είναι το μήκος της λωρίδας, θα είναι:

$$dF = x dy \quad \text{και} \quad \frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow x = \frac{b}{h}(h-y).$$



Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \int_0^h y^2 dF = \int_0^h y^2 x dy = \\ &= \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y) dy = \\ &= \frac{b}{h} \left[h \left(\frac{y^3}{3} \right) - \frac{y^4}{4} \right]_0^h = \\ &= \frac{b}{h} \left(\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right) = \frac{bh^3}{12}. \end{aligned}$$

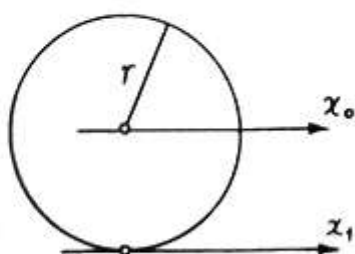
Αν ως άξονας θεωρηθεί ο κεντροβαρικός που είναι παράλληλος προς τη βάση, θα είναι αντίστοιχα:

$$dF = x dy \quad \text{και} \quad \frac{x}{b} = \frac{\frac{2h}{3} - y}{h} \Rightarrow x = \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{3} - y \right),$$

$$\begin{aligned} \text{οπότε:} \quad J_{x_0} &= \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 dF = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{3} - y \right) dy = \frac{b}{h} \left[\frac{2h}{3} \left(\frac{y^3}{3} \right) - \frac{y^4}{4} \right]_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} = \\ &= \frac{b}{h} \left[\frac{2h}{3} \cdot \frac{8h^3}{81} - \frac{16h^4}{4 \cdot 81} - \left(-\frac{2h}{3} \cdot \frac{h^3}{81} - \frac{1}{4} \cdot \frac{h^4}{81} \right) \right] = \\ &= \frac{bh^4}{h \cdot 81} \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{bh^3}{81} \cdot \frac{27}{12} = \frac{bh^3}{36}. \end{aligned}$$

3.2.4 Ροπή αδράνειας κύκλου

Οι σχέσεις που δίνουν τη ροπή αδράνειας ενός κύκλου ως προς άξονα τη διάμετρο ή εφαπτομένη του (βλ βελ 41), είναι:



$$J_{x_0} = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$$

$$J_{x_1} = \frac{5\pi \cdot r^4}{4}$$

3.3 Ακτίνα αδράνειας

Είναι γνωστό ότι η ροπή αδράνειας έχει διαστάσεις L^4 , όπου L η διάσταση του μήκους.

Αν τη ροπή αδράνειας J μίας επιφάνειας ως προς άξονα διαιρέσουμε διά του εμβαδού της F , θα πάρουμε σαν διάσταση L^2 , δηλαδή το τετράγωνο κάποιου μήκους.

Το μήκος αυτό ονομάζεται ακτίνα αδράνειας της επιφάνειας ως προς το θεωρούμενο άξονα και είναι εξ' ορισμού η θετική τετραγωνική ρίζα του πηλίκου της ροπής αδράνειας της επιφάνειας ως προς τον υπόψη άξονα, διά του εμβαδού της. Δηλαδή:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} \quad \text{και} \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$$

Για ένα ορθογώνιο π.χ. με βάση b και ύψος h , θα είναι:

$$i_{x_0}^2 = \frac{\frac{bh^3}{12}}{b \cdot h} = \frac{h^2}{12} \quad \text{και} \quad i_{y_0}^2 = \frac{\frac{b^3h}{12}}{b \cdot h} = \frac{b^2}{12}$$

$$\text{Συνεπώς:} \quad i_{x_0} = \frac{h}{\sqrt{12}} \quad \text{και} \quad i_{y_0} = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

Η ακτίνα αδράνειας εκφράζει την απόσταση ενός σημείου ή μίας λωρίδας απειροστού πάχους, παρ'λης του άξονα, όπου θεωρείται συμπυκνωμένη όλη η επιφάνεια του σχήματος, ώστε να έχει την ίδια ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα.

3.4 Θεώρημα του παρ'λου άξονα (Steiner)

Αν η ροπή αδράνειας J_{x_0} μίας επίπεδης επιφάνειας F ως προς κεντροβαρικό συνεπίπεδο άξονα x_0 είναι γνωστή, τότε η ροπή αδράνειας $J_{x'}$ της ίδιας επιφάνειας ως προς άξονα x' παρ'λο του x_0 ε' απόσταση a , μπορεί να υπολογιστεί

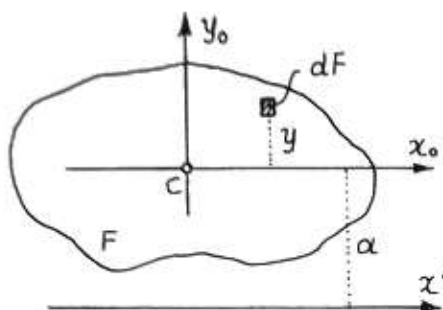
απ' την εξίσωση :

$$J_{x'} = J_{x_0} + F \cdot \alpha^2,$$

που εκφράζει το παρακάτω θεώρημα του Steiner :

Η ροπή αδράνειας επίπεδου σχήματος ως προς τυχαίο άξονα είναι ίση με τη ροπή αδράνειάς του ως προς κεντροβαρικό άξονα παρ/λο του πρώτου, αυξημένη κατά το γινόμενο του εμβαδού του σχήματος επί το τετράγωνο της απόστασης των δύο αξόνων.

Πραγματικά, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι :



$$\begin{aligned} J_{x'} &= \int_F (y + \alpha)^2 dF = \\ &= \int_F y^2 dF + 2\alpha \int_F y dF + \alpha^2 \int_F dF \end{aligned}$$

Αλλ' όμως είναι

$$\int_F y dF = 0,$$

επειδή ο άξονας Cx_0 περνάει

απ' το κεντροειδές της επιφάνειας του σχήματος. Άρα :

$$J_{x'} = J_{x_0} + F \cdot \alpha^2 \quad 3.4. \alpha$$

Η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και αντίστροφα για τον υπολογισμό της ροής αδράνειας ως προς κεντροβαρικό άξονα x_0 παρ/λο του x' , όταν είναι γνωστή η $J_{x'}$, δηλαδή :

$$J_{x_0} = J_{x'} - F \cdot \alpha^2 \quad 3.4. \beta$$

Όπως προκύπτει απ' το θεώρημα του Steiner, η ροπή αδράνειας μιάς επιφάνειας ως προς τον κεντροβαρικό της άξονα, παίρνοντας πάντα θετικές τιμές, είναι η μικρότερη απ' όλες τις ροπές αδράνειας που προκύπτουν για την ίδια επιφάνεια ως προς οποιονδήποτε άξονα παρ/λο του παραπάνω κεντροβαρικού.

Λαμβάνοντας υπόψη την έννοια της ακτίνας αδράνειας

μιάς επιφάνειας ως προς άξονα, μπορούμε, διαιρώντας τα μέλη των εκθέσεων 3.4.α και 3.4.β διά F , να εκφράσουμε το θεώρημα του Steiner αντίστοιχα με τις εκθέσεις

$$I_{x'} = I_{x_0} + \alpha \quad \eta \quad I_{x_0} = I_{x'} - \alpha$$

Η πρόθεση ροπών αδράνειας διαφόρων επιφανειών είναι δυνατή μόνον όταν οι ροπές αδράνειας αναχθούν σε κοινό άξονα. Εδώ υπογραμίζεται η μεγάλη συμβολή του θεωρήματος Steiner.

3.5. Παραδείγματα

1. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Steiner, να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας:

- α) Ορθογωνίου, ως προς άξονα τη βάση του
- β) Τριγώνου, ως προς κεντροβαρικό άξονα παρ/λο της βάσης του και
- γ) Κύκλου, ως προς άξονα την εφαπτομένη του.

Λύση

α) Ορθογωνίου

Απ' το σχήμα της βελ. 31 έχουμε:

$$I_{x_0} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{και} \quad \alpha = \frac{h}{2}$$

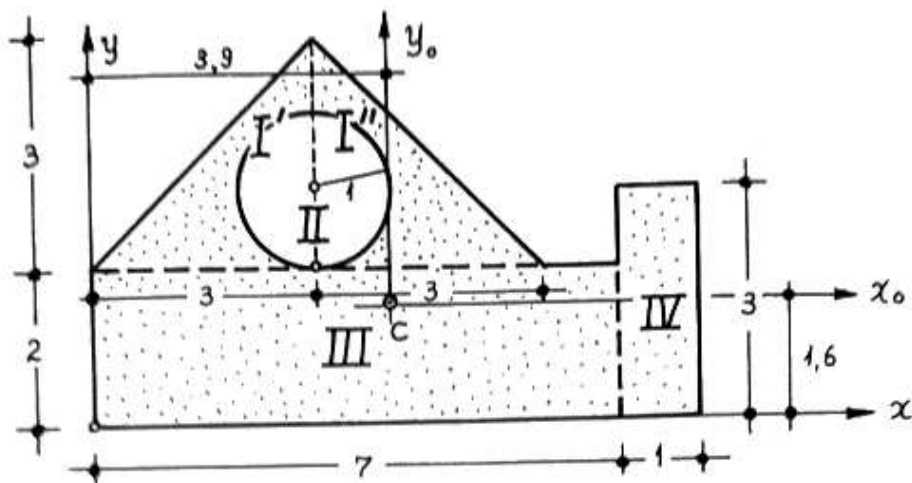
Έτσι, απ' το θεώρημα του Steiner, προκύπτει:

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} + bh \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

β) Τριγώνου

Όμοια απ' το σχήμα της βελ. 33 έχουμε:

Υστερ' αὐτὰ θα ἔχουμε:



$$J_x = J_{I', I''_x} - J_{II_x} + J_{III_x} + J_{IV_x}$$

Αλλ' είναι:

$$J_{I', I''_x} = \frac{6 \cdot 3^3}{36} + \frac{6 \cdot 3}{2} \cdot 3^2 = 85,5 \text{ cm}^4$$

$$J_{II_x} = \frac{\pi \cdot 1^4}{4} + \pi \cdot 1^2 \cdot 3^2 = 29,06 \text{ cm}^4$$

$$J_{III_x} = \frac{7 \cdot 2^3}{3} = 18,67 \text{ cm}^4$$

$$J_{IV_x} = \frac{1 \cdot 3^3}{3} = 9 \text{ cm}^4$$

$$\text{Άρα: } J_x = 85,5 - 29,06 + 18,67 + 9 = \underline{\underline{84,11 \text{ cm}^4}}$$

Επίσης, είναι:

$$J_y = J_{I'_y} + J_{I''_y} - J_{II_y} + J_{III_y} + J_{IV_y}$$

Όμως είναι:

$$J_{I'_y} = \frac{3 \cdot 3^3}{36} + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 2^2 = 20,25 \text{ cm}^4$$

$$J_{I''_y} = \frac{3 \cdot 3^3}{36} + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 4^2 = 74,25 \text{ cm}^4$$

$$J_{II_y} = \frac{\pi \cdot 1^4}{4} + \pi \cdot 1^2 \cdot 3^2 = 29,06 \text{ cm}^4 = J_{II_x}$$

$$J_{III_y} = \frac{2 \cdot 7^3}{3} = 228,67 \text{ cm}^4$$

$$J_{IV_y} = \frac{3 \cdot 1^3}{12} + 3 \cdot 1 \cdot 7,5^2 = 169 \text{ cm}^4$$

Άρα $J_y = 20,25 + 74,25 - 29,06 + 228,67 + 169 = \underline{463,11 \text{ cm}^4}$

β) Για να υπολογίσουμε τις ροπές αδράνειας της επιφάνειας ως προς τους κεντροβαρικούς της άξονες, προσδιορίζουμε πρώτα τις συντεταγμένες x_k και y_k του κεντροειδούς της C.

α/α Επιφ.	x_i cm	y_i cm	F_i cm ²	$F_i x_i$ cm ³	$F_i y_i$ cm ³
I' + I''	3	3	9	27	27
II	3	3	-3,14	-9,42	-9,42
III	3,5	1	14	49	14
IV	7,5	1,5	3	22,5	4,5
Σ Υ Ν Ο Λ Α			22,86	89,08	36,08

Άρα: $x_k = \frac{\sum (F_i x_i)}{\sum F_i} = \frac{89,08}{22,86} = 3,9 \text{ cm}$

$y_k = \frac{\sum (F_i y_i)}{\sum F_i} = \frac{36,08}{22,86} = 1,58 \text{ cm}$

Χρησιμοποιώντας τώρα το θεώρημα Steiner για όλη την επιφάνεια, υπολογίζουμε τις J_{x_0} και J_{y_0} .

$J_{x_0} = J_x - F y_k^2 = 84,11 - 22,86 \cdot 1,58^2 = \underline{27,04 \text{ cm}^4}$

$J_{y_0} = J_y - F x_k^2 = 463,11 - 22,86 \cdot 3,9^2 = \underline{115,41 \text{ cm}^4}$

γ) Οι ακτίνες αδράνειας προκύπτουν, βάσει ορισμού, απ' τις αντίστοιχες ροπές αδράνειας και είναι:

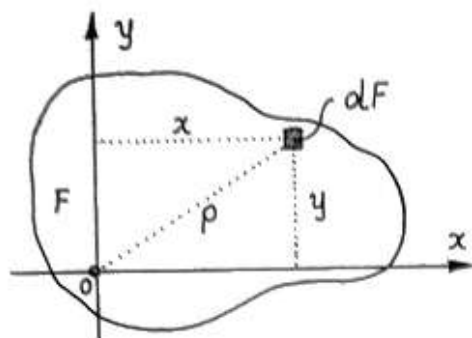
$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{84,11}{22,86}} = 1,92 \text{ cm}$

$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{463,11}{22,86}} = 4,5 \text{ cm}$

$i_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{F}} = \sqrt{\frac{27,04}{22,86}} = 1,09 \text{ cm}$

$i_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{F}} = \sqrt{\frac{115,41}{22,86}} = 2,25 \text{ cm}$

3.6 Πολική ροπή αδράνειας



Θεωρούμε την επίπεδη επιφάνεια F του σχήματος ως προς το σύστημα συντεταγμένων xoy .

Θα ονομάζουμε πολική ροπή αδράνειας J_p της επιφάνειας F ως προς πόλο το σημείο O , το άθροισμα των γινομένων των

στοιχειωδών επιφανειών dF του σχήματος επί τα τετράγωνα των αποστάσεων τους απ' τον πόλο.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η πολική ροπή αδράνειας της επιφάνειας του σχήματος ως προς το σημείο O , είναι:

$$J_p = \int_F \rho^2 dF,$$

όπου κάθε εμβαδικό στοιχείο dF πολλαπλασιάζεται επί ρ^2 και η ολοκλήρωση εκτείνεται σ' όλη την επιφάνεια του σχήματος.

Είναι δηλαδή η πολική ροπή αδράνειας μίας επιφάνειας ως προς πόλο, ταυτόσημη με τη ροπή αδράνειας της ίδιας επιφάνειας ως προς άξονα που είναι κάθετος της επιφάνειας στο σημείο του πόλου.

Για την επιφάνεια του σχήματος είναι ήδη γνωστό, ότι:

$$J_x = \int_F y^2 dF \quad \text{και}$$

$$J_y = \int_F x^2 dF$$

$$\text{Άρα:} \quad J_x + J_y = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F \rho^2 dF = J_p \quad 3.6 \alpha$$

Η σχέση αυτή δηλώνει ότι η πολική ροπή αδράνειας επιφάνειας ως προς τυχόν σημείο O ισούται προς το άθροισμα των ρομών αδράνειας της ίδιας επιφάνειας ως προς δύο κά-

δετους άξονες που κείνται στην επιφάνεια και τέμνονται στο O .

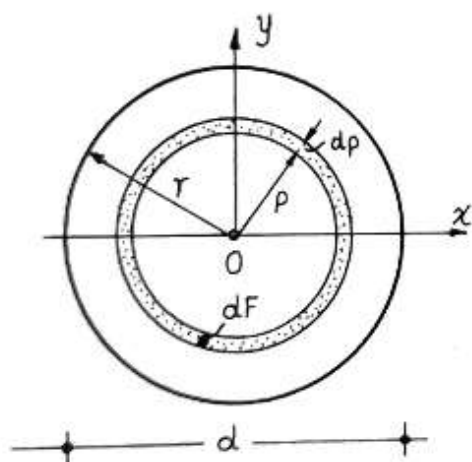
Η πρόταση αυτή, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί, επιτρέπει τον υπολογισμό της ροής αδράνειας ενός κύκλου ως προς κάποια διάμετρό του, σχέση που χρησιμοποιήθηκε ήδη στη βελ. 33.

3.6.1 Παράδειγμα

Να υπολογιστούν:

- Η πολική ροή αδράνειας κύκλου ακτίνας r , ως προς πόλο το κέντρο του και
- Η ροή αδράνειας αυτού, ως προς άξονα τη διάμετρό του.

Λύση



α) Διαιρούμε τον κύκλο σε στοιχειώδεις ομόκεντρους δακτυλίους dF με ακτίνα ρ , απειροελάχιστο πάχος $d\rho$ και εμβαδό

$$dF = 2\pi\rho d\rho.$$

Τότε θα είναι:

$$\begin{aligned} J_p &= \int_F \rho^2 dF = \int_0^r \rho^2 2\pi\rho d\rho = \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^r = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}. \end{aligned}$$

β) Λόγω συμμετρίας, είναι $J_x = J_y$.

Άρα, από τη σχέση 3.6 α της προηγούμενης βελίδας προκύπτει:

$$J_p = 2J_x = 2J_y,$$

$$\text{ή} \quad J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

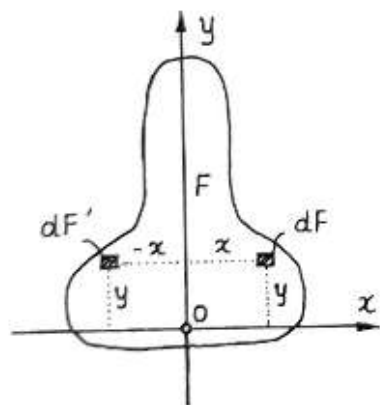
3.7 Φυγόκεντρη ροπή αδράνειας

Αναφερόμενοι στο σχήμα της βελ. 40, το ολοκλήρωμα:

$$J_{xy} = \int_F xy dF,$$

όπου κάθε απειροστό στοιχείο dF της επιφάνειας πολ/ζεται επί το γινόμενο των συντεταγμένων του κεντροειδούς του, η δε ολοκλήρωση εκτείνεται σ' ολόκληρη την επιφάνεια F του σχήματος καλείται **φυγόκεντρη ροπή αδράνειας** της επιφάνειας ως προς τους άξονες x και y .

Επειδή οι συντεταγμένες των διαφόρων απειροστών στοιχείων της επιφάνειας δεν είναι πάντα θετικοί αριθμοί, είναι φανερό ότι η φυγόκεντρη ροπή αδράνειας μπορεί να παίρνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή (θετική, αρνητική ή μηδέν), που είναι συνάρτηση της θέσης και του προσανατολισμού των αξόνων ως προς την επιφάνεια.



Αν το σχήμα έχει ένα άξονα συμμετρίας, π.χ. τον άξονα y , τότε η φυγόκεντρη ροπή του ως προς τους άξονες x, y είναι **μηδέν**.

Πραγματικά, σε κάθε στοιχείο dF με θετικό x , υπάρχει, λόγω συμμετρίας, ένα αντίστοιχο στοιχείο

dF' με αρνητικό x και ίδιο y .

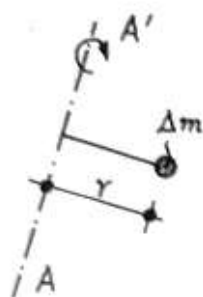
Επομένως τα αντιστοιχα στοιχειώδη γινόμενα $xy dF$ και $-xy dF$ εξαλείφονται αμοιβαία, οπότε το ολοκλήρωμα $\int_F xy dF$, που ανάγεται σε αλγεβρικό άθροισμα τέτοιων ζευγών, τελικά μηδενίζεται. Είναι προφανές ότι σε περίπτωση συμμετρίας του σχήματος ως προς κέντρο (δύο άξονες), θα είναι και πάλι $J_{xy} = 0$.

3.8 Φυσική σημασία των ροπών αδράνειας

Τα όσα μέχρι τώρα αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο αυτό, αναφέρονται σε ροπές αδράνειας επιπέδων σχημάτων.

Αν δεχτούμε την ύπαρξη αντιστοιχίας ανάμεσα στη στοιχειώδη επιφάνεια dF και τη στοιχειώδη μάζα Δm της ύλης, τότε μπορούμε να μιλάμε με την ίδια ορολογία και τις ίδιες σχέσεις για ροπή αδράνειας μάζας.

Στο άκρο μίας ράβδου με αμελητέο βάρος, θεωρούμε στοιχειώδη μάζα Δm που μπορεί να περιστρέφεται σε απόσταση r γύρω απ' τον άξονα AA' .



Αν στο σύστημα, που αρχικά ηρεμεί, εφαρμοστεί ζεύγος δυνάμεων, η ράβδος και η μάζα θ' αρχίσουν να περιστρέφονται γύρω απ' τον άξονα AA' .

Αποδεικνύεται στη Δυναμική ότι ο χρόνος, που απαιτείται για ν' αποκτήσει το σύστημα μία συγκεκριμένη γωνιακή ταχύτητα, είναι ανάλογος της μάζας Δm και του τετραγώνου της απόστασης r .

Επομένως το γινόμενο $r^2 \Delta m$ εκφράζει το μέτρο της αδράνειας του συστήματος δηλαδή την αντίσταση που προβάλλει όταν επιχειρούμε να το δέσουμε σε κίνηση απ' την κατάσταση ηρεμίας.

Για το λόγο αυτό το γινόμενο $r^2 \Delta m$ ονομάζεται ροπή αδράνειας της μάζας Δm ως προς τον άξονα AA' .

Η ακτίνα αδράνειας, όπως γνωρίσαμε και πριν, έχει διαστάσεις μήκους και η φυσική της σημασία είναι ότι παριστάνει την απόσταση που πρέπει να τοποθετηθεί η συνολική μάζα m του σώματος, θεωρούμενη σαν σημείο (ιδανική περίπτωση), ώστε να μη μεταβληθεί η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς το θεωρούμενο άξονα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΑΠΛΟΙ ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

4.1 Γενικά

Η έννοια του φορέα, σαν κατασκευή που φέρει εξωτερικά φορτία και τα μεταφέρει με ασφάλεια στις στηρίξεις του, είναι γενική και αναφέρεται β' όλα τα στερεά σώματα που ισορροπούν κάτω από την επίδραση φορτίων.

Οι φορείς ανάλογα με τη μορφή τους διακρίνονται στους:

1. Χωρικούς, που είναι σώματα τριών διαστάσεων και παραλαμβάνουν τυχούσες δυνάμεις στο χώρο.

2. Επιφανειακούς, που είναι κατασκευές μικρού πάχους και αναπτύσσονται β' επιφάνεια που ονομάζεται μέση.

Ανάλογα με τη μορφή της μέσης επιφάνειας, οι επιφανειακοί φορείς (βλ. α, β, γ) διακρίνονται:

2α. Στα κελύφη, των οποίων η μέση επιφάνεια είναι καμπύλη και δέχονται τυχούσες δυνάμεις

2β. Στους δίσκους και πλάκες, των οποίων η μέση επιφάνεια είναι επίπεδη. Η διαφορά ανάμεσά τους βρίσκεται στα εξωτερικά φορτία, τα οποία:

- στους δίσκους κείνται στο επίπεδο του φορέα,
- στις πλάκες είναι κάθετα β' αυτό.

3. Γραμμικούς, που είναι σώματα σταθερής ή μεταβλητής διατομής, της οποίας το κεντροειδές γράφει οποιαδήποτε επίπεδη γραμμή, που ονομάζεται άξονας.

Οι γραμμικοί φορείς, ανάλογα με τη μορφή του άξονά τους,

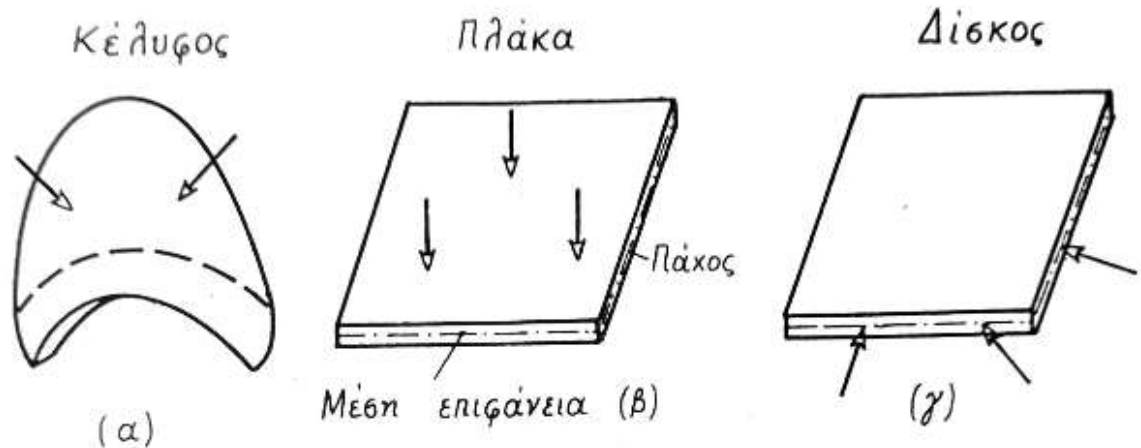
διακρίνονται στους:

3α ευθύγραμμους, όταν ο άξονάς τους είναι ευθεία γραμμή,

3β τοξοτούς, όταν ο άξονας είναι κυκλικό, παραβολικό ή γενικά καμπύλο τόξο,

3γ πλαισιωτούς, όταν ο άξονας είναι οποιαδήποτε τετράθετη ευθεία και

3δ σύνθετους, όταν ο άξονας έχει σύνθετη μορφή, καλύπτοντας περιωότερες της μίας απ' τις παραπάνω περιπτώσεις.



4.2 Η δοκός σαν φορέας.

Η έννοια της δοκού, που θα μας απασχολήσει παρακάτω, ταυτίζεται με τους ευθύγραμμους γραμμικούς φορείς (περίπτωση 3α), και είναι ένα κατασκευαστικό στοιχείο που μπορεί να φέρει εξωτερικά φορτία οποιασδήποτε μορφής.

Η απλούστερη δοκός αποτελείται από μία πρισματική ράβδο, που στηρίζεται στα άκρα της ελεύθερα πάνω σε δύο στηρίγματα, (6x δ).

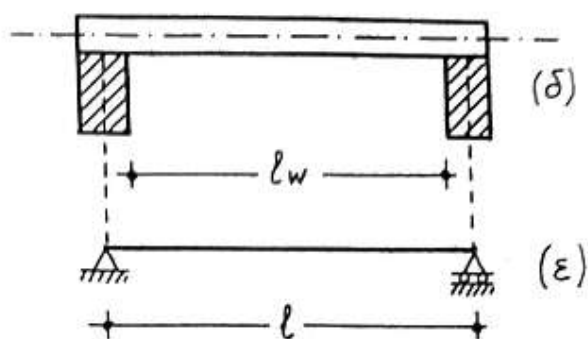
Στην πραγματικότητα η δοκός δεν μπορεί να νοηθεί χωρίς πάχος, αλλά ούτε και τα στηρίγματα χωρίς έκταση. Στη θεωρία όμως, μας είναι αρκετό να θεωρούμε τη δοκό μεν σαν

ευθύγραμμο τμήμα που ταυτίζεται με τον άξονά της, ενώ τα στηρίγματα δαν γεωμετρικά σημεία.

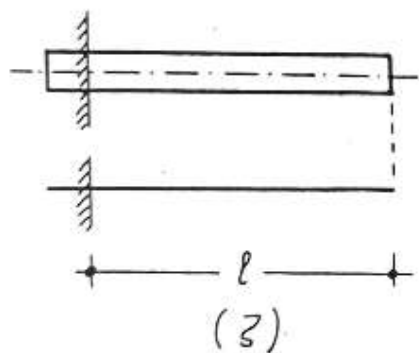
Έτσι φθάνουμε στην εξιδανικευμένη μορφή της απλής αμφιέριστης δοκού, (βλ. ε).

Ακόμα υποθέτουμε πως το ένα στηρίγμα της δοκού είναι αμετάθετο, ενώ το άλλο μπορεί να μετακινηθεί στην επιφάνεια στηρίξης χωρίς τριβές.

Η απόσταση ανάμεσα στα δύο στηρίγματα της δοκού ονομάζεται θεωρητικό άνοιγμα και συμβολίζεται με l για να διακρίνεται από το ελεύθερο άνοιγμα l_w που περιλαμβάνει την εσωτερική απόσταση ανάμεσα απ' τους τοίχους στηρίξης.



Ένα άλλο είδος δοκού είναι ο πρόβολος.



Αποτελείται από μία ράβδο που το ένα της άκρο είναι καλά εντοιχισμένο, ενώ το άλλο της άκρο είναι ελεύθερο, (βλ. ζ).

Το μήκος που προέχει είναι το μήκος l του προβόλου.

Η απλή αμφιέριστη δοκός μπορεί να φέρει πρόβολο προς τα αριστερά ή δεξιά οπότε λέγεται (μ ο ν ο) π ρ ο έ χ ο υ σ α. Επίσης μπορεί να φέρει πρόβολο και από τα δύο μέρη, οπότε λέγεται α μ φ ι π ρ ο έ χ ο υ σ α.

Αν η δοκός εκτείνεται χωρίς διακοπή πάνω από πολλά στηρίγματα, τότε λέγεται σ υ ν ε χ ή ς.

Μερικές φορές η συνέχεια διακόπτεται με αρθρώσεις σε κατάλληλες θέσεις και αριθμό, οπότε η δοκός ονομάζεται

αρθρωτή ή δοκός Gerber

Τέλος το σώμα των δοκών, άλλοτε είναι συμπαγές, όπως π.χ. το σώμα μίας δοκού από οπλισμένο εκυρόδεμα, άλλοτε είναι δικτυωτό, δηλαδή αποτελείται από πολλές ράβδους στο ίδιο επίπεδο που συνδέονται αρθρωτά μεταξύ τους.

Γι' αυτό οι πρώτες ονομάζονται ολόσωμοι δοκοί, ενώ οι δεύτερες δικτυωτές.

Σ' όλες τις παραπάνω περιπτώσεις δοκών ή φορέων, ο προσδιορισμός των τάσεων σαν αποτέλεσμα εσωτερικών δυνάμεων, αποτελεί αντικείμενο μελέτης της Αντοχής των Υλικών και μπορεί να γίνει μόνο αν ληφθούν υπόψη και οι παραμορφώσεις του σώματος.

Αντίθετα ο προσδιορισμός της συνισταμένης των τάσεων που γίνεται πριν από τον υπολογισμό των τάσεων, αποτελεί πρόβλημα της Δομικής Στατικής και γίνεται με τη βοήθεια των στερεοστατικών εξισώσεων ισορροπίας σε αποτεμνόμενο τμήμα του σώματος.

Στις περιπτώσεις αυτές ο φορέας ονομάζεται εσωτερικά στατικά ορισμένος.

Όταν όμως οι τρεις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά για τον προσδιορισμό των εξωτερικών αντιδράσεων, τότε ο φορέας ονομάζεται εξωτερικά στατικά ορισμένος.

Αν τώρα ένας φορέας είναι και εσωτερικά και εξωτερικά στατικά ορισμένος, τότε ονομάζεται απλά στατικά ορισμένος ή ισοστατικός.

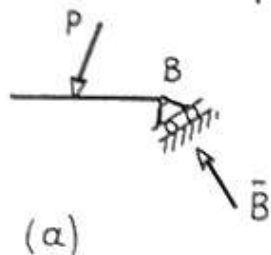
Επειδή οι περιβόητοι φορείς είναι εσωτερικά στατικά ορισμένοι, θεωρούμε έναν φορέα σαν ισοστατικό όταν το πλήθος των αντιδράσεων του (α) δεν ξεπερνά τον αριθμό 3 που είναι οι στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας.

Στην αντίθετη περίπτωση, όπου $\alpha > 3$, ο φορέας ονομάζεται υπερστατικός με βαθμό στατικής ή αοριβτίας τον αριθμό $\nu = \alpha - 3$.

4.3 Οι στηρίξεις.

Για τη στήριξη μίας δοκού είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν τα παρακάτω είδη στηρίξεων:

1. Ελεύθερη έδραση ή κύλιση, (βλ. α).

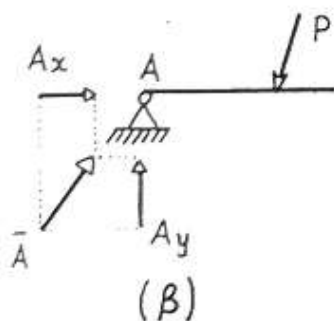


Το σημείο στήριξης είναι ελεύθερο να κινείται σε επίπεδη ή άλλη επιφάνεια χωρίς τριβές, καθώς και να περιστρέφεται.

Η αντίδραση είναι δύναμη που περνάει απ' το σημείο στήριξης, κάθετα στην επιφάνεια κύλισης, γιατί κατά την διεύθυνση αυτή αποκλείεται η μετακίνηση του σημείου στήριξης.

Οι μετατοπίσεις που γίνονται στο επίπεδο της κύλισης είναι γενικά πολύ μικρές και οφείδονται στις αναπόφευκτες παραμορφώσεις της δοκού από φορτία ή θερμοκρασιακές μεταβολές.

2. Άρθρωση, (βλ. β).

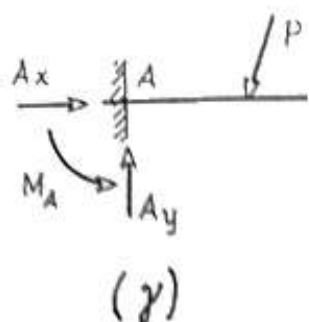


Εδώ το σημείο στήριξης συνδέεται μόνιμα με το έδαφος ή άλλο στερεό σύστημα, μέσω άρθρωσης που επιτρέπει μόνο την ελεύθερη στροφή της δοκού.

Η αντίδραση επομένως $\bar{A}$, που περνάει απ' την άρθρωση, μπορεί να έχει οποιαδήποτε διεύθυνση, γιαυτό και αναλύεται ορθογώνια σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα A_x και A_y .

3. Πάκτωση, (βλ. γ)

Η στήριξη αυτού του είδους, δεν επιτρέπει καμιά στροφή ή μετακίνηση στο άκρο της δοκού.



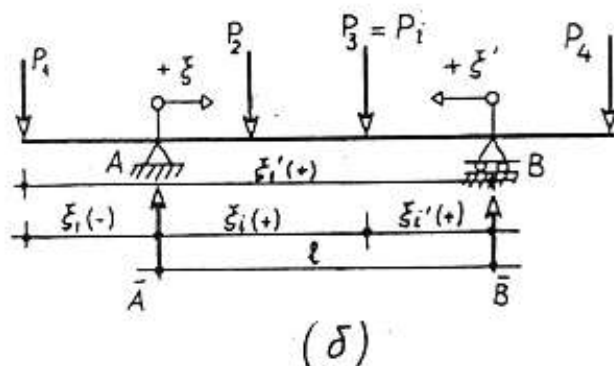
Έτσι, για τις αντιδράσεις, πέρα από την A_x και A_y που συναντήσαμε στην άρθρωση, εμφανίζεται εδώ και η αντίδραση ροπή M_A , που οφείλεται στον αποκλεισμό περιστροφής του φορέα γύρω από το A .

4.4 Εξωτερικά φορτία και αντιδράσεις.

1. Όταν μία δοκός βρίσκεται κάτω απ' την ενέργεια διαφόρων φορτίων, τότε τα σημεία στήριξης μεταφέρουν στο έδαφος ορισμένες δυνάμεις. Αλλά τότε, σύμφωνα με την αρχή της αλληλεπίδρασης και το έδαφος ασκεί στη δοκό δυνάμεις αντίθετες, που τις ονομάζουμε αντιδράσεις.

Θεωρούμε τη δοκό του σχ. δ που φορτίζεται με φορτία P_i κάθετα στον άξονά της.

Οι αντιδράσεις $\bar{A}$ και $\bar{B}$ που θα είναι επίσης κάθετες στον άξονα, προσδιορίζονται από τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών προς τα δύο σημεία στήριξης.



Πραγματικά, αν ξ_i και ξ'_i οι αποστάσεις της τυχαίας δύναμης P_i απ' τις δύο στήριξεις, τότε θα είναι:

$$(\sum M)_A^+ = 0 \Rightarrow -(-P_1 \xi_1) + P_2 \xi_2 + P_3 \xi_3 + P_4 \xi_4 - \bar{B} l = 0 \Rightarrow \sum P_i \xi_i = \bar{B} l \quad (1)$$

$$(\sum M)_B^+ = 0 \Rightarrow -P_1 \xi'_1 - P_2 \xi'_2 - P_3 \xi'_3 + P_4 (-\xi'_4) + \bar{A} l = 0 \Rightarrow \sum P_i \xi'_i = \bar{A} l$$

Απ' τις σχέσεις (1) προκύπτουν οι τιμές των αντιδράσεων:

$$\bar{A} = \frac{1}{l} \sum P_i \xi'_i, \quad \bar{B} = \frac{1}{l} \sum P_i \xi_i \quad (2)$$

Στις σχέσεις (1), οι τετμημένες ξ_i και ξ'_i της τυχαίας δύναμης P_i είναι θετικές όταν η P_i ευρίσκεται μεταξύ των A και B .

Η συνθήκη μηδενισμού των κατακορύφων προβολών των δυνάμεων $\Sigma y^{\uparrow\downarrow} = 0$ θα δώσει τώρα τη σχέση:

$$\bar{A} + \bar{B} = \Sigma P_i \quad (3)$$

που χρησιμοποιεί μόνον για επαλήθευση.

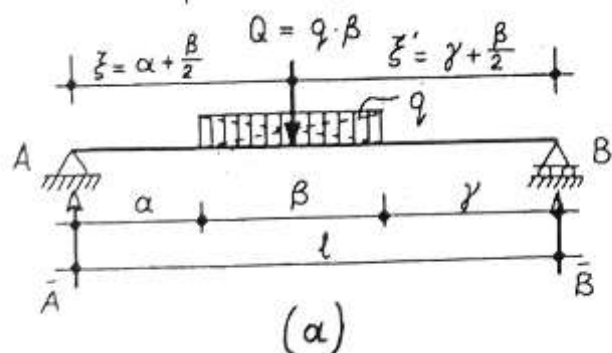
2. Τα φορτία που θεωρήσαμε ως τώρα είναι συγκεντρωμένα, δηλαδή έχουν ένα ορισμένο σημείο εφαρμογής.

Είναι όμως δυνατόν τα φορτία να μη συγκεντρώνουν τη δράση τους σε ένα μόνο σημείο, αλλά να εκτείνονται συνεχώς σ' όλη τη δοκό ή ένα μόνο τμήμα της, κατακόρυφα.

Ένα τέτοιο φορτίο ορίζεται αν γνωρίζουμε την τιμή του q ανά μονάδα μήκους. Έτσι λέμε π.χ. ότι σε μία δοκό ενεργεί φορτίο συνεχές και ομοιόμορφο ή απλά ομοιόμορφο ίσο με $2t/\pi$, που σημαίνει ότι σε μήκος ενός μέτρου, συγκεντρώνεται φορτίο $2t$ που θεωρείται ότι ενεργεί στο μέσον του μήκους του.

Γραφικά παριστάνεται με ένα ορθογώνιο που η βάση του είναι το φορτιζόμενο μήκος, ενώ το ύψος του, με μία κλίμακα δυνάμεων, η ανά μονάδα μήκους τιμή του φορτίου που ονομάζεται ένταση.

Θεωρούμε τη δοκό του σχ. α, όπου το ομοιόμορφο φορτίο, έντασης q , ενεργεί ασύμμετρα σε ένα τμήμα της δοκού.



Οι αντιδράσεις $\bar{A}$ και $\bar{B}$, άνισες και κάθετες στον άξονα της δοκού, θα προσδιοριστούν με το ίδιο εκκεπτικό της προηγούμενης παραγράφου, αφού πρώτα μετατραπεί

το συνεχές φορτίο σε συγκεντρωμένο, με ένταση $Q = q\beta$ και φορτία που να περνάει απ' το κεντροειδές της επιφάνειας φόρτισης.

Έτσι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2), έχουμε:

$$\bar{A} = Q \frac{\xi'}{l} = q\beta \frac{\gamma + \frac{\beta}{2}}{l}, \quad \bar{B} = Q \frac{\xi}{l} = q\beta \frac{\alpha + \frac{\beta}{2}}{l} \quad (4)$$

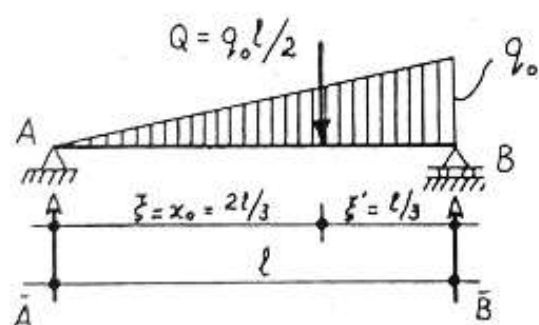
3. Όταν το φορτίο είναι συνεχές αλλά όχι ομοιόμορφο, που σημαίνει ότι η ένταση του συνεχούς φορτίου δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται κατά μήκος της δοκού, τότε βρίσκουμε το εμβαδόν της επιφάνειας φόρτισης που περιβάλλει τη συνισταμένη του συνεχούς φορτίου σε ένταση και στη συνέχεια προσδιορίζουμε το κεντροειδές της επιφάνειας φόρτισης, απ' όπου περνάει ο φορέας της συνισταμένης.

Έτσι, αν Q είναι η ένταση της συνισταμένης (εμβαδόν της επιφάνειας φόρτισης) και x_0 η απόσταση του φορέα της (κεντροειδές) απ' το αριστερό στήριγμα A , τότε θα είναι:

$$\bar{A} = Q \frac{l - x_0}{l}, \quad \bar{B} = Q \frac{x_0}{l}.$$

Έστω για παράδειγμα η δοκός AB του σχήματος που φορτίζεται με τριγωνικό φορτίο και έχει ακραία τιμή στο στήριγμα B ίση με q_0 .

Η συνισταμένη του φορτίου αυτού έχει ένταση ίση με το εμβαδό της τριγωνικής επιφάνειας φόρτισης, δηλαδή:



$$Q = \frac{1}{2} q_0 l,$$

και θα βρίσκεται σε απόσταση από το A ίση προς την τετμημένη του κεντροειδούς του τριγώνου, δηλ. $2l/3$. Άρα οι αντιδράσεις θα είναι:

$$\bar{A} = \frac{Q \cdot \xi'}{l} = \frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{l}{3l} = \frac{q_0 l}{6} \quad \text{και} \quad \bar{B} = Q \frac{\xi}{l} = \frac{q_0 l}{3} \quad (5)$$

Σημείωση: Αν στις παραπάνω περιπτώσεις εμφανιστούν σαν εξωτερικά φορτία και συγκεντρωμένες ροπές, τότε αυτές προστίθενται αλγεβρικά (ανάλογα με τη φορά τους) στις συνθήκες (1), χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η θέση εφαρμογής τους.

4.5 Τα φορτία διατομής.

Σαν κατασκευαστικό στοιχείο η δοκός συναντιέται πάρα πολύ συχνά στην πράξη.

Μπορεί να πάρει δυνάμεις και κατά την διεύθυνση του άξονά της και κάθετα σ' αυτόν. Μπορεί δηλαδή να ενταθεί όχι μόνο αξονικά, αλλά τμητικά, καμπτικά ή στρεπτικά, δηλαδή σύνθετα.

Η παρουσία των εξωτερικών φορτίων, εφ' όσον βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που περιέχει τον άξονα της δοκού, έχει σαν συνέπεια την εμφάνιση σε τυχούσα διατομή τριών γενικά εντατικών μεγεθών, που ονομάζονται **φορτία διατομής**.

Τα φορτία διατομής, που συμβολίζονται με τα γράμματα N , Q , M είναι αντίστοιχα:

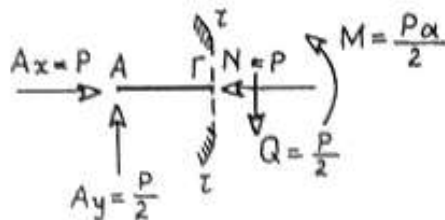
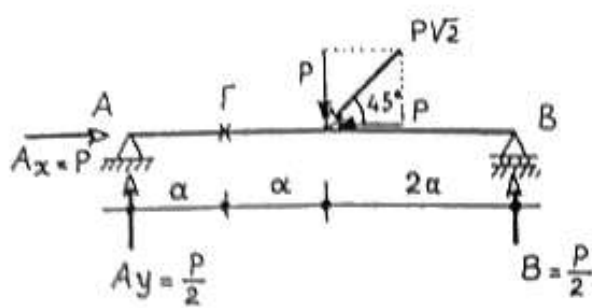
1. Η αξονική ή ορθή δύναμη (N)
2. Η τέμνουσα δύναμη (Q) και
3. Η ροπή κάμψης ή καμπτική ροπή (M).

Αν υπολογίσουμε τα N , Q , M σε κάθε διατομή του φορέα και, με κάποια κλίμακα, σχεδιάσουμε τις τεταγμένες των τιμών τους κατά μήκος του φορέα, θα πάρουμε τότε τα διαγράμματα των εντατικών μεγεθών (N), (Q), (M).

Αν ο φορέας είναι στο χώρο, τότε εκτός απ' την καμπτική ροπή σε τυχούσα διατομή, εμφανίζεται και ροπή στρέψης M_t .

Γιά να γνωρίσουμε τα φορτία διατομής, θεωρούμε την αμφιέριστη δοκό του σχ α, που φορτίζεται στο μέσον της με φορτίο $P\sqrt{2}$ υπό γωνία 45° .

Αν αναλύσουμε την $P\sqrt{2}$ σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα, κάθε μία ίση με P , μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά τις αντιδράσεις, χρησιμοποιώντας τις τρεις γνωστές στερεοστατικές συνθήκες ισορροπίας:



(α)

$$(\Sigma M)_A^{\uparrow} = 0 \Rightarrow P \cdot 2\alpha - B \cdot 4\alpha = 0$$

$$\Rightarrow B = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma y^{\uparrow} = 0 \Rightarrow Ay - P + \frac{P}{2} = 0$$

$$\Rightarrow Ay = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma x^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow Ax - P = 0 \Rightarrow Ax = P$$

Απομονώνοντας τώρα το τμήμα ΑΓ με την τομή ττ, ας εξετάσουμε την ισορροπία του.

Για να εξασφαλίσουμε το αμετακίνητο του τμήματος κατά την οριζόντια έννοια και να ισχύει επομένως η συνθήκη $\Sigma x^{\rightarrow} = 0$, θα πρέπει στο κεντροειδές της διατομής Γ και κάθετα προς αυτή να ασκηθεί δύναμη $N = P$ ίση και αντίθετη της $Ax = P$.

Η δύναμη αυτή, που ενεργεί παράλληλα προς τον άξονα του φορέα στη θέση της διατομής, είναι η α ξ ο ν ι κ ή ή ο ρ θ ή δ ύ ν α μ η (N).

Όμοια, για να εξασφαλίσουμε το αμετακίνητο του τμήματος κατά την κατακόρυφη έννοια και να ισχύει η συνθήκη $\Sigma y^{\uparrow} = 0$, θα πρέπει πάνω στη διατομή πάντα Γ να τοποθετηθεί η δύναμη $Q = P/2$ ίση και αντίθετη της $Ay = P/2$.

Η δύναμη αυτή, που ενεργεί κάθετα στον άξονα του φορέα στη θέση της διατομής, είναι η τ έ μ ν ο υ θ α δύναμη (Q).

Τέλος για να εξασφαλίσουμε το άστρεπτο του τμήματος ΑΓ, ώστε να ισχύει η συνθήκη $(\Sigma M)_\Gamma^{\curvearrowright} = 0$, θα πρέπει στο κεντροειδές της διατομής Γ να εμφανισθεί ροπή $M = P\alpha/2$ ίση και αντίθετη με εκείνη που δημιουργεί στην ίδια διατομή (Γ) η αντίδραση Ay , που είναι $M' = Ay \cdot \alpha = P\alpha/2$.

Η ροπή αυτή, είναι η ρ ο π ή κ ά μ υ η ς ή κ α μ π τ ι κ ή ρ ο π ή (M).

4.6 Σήμανση και υπολογισμός των N, Q, M .

Για τον προσδιορισμό ενός εντατικού μεγέθους N ή Q ή M μίας διατομής, υπολογίζεται το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων (εξωτερικών φορτίων και αντιδράσεων) που βρίσκονται αριστερά ή δεξιά της διατομής και επηρεάζουν το συγκεκριμένο μέγεθος.

Το κριτήριο για την από αριστερά ή δεξιά επιλογή, είναι ο μικρότερος αριθμός δυνάμεων ή ροπών αντίστοιχα που συμμετέχουν στον υπολογισμό.

Όταν σε μία συγκεκριμένη διατομή του φορέα ασκείται:

α) συγκεντρωμένη δύναμη που είναι κάθετη στη διατομή (αξονικά)

β) -||- -||- που κείται στη διατομή (τμητικά)

γ) -||- ροπή,

τότε στη διατομή αυτή είναι αδύνατος αντίστοιχα ο προσδιορισμός της:

α) αξονικής δύναμης N

β) τέμνουσας -||- Q

γ) καμπτικής ροπής M .

Στην περίπτωση αυτή, ο προσδιορισμός του υπόψη εντατικού μεγέθους γίνεται για την αριστερή ή δεξιά παρειά (πλευρά) της διατομής, οπότε παρουσιάζεται διαφορά στην τιμή τους ίση με την τιμή του συγκεντρωμένου φορτίου στη διατομή.

Το φαινόμενο αυτό, για το αντίστοιχο διάγραμμα (N) ή (Q) ή (M) είναι γνωστό σαν $\alpha \lambda \mu \alpha$.

Από τα παραπάνω, είναι φανερό ότι για τον προσδιορισμό ενός εντατικού μεγέθους σε μία διατομή, θα πρέπει να καθοριστεί με σαφήνεια το πότε μία δύναμη ή ροπή δίνει θετική ή αρνητική τιμή στο προσδιοριζόμενο εντατικό μέγεθος.

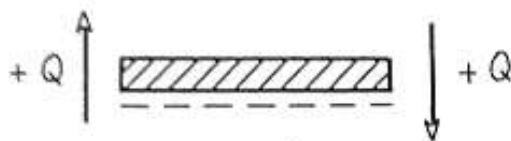
Ανεξάρτητα λοιπόν του αν η οποιαδήποτε δύναμη ή ροπή που προκαλεί σε μία διατομή ένα εντατικό μέγεθος, βρίσκεται αριστερά ή δεξιά της διατομής (ή παρειάς της):



(α)

1. Η αξονική δύναμη N που εμφανίζεται σε μία διατομή είναι θετική, όταν η δύναμη που την προκαλεί τείνει να εφελέκψει την

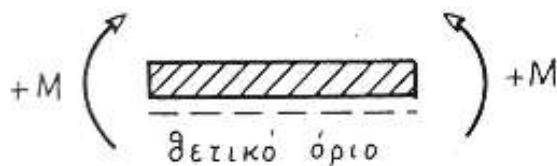
διατομή. Αντίθετα, είναι αρνητική όταν τείνει να την θλίψει.



(β)

2. Η τέμνουσα δύναμη Q που εμφανίζεται σε μία διατομή είναι θετική, όταν η δύναμη που την προκαλεί τείνει να περιστραφεί

δεξιόστροφα ως προς τη διατομή. Αντίθετα, είναι αρνητική όταν τείνει να περιστραφεί αριστερόστροφα (βλ. β).



(γ)

3. Η καμπτική ροπή M που εμφανίζεται σε μία διατομή είναι θετική, όταν η δύναμη ή η ροπή που την προκαλεί τείνει να εφελέκψει την

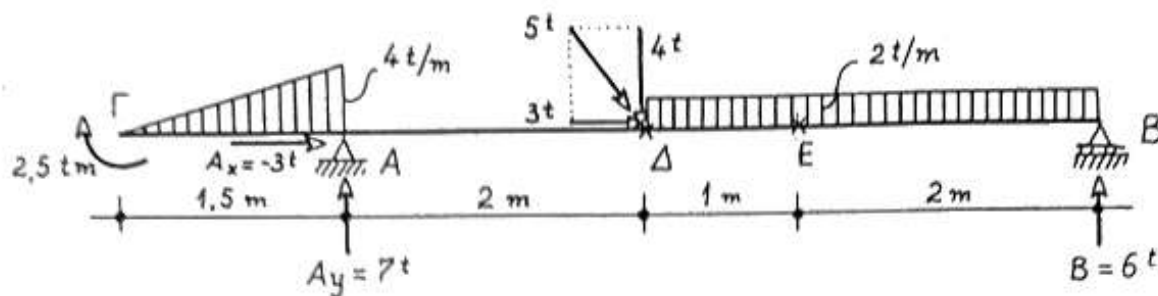
κάτω ίνα του φορέα στη θέση της διατομής. Αντίθετα, είναι αρνητική όταν τείνει να την θλίψει (βλ. γ).

Η κάτω ίνα του φορέα είναι γνωστή και σαν θετικό όριο, και συμβολίζεται με διακεκομμένη γραμμή.

Στην περίπτωση κατακόρυφου τμήματος του φορέα, η προς τα αριστερά ή δεξιά επιλογή του θετικού ορίου είναι αυθαίρετη.

4.7 Παράδειγμα

Στη μονοπροέχουσα δοκό του σχήματος να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις ετήριξες A και B, καθώς και οι τιμές των N, Q, M στις διατομές Γ, Δ και Ε.



Λύση.

Οι αντιδράσεις θα προκύψουν απ' τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας:

$$(\sum M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 2,5 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 0,5 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3,5 - B \cdot 5 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{B = 6 \text{ t}}}$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow Ay - \frac{4 \cdot 1,5}{2} - 4 - 2 \cdot 3 + 6 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Ay = 7 \text{ t}}}$$

$$\sum x^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow Ax + 3 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Ax = -3 \text{ t}}}$$

Το αρνητικό πρόσημο της A_x δηλώνει ότι η βωστική φορά της A_x είναι αντίθετη από κείνη που διαλέξαμε.

Προαιρετικά, μπορούμε να επαληθεύσουμε τις αντιδράσεις A_y και B , ή μόνον την A_y , παίρνοντας τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς τυχόν σημείο του άξονα του φορέα, ή τη ετήριξη B αντίστοιχα.

$$(\sum M)_B^{\uparrow+} = 2,5 - \frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 5,5 + 7 \cdot 5 - 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0!$$

Διατομή Γ (δυνάμεις από αριστερά).

Λόγω της συγκεντρωμένης ροπής στη διατομή, θα διακρίνουμε διαφορετικές τιμές στις παρειές της μόνο για την καμπτική ροπή, οπότε θα έχουμε:

$$N = 0$$

$$Q = 0$$

$$M^{ap} = 0$$

$$M^{dez} = +2,5 \text{ tm.}$$

Διατομή Δ (δυνάμεις από δεξιά).

Λόγω συγκεντρωμένης οριζόντιας και κατακόρυφης δύναμης στη διατομή, θα διακρίνουμε διαφορετικές τιμές στις παρειές της μόνο για την αξονική και την τέμνουσα δύναμη, οπότε θα έχουμε:

$$N^{ap} = +3^t$$

$$N^{dez} = 0$$

$$Q^{ap} = 4 + 2 \cdot 3 - 6 = +4^t$$

$$Q^{dez} = 2 \cdot 3 - 6 = 0$$

$$M = -2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 6 \cdot 3 = +9 \text{ tm}$$

Διατομή Ε (δυνάμεις από δεξιά).

Εδώ δεν γίνεται διάκριση τιμών στις παρειές της διατομής για κανένα εντατικό μέγεθος, γιατί δεν εμφανίζεται συγκεντρωμένη οριζόντια ή κατακόρυφη δύναμη ή ροπή.

Το συνεχές φορτίο στη διατομή, δεν θεωρείται συγκεντρωμένη δύναμη, διότι το εμβαδόν της επιφάνειας φόρτισης που αντιστοιχεί στη διατομή είναι μηδέν. Άρα θα έχουμε:

$$N = 0$$

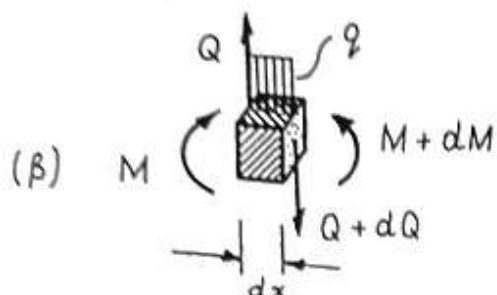
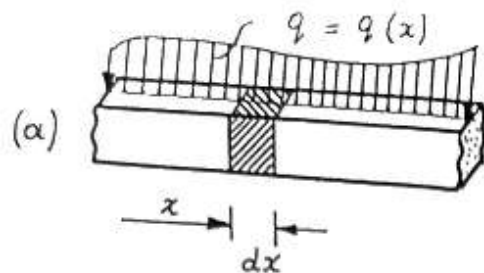
$$Q = 2 \cdot 2 - 6 = -2^t$$

$$M = -2 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 8 \text{ tm.}$$

4.8 Βασικές σχέσεις ανάμεσα στα μεγέθη q , Q ή M .

Θεωρούμε ένα τμήμα μιάς δοκού που φορτίζεται με συνεχή φόρτιση μεταβλητής έντασης $q = q(x)$, βλ. α.

Αν αποκόψουμε απ' τη δοκό ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους dx , με δυο τομές κάθετες στον άξονά της, σε αποστάσεις x και $x+dx$, παρατηρούμε ότι, στο τμήμα dx η ένταση της συνεχούς φόρτισης



είναι σταθερή, με τιμή έστω q .

Επίσης, αν Q και M η τέμνουσα δύναμη και η καμπτική ροπή στην αριστερή διατομή του τμήματος (βχήμα β), τότε στη δεξιά διατομή του, λόγω του ομοιόμορφου φορτίου που μεσολαβεί, τα αντίστοιχα μεγέθη θα εμφανιστούν με αντίθετες φορές, και τιμές έστω $Q + dQ$ και $M + dM$.

Τώρα, στο στοιχειώδες τμήμα που ισορροπεί, η χρησιμοποίηση της συνθήκης μηδενισμού των κατακορύφων δυνάμεων, δίνει:

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow Q - q \cdot dx - Q - dQ = 0, \quad \text{ή} \quad \frac{dQ}{dx} = -q \quad (6)$$

Επίσης, η συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς την αριστερή διατομή του τμήματος, δίνει:

$$(\sum M)^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow M + q \cdot dx \frac{dx}{2} + (Q + dQ) dx - M - dM = 0,$$

απ' την οποία, παραλείποντας τους όρους $q \cdot dx^2/2$ και $dQ \cdot dx$ βαν απειροεστά ανώτερης τάξης, προκύπτει η σχέση:

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (7)$$

Οι σχέσεις (6) και (7) συνδυαζόμενες μεταξύ τους, δηλώνουν ότι:

1. Σε αφόρτιστη περιοχή της δοκού, όπου $q = 0$, η τέμνουσα δύναμη Q , βαν ολοκλήρωμα της q , έχει σταθερή τιμή, ενώ η καμπτική ροπή M , βαν ολοκλήρωμα της Q , μεταβάλλεται γραμμικά.

2. Σε περιοχή της δοκού που φορτίζεται ομοιόμορφα, όπου $q = \alpha$ σταθ., η Q μεταβάλλεται γραμμικά σε συνάρτηση

του x , ενώ η M μεταβάλλεται παραβολικά.

3. Σε περιοχή της δοκού που φορτίζεται γραμμικά (τριγωνική ή τραπεζοειδής φόρτιση), όπου $q = \alpha x + \beta$, η Q μεταβάλλεται παραβολικά σε συνάρτηση του x , ενώ η M μεταβάλλεται κατά καμπύλη 3^{ου} βαθμού κ.ο.κ.

Γενικά, αν η εξωτερική φόρτιση σε τμήμα της δοκού είναι συνάρτηση βαθμού ν , τότε η τέμνουσα δύναμη που αντιστοιχεί στο ίδιο τμήμα είναι βαθμού $\nu+1$, ενώ η καμπτική ροπή $\nu+2$.

4. Η M παίρνει ακρότατη τιμή και μάλλον μέγιστη, όπου μηδενίζεται η Q .

5. Η M σε κάποια διατομή μπορεί να βρεθεί, αν στην τιμή της καμπτικής ροπής άλλης διατομής προσδέσουμε αλγεβρικά το εμβαδόν του διαγράμματος τέμνουσών δυνάμεων που μεσολαβεί ανάμεσα στις δύο διατομές.

Πραγματικά, αν M_0 η καμπτική ροπή στη θέση x_0 και M η αντίστοιχη στη θέση x , η σχέση (7), που γράφεται:

$$dM = Q \cdot dx,$$

μετά από ολοκλήρωση από x_0 έως x , δίνει:

$$\int_{M_0}^M dM = \int_{x_0}^x Q \cdot dx \quad \text{ή} \quad M - M_0 = \int_{x_0}^x Q \cdot dx,$$

$$\text{ή τελικά} \quad M = M_0 + \int_{x_0}^x Q \cdot dx. \quad (8)$$

6. Η κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης του διαγράμματος τέμνουσών δυνάμεων, ισούται με την τιμή της εξωτερικής φόρτισης q που βρίσκεται στην αντίστοιχη προς το σημείο διατομή του φορέα.

Εντελώς ανάλογα, η κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης του διαγράμματος καμπτικών ροπών (M), ισούται με την τιμή της τέμνουσας δύναμης Q που συναντιέται στην αντίστοιχη προς το σημείο διατομή του φορέα.

4.9 Κατασκευή των διαγραμμάτων Q και M .

Η έννοια του διαγράμματος ενός εντατικού μεγέθους, ταυτίζεται με την γραφική παράσταση των τιμών που λαμβάνει το υπόψη εντατικό μέγεθος σε κάθε διατομή του φορέα.

Η γραφική αυτή παράσταση γίνεται δε ανάλογο προς τη μορφή του φορέα σύστημα αξόνων, όπου ο άξονας των τετμημένων είναι ίδιος με τον άξονα του φορέα, ορίζοντας έτσι τις θέσεις των διατομών, ενώ οι τεταγμένες δίνουν τις αντίστοιχες τιμές του εντατικού μεγέθους.

Παραλείποντας το διάγραμμα (N) λόγω της ευκολίας που παρουσιάζει αλλά και της περιορισμένης χρησιμότητάς του, θ' αναφερθούμε στην κατασκευή των διαγραμμάτων (Q) και (M) , η οποία μπορεί να γίνει:

- α) γραφικά με τη βοήθεια του ομοιοπολυγώνου και
- β) αναλυτικά με τη βοήθεια εξισώσεων.

Η πρώτη μέθοδος συναντιέται συνήθως μόνον στις περιπτώσεις που τα φορτία της δοκού είναι συγκεντρωμένα, χωρίς να εμφανίζεται συγκεντρωμένη ροπή. Κι αυτό γιατί η ύπαρξη συνεχούς φορτίου απαιτεί το χωρισμό του σε μικρότερα τμήματα, που θ' αντικατασταθούν με συγκεντρωμένες δυνάμεις, των οποίων ο αριθμός είναι ανάλογος με την ακρίβεια που επιδιώκουμε.

Η δεύτερη μέθοδος, που κύρια θα μας απασχολήσει παρακάτω, καλύπτει κάθε μορφή ισοστατικής δοκού με οποιαδήποτε φόρτιση.

Τα βήματα που ακολουθούμε για την κατασκευή των διαγραμμάτων Q και M με τη μέθοδο αυτή, είναι:

1. Χωρίζουμε τη δοκό σε τμήματα, με κριτήρια την εμφάνιση:
 - συγκεντρωμένης κατακόρυφης δύναμης (για το διάγραμμα Q), ή
 - συγκεντρωμένης ροπής (για το διάγραμμα M),
 - αρχής ή τέλους ή αλματος στη συνεχή φόρτιση.

Μ' άλλα λόγια, ο νόμος που εκφράζει τη μεταβολή της εξωτερικής φόρτισης, να είναι ο ίδιος σε όλο το τμήμα.

2. Ξεκινώντας απ' το πρώτο τμήμα, αποφασίζουμε το από πού θα λάβουμε τις δυνάμεις (αριστερά ή δεξιά της τυχαίας διατομής) που επηρεάζουν το εντατικό μέγεθος που εξετάζουμε, διαλέγοντας για διευκόλυνση το μικρότερο αριθμό δυνάμεων.

3. Ορίζουμε σε παρένθεση τα όρια α και δ , μέσα στα οποία μπορεί να βρίσκεται η τυχαία διατομή του τμήματος, εαν αποστάσεις των άκρων του από το αριστερό ή δεξιό τέρμα της δοκού που αποφασίσαμε να πάρουμε τις δυνάμεις (βήμα 2).

Αν x η απόσταση της τυχαίας διατομής απ' το τέρμα, θα πρέπει να είναι $(\alpha < x < \delta)$. Εδώ σημειώνονται και τυχόν ιδιότητες του x με τις αποστάσεις α ή δ , που εξαρτώνται από την απουσία συγκεντρωμένης κατακόρυφης δύναμης (για το διάγραμμα Q) ή συγκεντρωμένης ροπής (για το διάγραμμα M).

Στην περίπτωση εκλογής δεξιού τέρματος (βήμα 2), γράφουμε δεξιά της παρένθεσης "από δεξ."

4. Σχηματίζουμε τώρα, συνάρτησει του x , την εξίσωση που εκφράζει την μεταβολή του εντατικού μεγέθους, παίρνοντας απ' τη διατομή και πέρα μέχρι το αριστερό ή δεξιό τέρμα τις δοκού, όσες τις:

- κατακόρυφες δυνάμεις και αντιδράσεις (για το διάγραμμα Q)
- συγκεντρωμένες ροπές και ροπές των δυνάμεων και αντιδράσεων ως προς την τυχαία διατομή (για το διάγρ. M).

5. Ελέγχουμε το βαθμό της εξίσωσης που προέκυψε για το εντατικό μέγεθος, ανάλογα με τη μορφή της εξωτερικής φόρτισης στο τμήμα (σχέσεις 6 και 7, βελ. 58).

6. Θέτοντας ήδη στην εξίσωση, όπου x , τα όρια α και δ , προωδιορίζουμε τις τιμές του μεγέθους στα άκρα του τμήματος, τις οποίες τοποθετούμε με κατάλληλη κλίμακα στις αντίστοιχες θέσεις

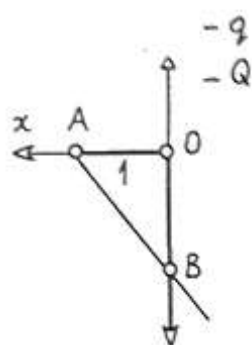
του άξονα των τετμημένων, που σχεδιάσαμε ήδη για την κατασκευή του διαγράμματος.

Αν η γραμμή που εκφράζει τη μεταβολή του μεγέθους είναι ευθεία, ενώνουμε τις τεταγμένες των άκρων της.

Αν όμως είναι καμπύλη, τότε,

7. Κατασκευάζουμε τις εφαπτόμενες της καμπύλης (θεωρητικό 6, βελ. 59) στα χαρακτηριστικά σημεία που προσδιορίσαμε τις τεταγμένες τους, σύμφωνα με τους παρακάτω τρόπους:

α) Σχεδιάζουμε το διπλανό σύστημα αξόνων, που είναι το γνωστό Καρτεσιανό, αλλά με αντίθετες τις φορές των αξόνων.



$$y \equiv \begin{cases} +q & \text{για } (Q) \\ +Q & \text{για } (M) \end{cases}$$

Στον άξονα Ox παίρνουμε τμήμα OA ίσο με τη μονάδα μήκους του άξονα των τετμημένων του διαγράμματος που σχεδιάζουμε (δυννηθέτατα είναι ίσος με τον άξονα της δοκού).

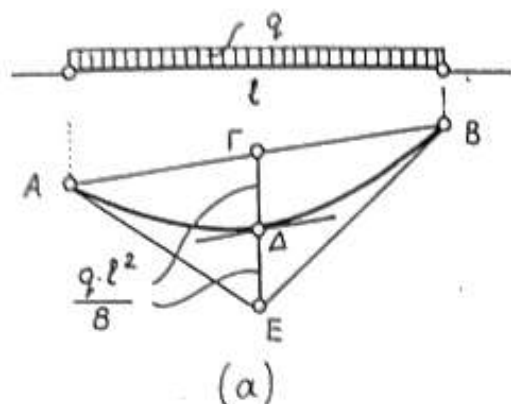
Στον άξονα Oy , θέτουμε με την κλίμακα τιμών του διαγράμματος που κατασκευάζουμε, την τιμή B που είναι τιμή:

- της εξωτερικής φόρτισης q που αντιστοιχεί στην ίδια τετμημένη του χαρακτηριστικού σημείου (για διάγραμμα Q)
 - της τέμνουσας δύναμης Q που αντιστοιχεί στην ίδια τετμημένη του χαρακτηριστικού σημείου (για διάγραμμα M).
- Η AB είναι τότε η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο χαρακτηριστικό σημείο του διαγράμματος.

Είναι ευκολονόητο, ότι στις διατομές όπου η q ή η Q είναι μηδέν, η εφαπτομένη του διαγράμματος (Q) ή (M) αντίστοιχα, είναι οριζόντια.

β) Για την κατασκευή του παραβολικού τμήματος που περνάει από δύο σημεία A, B του διαγράμματος (M), όταν είναι γνωστό ότι το τμήμα l του φορέα που είναι ανάμεσα στα ση-

μεία αυτά φορτίζεται με ομοιόμορφο φορτίο q (βλ. α), τότε



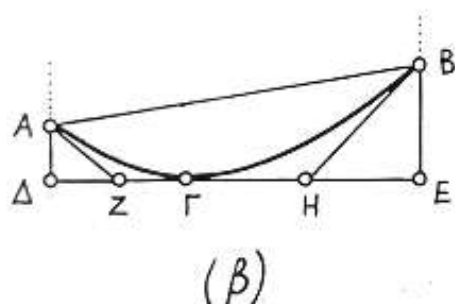
Από το μέσο Γ της AB φέρνουμε κατακόρυφα τμήματα

$$\Gamma\Delta = \Delta E = \frac{q l^2}{8}.$$

Τότε η παραβολή περνάει απ' το σημείο Δ και εφάπτεται των ευθειών AE και BE στα σημεία

A και B αντίστοιχα. Επίσης εφάπτεται στο Δ της ευθείας που είναι παράλληλη προς την AB και περνάει απ' το Δ .

γ) Αν είναι γνωστό ότι η παραπάνω παραβολή περνάει απ' τα σημεία A και B και ότι το Γ είναι ακρότατο της παραβολής, τότε η κατασκευή των εφαπτομένων στα A και B ακολουθεί τον παρακάτω τρόπο, (βλ. β).



Απ' το Γ που είναι ακρότατο, φέρνουμε οριζόντια ευθεία, η οποία τέμνεται απ' τις κατακόρυφες που περνούν απ' τα A και B , στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

Αν Z και H είναι αντίστοιχα τα μέσα των οριζοντιών τμημάτων $\Delta\Gamma$ και ΓE , τότε οι ευθείες AZ και BH είναι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A και B αντίστοιχα.

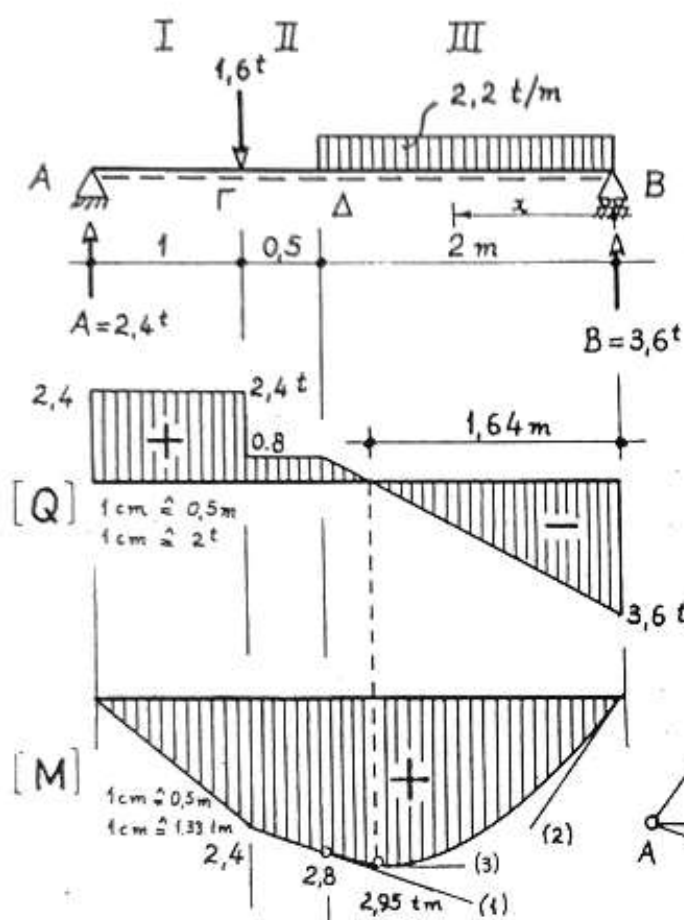
Στα παραδείγματα κατασκευής των διαγραμμάτων Q και M που ακολουθούν γίνεται αυστηρή τήρηση των παραπάνω βημάτων.

Έτσι θα αποφεύγονται επαναλαμβανόμενες επεξηγήσεις ή διευκρινήσεις στις επί μέρους εξιδιώσεις ή κατασκευές.

Διευκρινήσεις θα δίνονται μόνον όταν, λόγω ιδιομορφίας κρίνεται απαραίτητο, έτσι ώστε να βοηθήσουν αποτελεσματικά στην κατανόηση των διαγραμμάτων απ' τους σπουδαστές.

4.10 Παραδείγματα.

1. Της αμφιέρειστης δοκού που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων (Q) και καμπτικών ροπών (M).



Λύση.

Αντιδράσεις.

$$(\sum M)_A^+ = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,6 \cdot 1 + 2,2 \cdot 2 \cdot 2,5 - 3,5 \cdot B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{B = 3,6 t.}$$

$$\sum y^+ = 0 \Rightarrow A - 1,6 - 2,2 \cdot 2 +$$

$$+ 3,6 = 0 \Rightarrow \underline{A = 2,4 t.}$$

Επαλήθευση αντιδράσεων:

$$(\sum M)_A^+ = 2,4 \cdot 1,5 - 1,6 \cdot 0,5$$

$$+ 2,2 \cdot 2 \cdot 1 - 3,6 \cdot 2 = 0!$$

Διάγραμμα Q

Τμήμα I ($0 < x < 1$)

$$Q_I = 2,4 t \text{ σταθ.}$$

Τμήμα II ($1 < x \leq 1,5$)

$$Q_{II} = 2,4 - 1,6 = 0,8 t \text{ σταθ.}$$

Τμήμα III ($0 < x \leq 2$) από δεξ.

$$Q_{III} = 2,2x - 3,6$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_B^{ap} = -3,6 t$$

$$x = 2 \Rightarrow Q_\Delta = 0,8 t$$

δενισμού.

Μετά την παρατήρηση αλλαγής προσημίου, βρίσκουμε το σημείο μη-

Είναι $Q_{III} = 0$, για $2,2x - 3,6 = 0 \Rightarrow x = 1,64 \text{ m}$.

Διάγραμμα M

Τμήμα I ($0 \leq x \leq 1$)

$$M_I = 2,4x.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_A = 0,$$

$$x = 1 \Rightarrow M_B = 2,4 \text{ tm}.$$

Τμήμα II ($1 \leq x \leq 1,5$)

$$M_{II} = 2,4x - 1,6(x-1).$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow M_B = 2,4 \text{ tm},$$

$$x = 1,5 \Rightarrow M_D = 2,8 \text{ tm}.$$

Τμήμα III ($0 \leq x \leq 2$) από δεξ.

$$M_{III} = 3,6x - 2,2x \frac{x}{2} = 3,6x - 1,1x^2.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_E = 0,$$

$$x = 2 \Rightarrow M_A = 2,8 \text{ tm},$$

$$\text{για } x = 1,64 \text{ m} \Rightarrow M_{III \max} = 2,95 \text{ tm}.$$

Παρατήρηση :

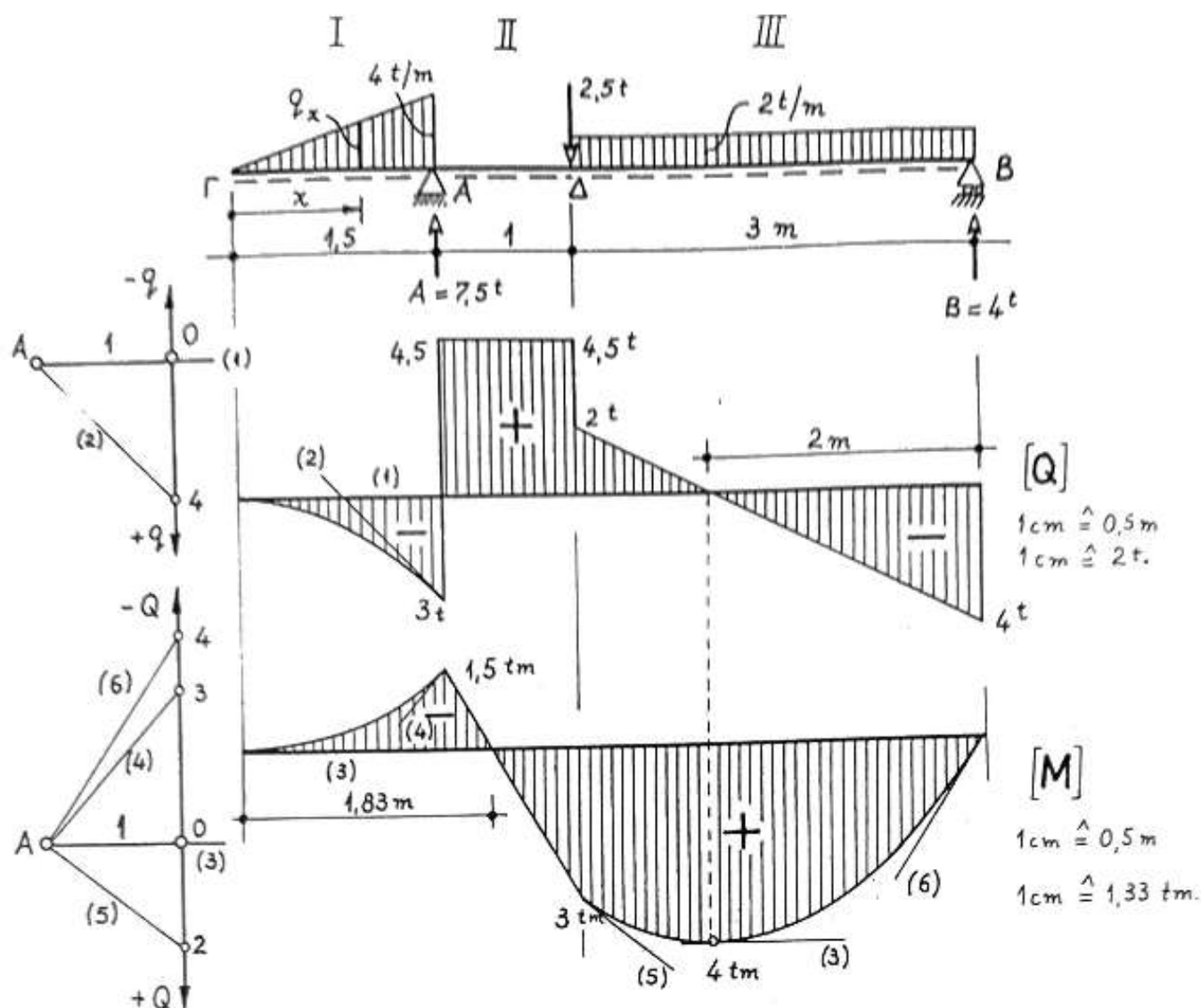
Η ευθεία του διαγράμματος (M) της περιοχής II είναι ταυτόχρονα και εφαπτομένη (1) στην αρχή του καμπύλου τμήματος της περιοχής III.

[2.] Της μονοπροέχουσας δοκού που εικονίζεται στο σχήμα της επόμενης σελίδας να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων (Q) και καμπτικών ροπών (M), με τις απαραίτητες εξισώσεις και κατασκευές.

Λύση.

Αντιδράσεις

$$(\Sigma M)_A^+ = 0 \Rightarrow -\frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 0,5 + 2,5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2,5 - B \cdot 4 = 0 \Rightarrow \underline{B = 4 \text{ t}}$$



$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - \frac{4 \cdot 1,5}{2} - 2,5 - 2 \cdot 3 + 4 = 0 \Rightarrow \underline{A = 7,5 \text{ t}}$$

$$\text{Επαλήθευση: } (\sum M)_A^{\uparrow+} = -\frac{4 \cdot 1,5}{2} \cdot 1,5 + 7,5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 4 \cdot 3 = 0!$$

Διάγραμμα Q

Τμήμα I ($0 \leq x < 1,5$)

Αν q_x είναι η ένταση της τριγωνικής φόρτισης σε τυ-
κούθα διατομή του τμήματος I που απέχει απόσταση x από
το αριστερό άκρο της δοκού, απ' τα όμοια τρίγωνα προκύπτει:

$$\frac{q_x}{4} = \frac{x}{1,5} \Rightarrow q_x = \frac{4}{1,5} x.$$

$$\text{Άρα } Q_I = -\frac{q_x \cdot x}{2} = -\frac{4}{1,5} x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{2}{1,5} x^2$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_r = 0,$$

$$x = 1,5 \Rightarrow Q_A^{ap} = -3t.$$

Τμήμα II ($1,5 < x < 2,5$)

$$Q_{II} = -\frac{4 \cdot 1,5}{2} + 7,5 = 4,5t \text{ σταθ.}$$

Τμήμα III ($0 < x < 3$) από δεξ.

$$Q_{III} = 2x - 4.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_B^{ap} = -4t,$$

$$x = 3 \Rightarrow Q_A^{di} = +2t.$$

Είναι $Q_{III} = 0$, όταν $2x - 4 = 0$ ή $x = 2m$.

Παρατήρηση:

Η τιμή της συγκεντρωμένης δύναμης $2,5t$, αν και δεν ελήφθη υπόψη, εμφανίστηκε στο διάγραμμα σαν άθροισμα, λόγω της $\Sigma y^{\uparrow\downarrow} = 0$.

Διάγραμμα M

Τμήμα I ($0 \leq x \leq 1,5$)

$$M_I = -\frac{q_x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{4}{1,5} x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{2}{4,5} x^3.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_r = 0,$$

$$x = 1,5 \Rightarrow M_A = -1,5tm.$$

Τμήμα II ($1,5 \leq x \leq 2,5$)

$$M_{II} = -\frac{4 \cdot 1,5}{2} (x-1) + 7,5(x-1,5).$$

$$\text{Για } x = 1,5 \Rightarrow M_A = -1,5tm,$$

$$x = 2,5 \Rightarrow M_D = +3tm.$$

Είναι $M_{II} = 0$, όταν $-3x + 3 + 7,5x - 11,25 = 0$ ή $x = 1,83m$.

Σημείωση:

Ειδικά εδώ, λόγω γραμμικότητας της μεταβολής της M , το σημείο μηδενισμού μπορεί να βρεθεί και απ' τα όμοια τρίγωνα του διαγράμ.

Τμήμα III ($0 \leq x \leq 3$) από δεξ.

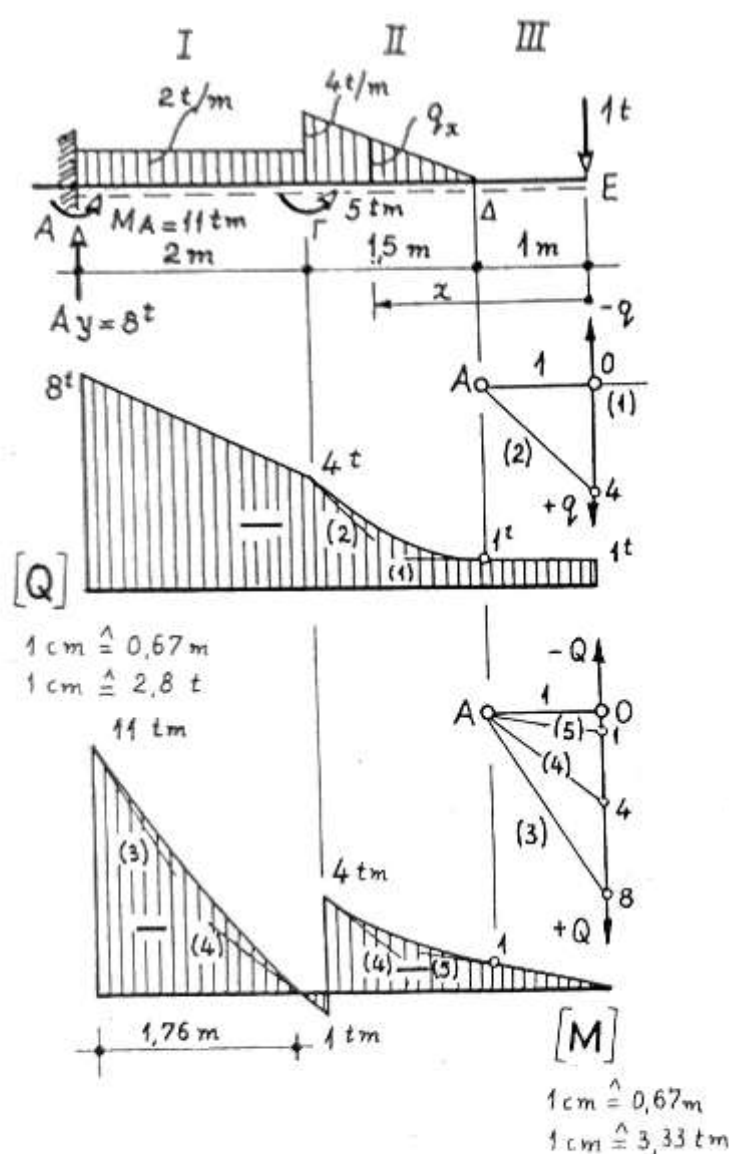
$$M_{III} = 4x - 2x \frac{x}{2} = 4x - x^2.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_B = 0,$$

$$\text{Για } x = 3 \Rightarrow M_{\Delta} = 3 \text{ tm}$$

$$\text{για } x = 2 \text{ m είναι } M_{III \max} = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4 \text{ tm.}$$

3. Του προβόλου που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις και τα διαγράμματα τα τεμνουσών δυνάμεων (Q) και καμπτικών ροπών (M).



Λύση.

Αντιδράσεις

$$(\sum M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -M_A + 2 \cdot 2 \cdot 1 +$$

$$+ \frac{4 \cdot 1.5}{2} \cdot 2.5 + 1 \cdot 4.5 - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{M_A = 4 + 7.5 + 4.5 - 5 = 11 \text{ tm}}$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A_y - 2 \cdot 2 - \frac{4 \cdot 1.5}{2} -$$

$$- 1 = 0 \Rightarrow \underline{A_y = 4 + 3 + 1 = 8 \text{ t}}$$

$$\text{Επαλήθευση: } (\sum M)_E^{\uparrow+} = -11 +$$

$$+ 8 \cdot 4.5 - 2 \cdot 2 \cdot 3.5 - 5 - \frac{4 \cdot 1.5}{2} \cdot 2 = 0!$$

Διάγραμμα Q

Τμήμα I (0 < x ≤ 2)

$$Q_I = 8 - 2x.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_A^{\text{δεξ}} = 8 \text{ t,}$$

$$x = 2 \Rightarrow Q_I = 4 \text{ t.}$$

Τμήμα II (1 ≤ x ≤ 2.5) από δεξ.

$$\text{Είναι: } \frac{q_x}{4} = \frac{x-1}{1.5} \Rightarrow q_x = \frac{4}{1.5} (x-1)$$

$$\text{Άρα: } Q_{II} = 1 + q_x \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{4}{1.5} (x-1) \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{2}{1.5} (x-1)^2.$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow Q_{\Delta} = 1 \text{ t,}$$

$$x = 2.5 \Rightarrow Q_I = 4 \text{ t (Επαλήθ. της } Q_I \text{ από τμ. I).}$$

Τμήμα III ($0 < x \leq 1$) από δεξ.

$$Q_{III} = 1 \text{ t σταθ.}$$

Διάγραμμα M

Τμήμα I ($0 < x < 2$)

$$M_I = -11 + 8x - x^2.$$

$$\text{Γιά } x=0 \Rightarrow M_A^{\text{δεξ}} = -11 \text{ tm},$$

$$x=2 \Rightarrow M_{\Gamma}^{\text{αρ}} = +1 \text{ tm}.$$

Είναι $M_I = 0$, όταν $x^2 - 8x + 11 = 0$. Οι τις ρίζες της,

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 11 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 4,47}{2} < \begin{matrix} 6,24 \\ 1,76 \end{matrix}$$

η $x_1 = 6,24 \text{ m}$ απορρίπτεται γιατί είναι έξω απ' τα όρια του x στο τμ. I.

Τμήμα II ($1 \leq x < 2,5$) από δεξ.

$$M_{II} = -1 \cdot x - q_x \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-1}{3} = -x - \frac{4}{1,5} (x-1) \frac{(x-1)^2}{6} = -x - \frac{2}{4,5} (x-1)^3.$$

$$\text{Γιά } x=1 \Rightarrow M_{\Delta} = -1 \text{ tm},$$

$$x=2,5 \Rightarrow M_{\Gamma}^{\text{δεξ}} = -4 \text{ tm}.$$

Παρατήρηση:

Αντίστοιχα προς την παρατήρηση της βελ. 67, η τιμή της συγκεντρωμένης ροής στο Δ $M=5 \text{ tm}$, αν και δεν ελήφθη υπόψη, εμφανίστηκε στο διάγραμμα σαν άλμα, λόγω ισχύος της $(\Sigma M)^+ = 0$.

Φυσικά, τόσο στην προηγούμενη παρατήρηση όσο και εδώ, είναι προφανές ότι η διαφορά τιμών του εντατικού μεγέθους που προκύπτουν για τη δεξιά και την αριστερή παρεία του άλματος είναι ίση με την τιμή του συγκεντρωμένου μεγέθους.

Τμήμα III ($0 \leq x \leq 1$) από δεξ.

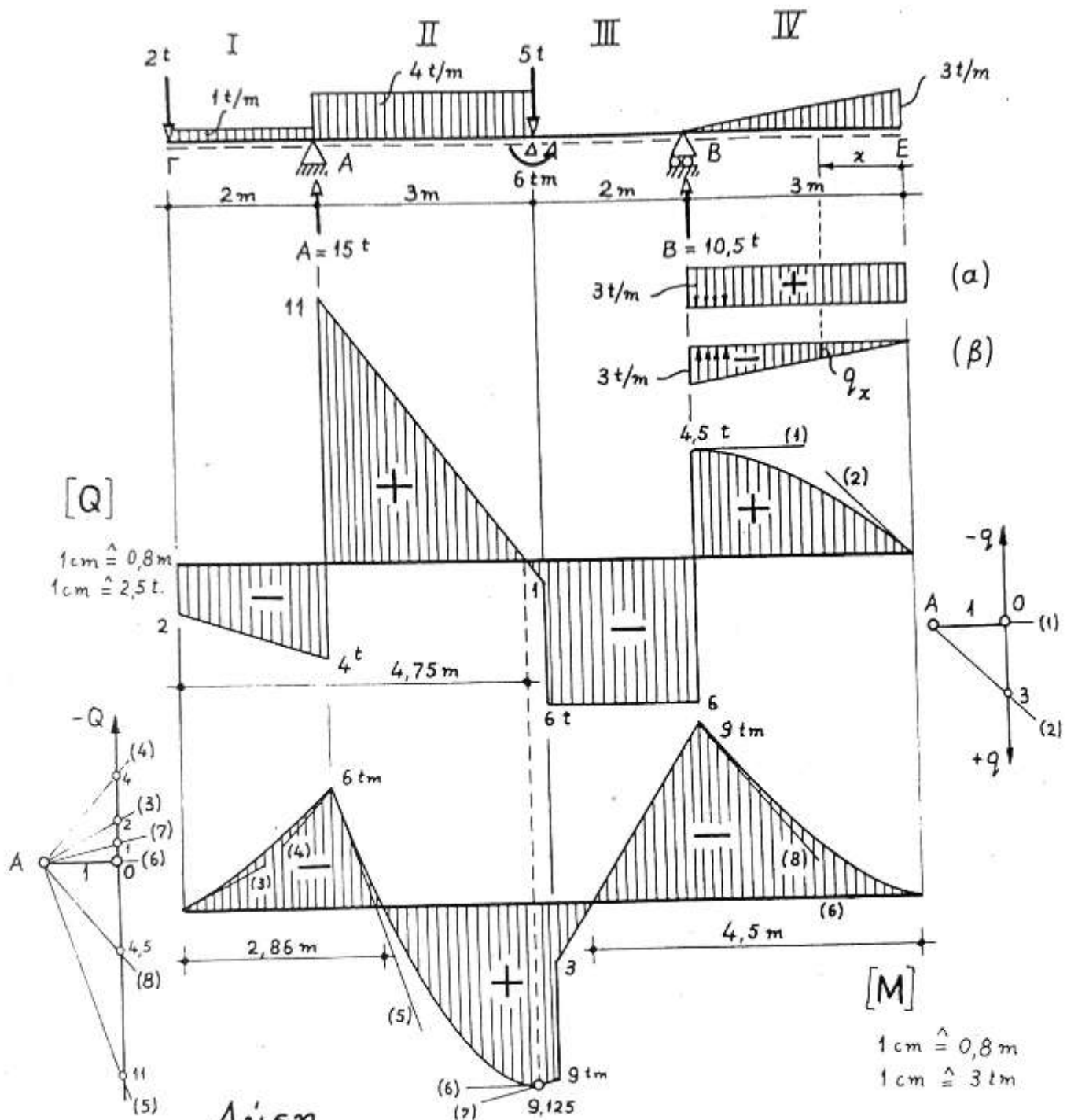
$$M_{III} = -1 \cdot x.$$

$$\text{Γιά } x=0 \Rightarrow M_E = 0,$$

$$x=1 \Rightarrow M_{\Delta} = -1 \text{ tm}.$$

Σημείωση: Η ευθεία του τμήματος III είναι και εφαπτόμενη (5) στην αρχή του καμπύλου τμήματος της περιοχής II. (αντίστοιχ. παρατ. βελ 65).

4. Της αμφιπροέχουσας δοκού που εικονίζεται παρακάτω, να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τέμνουσων δυνάμεων (Q) και καμπτικών ροπών (M).



Λύση

Αντιδράσεις

$$(\Sigma M)_A^{++} = 0 \Rightarrow -2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 + 5 \cdot 3 - 6 - B \cdot 5 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 7 = 0 \Rightarrow \underline{B = 10,5t}$$

$$\Sigma y^{++} = 0 \Rightarrow A - 2 - 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 5 + 10,5 - \frac{3 \cdot 3}{2} = 0 \Rightarrow \underline{A = 15t}$$

$$\text{Επαλήθευση: } (\Sigma M)_\Delta^{++} = -2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 4 + 15 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 6 - 10,5 \cdot 2 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 4 = 0!$$

Διάγραμμα QΤμήμα I ($0 < x < 2$)

$$Q_I = -2 - 1 \cdot x.$$

$$\text{Για } x=0 \Rightarrow Q_I^{\text{δελ}} = -2t,$$

$$x=2 \Rightarrow Q_A^{\text{αρ}} = -4t.$$

Τμήμα II ($2 < x < 5$)

$$Q_{II} = -2 - 1 \cdot 2 + 15 - 4(x-2) = 11 - 4(x-2).$$

$$\text{Για } x=2 \Rightarrow Q_A^{\text{δελ}} = 11t,$$

$$x=5 \Rightarrow Q_D^{\text{αρ}} = -1t.$$

Είναι $Q_{II} = 0$, για $11 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow 4x = 19$ ή $x = 4,75 \text{ m}$.

Τμήμα III ($3 < x < 5$) από δεξ.

$$Q_{III} = \frac{3 \cdot 3}{2} - 10,5 = -6t \text{ σταθ.}$$

Τμήμα IV ($0 \leq x < 3$) από δεξ.

Επειδή προτίθεται να λάβω τις δυνάμεις από δεξιά, όπου η φόρτιση θα είναι τραπεζοειδής, θεωρώ ότι η δοθείσα τριγωνική φόρτιση είναι συνισταμένη μιάς ομοιόμορφης, έντασης $3t/m$ με φορά προς τα κάτω, και μιάς τριγωνικής, μέγιστης έντασης $3t/m$ από αριστερά, με φορά προς τα πάνω (βλ. σχ. α, β).

Αν τώρα q_x είναι η ένταση της τριγωνικής συνιστώσας (βλ. β) στην τυχαία διατομή που απέχει x απ' το E, τότε:

$$\frac{q_x}{3} = \frac{x}{3} \Rightarrow q_x = x.$$

$$\text{Άρα: } Q_{IV} = 3x - \frac{q_x \cdot x}{2} = 3x - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Για } x=0 \Rightarrow Q_E = 0,$$

$$x=3 \Rightarrow Q_B^{\text{δελ}} = 4,5t.$$

Διάγραμμα MΤμήμα I ($0 \leq x \leq 2$)

$$M_I = -2x - 1 \cdot x \frac{x}{2} = -2x - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_r = 0,$$

$$x = 2 \Rightarrow M_A = -6 \text{ tm.}$$

Τμήμα II ($2 \leq x < 5$)

$$M_{II} = -2x - 1.2(x-1) + 15(x-2) - \frac{4(x-2)^2}{2}$$

$$\text{Για } x = 2 \Rightarrow M_A = -6 \text{ tm,}$$

$$x = 5 \Rightarrow M_{\Delta}^{ap} = 9 \text{ tm.}$$

$$\text{για } x = 4,75 \text{ m, είναι } M_{II \max} = 9,125 \text{ tm.}$$

$$\text{Είναι } M_{II} = 0, \text{ όταν } -2x - 2x + 2 + 15x - 30 - 2x^2 + 8x - 8 = 0,$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 19x - 38 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 9,5x + 19 = 0.$$

$$\text{Αν τις ρίζες της: } x_{1,2} = \frac{9,5 \pm \sqrt{90,25 - 4 \cdot 19}}{2} = \frac{9,5 \pm 3,77}{2} \begin{cases} 6,64 \\ 2,86 \end{cases}$$

η $x_1 = 6,64 \text{ m}$ απορρίπτεται γιατί είναι εκτός των ορίων του τμήματος.

Τμήμα III ($3 \leq x < 5$) από δεξ.

$$M_{III} = -\frac{3 \cdot 3}{2}(x-1) + 10,5(x-3).$$

$$\text{Για } x = 3 \Rightarrow M_B = -9 \text{ tm,}$$

$$x = 5 \Rightarrow M_{\Delta}^{δξ} = 3 \text{ tm.}$$

$$\text{Είναι } M_{III} = 0, \text{ για } -4,5x + 4,5 + 10,5x - 31,5 = 0, \quad \text{ή} \quad x = 4,5 \text{ m.}$$

Τμήμα IV ($0 \leq x \leq 3$) από δεξ.

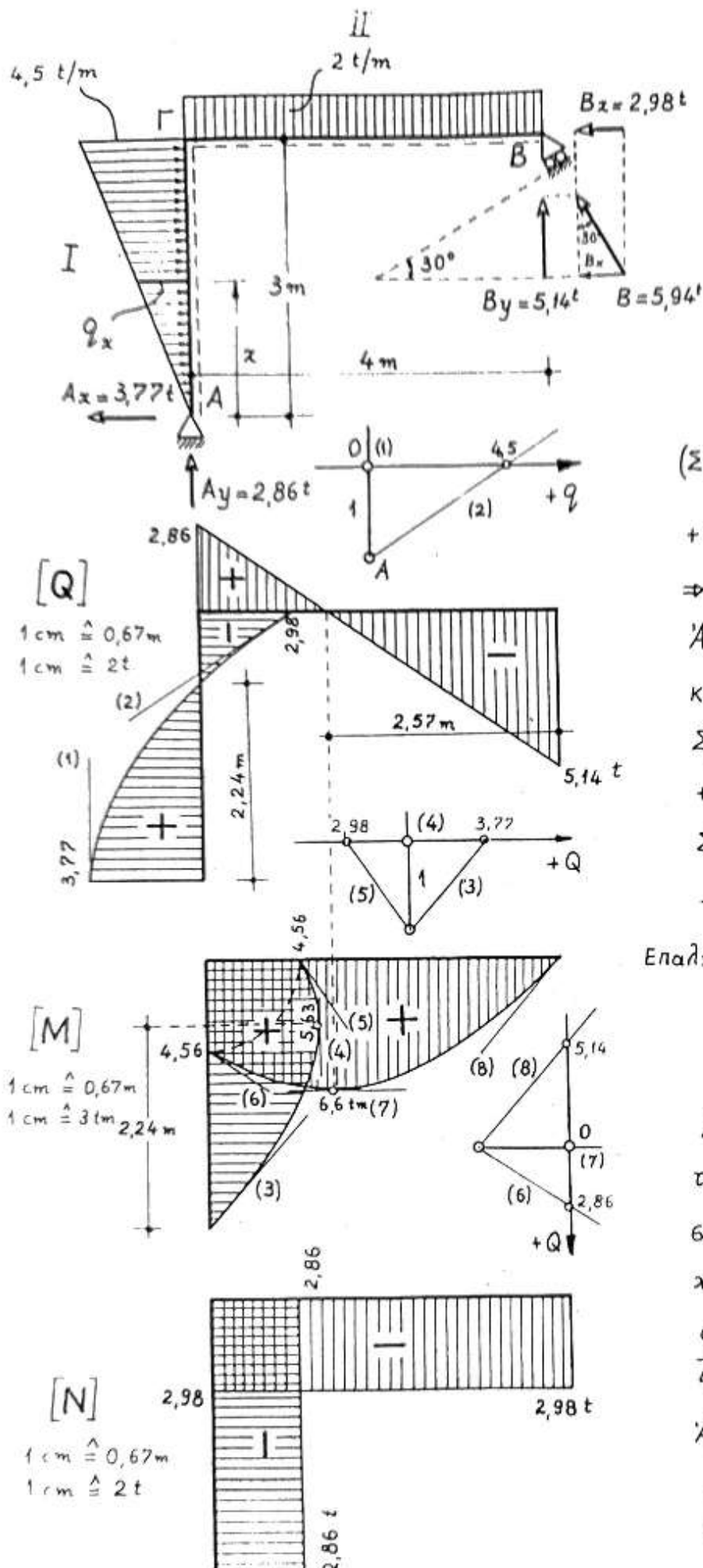
$$M_{IV} = -3 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + q_x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_E = 0,$$

$$x = 3 \Rightarrow M_B = -9 \text{ tm.}$$

5. Του η λ α ι β ι ω τ ο ύ φορέα που εικονίζεται στο σχήμα της επόμενης σελίδας, να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις βελτίξεις του Α και Β και να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων (Q), καμπτικών ροπών (M) και αξονικών δυνάμεων (N).

Λύση.



Αντιδράσεις

Αν B_x και B_y είναι η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της B , θα είναι:

$$\frac{B_x}{B_y} = \tan 30^\circ \Rightarrow$$

$$B_x = 0,58 B_y$$

$$(\sum M)_A^+ = 0 \Rightarrow \frac{4,5 \cdot 3}{2} \cdot 2 +$$

$$+ 2 \cdot 4 \cdot 2 - B_y \cdot 4 - 0,58 B_y \cdot 3 = 0.$$

$$\Rightarrow 5,74 B_y = 29,5 \Rightarrow B_y = 5,14 t.$$

$$\text{Άρα: } B_x = 2,98 t$$

$$\text{και: } B = 5,94 t.$$

$$\sum y^+ = 0 \Rightarrow A_y - 2 \cdot 4 +$$

$$+ 5,14 = 0 \Rightarrow A_y = 2,86 t.$$

$$\sum x^+ = 0 \Rightarrow -A_x + \frac{4,5 \cdot 3}{2} -$$

$$- 2,98 = 0 \Rightarrow A_x = 3,77 t.$$

$$\text{Επαλ: } (\sum M)_B^+ = 3,77 \cdot 3 - \frac{4,5 \cdot 3}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 5,14 \cdot 4 = 0!$$

Διάγραμμα Q

Τμήμα I ($0 < x < 3$)

Αν q_x είναι η ένταση της τριγωνικής φόρτισης σε διατομή που απέχει x από το A, θα είναι:

$$\frac{q_x}{4,5} = \frac{x}{3} \Rightarrow q_x = 1,5 x.$$

$$\text{Άρα: } Q_I = 3,77 - \frac{q_x \cdot x}{2} = 3,77 - \frac{1,5 x^2}{2}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_A^{d1} = 3,77 t$$

$$\text{για } x = 3 \Rightarrow Q_r^{ap} = -2,98 \text{ t.}$$

$$\text{Είναι } Q_I = 0, \text{ για } x^2 = 3,77 \cdot 2 / 1,5 \text{ ή } x = \pm 2,24 \text{ m.}$$

Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται γιατί είναι έξω απ' τα όρια του τμήματος.

Τμήμα II ($0 < x < 4$) από δεξ

$$Q_{II} = -5,14 + 2x.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow Q_B^{ap} = -5,14 \text{ t,}$$

$$x = 4 \Rightarrow Q_r^{del} = 2,86 \text{ t.}$$

$$\text{Είναι } Q_{II} = 0, \text{ όταν } 2x = 5,14 \text{ ή } x = 2,57 \text{ m.}$$

Διάγραμμα M

Διαλέγω το δετικό όριο του φορέα (κάτω ίνα) εσωτερικά του πλαισίου, ώστε η ροπή στο Γ, που προέρχεται είτε απ' το οριζόντιο είτε απ' το κατακόρυφο βέλος, να έχει, εκτός από την ίδια τιμή και το ίδιο πρόσημο.

Με τον τρόπο αυτό, διατηρείται ομοιομορφία και στη σύμπτωση των διαγραμμάτων (Q) και (N).

Τμήμα I ($0 \leq x \leq 3$)

$$M_I = 3,77x - \frac{q_x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 3,77x - \frac{x^3}{4}.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_A = 0,$$

$$x = 3 \Rightarrow M_r = 4,56 \text{ tm.}$$

$$\text{για } x = 2,24 \text{ m, είναι } M_{I \max} = 5,63 \text{ tm.}$$

Τμήμα II ($0 \leq x \leq 4$) από δεξ.

$$M_{II} = 5,14x - 2x \cdot \frac{x}{2} = 5,14x - x^2.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow M_B = 0,$$

$$x = 4 \Rightarrow M_r = 4,56 \text{ tm.}$$

$$\text{για } x = 2,57 \text{ m, είναι } M_{II \max} = 6,6 \text{ tm.}$$

Διάγραμμα N

Εδώ ο χωρισμός του φορέα σε τμήματα, γίνεται σχεδόν αποκλειστικά με μοναδικό κριτήριο την ύπαρξη ευκεντρωμένων

δυνάμεων που δρουν αξονικά στο φορέα, δηλαδή δυνάμεων που είναι παράλληλες στον άξονά του.

Σπανιώτατα είναι δυνατόν να εμφανιστεί συνεχές φορτίο που να δρά κατά την έννοια του άξονα του φορέα, οπότε η περιπτώσή του αντιμετωπίζεται όπως ακριβώς και στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων.

Με το παραπάνω κριτήριο, ο χωρισμός του φορέα στα τμήματα I και II που έγινε για τα διαγράμματα (Q) και (M), ισχύει και για το διάγραμμα αξονικών δυνάμεων (N).

Τμήμα I ($0 < x < 3$)

$$N_I = -A_y = -2,86 \text{ t σταθ.}$$

Τμήμα II ($0 < x < 4$) από δεξ

$$N_{II} = -Bx = -2,98 \text{ t σταθ.}$$

4.11 Γενικές παρατηρήσεις

1. Στο διάγραμμα (M), όταν από αφόρτιστη περιοχή του φορέα μεταβαίνουμε σε συνεχώς φορτισμένη χωρίς την παρεμβολή συγκεντρωμένου φορτίου, τότε η ευθεία του διαγράμματος που αντιστοιχεί στην αφόρτιστη περιοχή, είναι μαζί και εφαπτομένη του καμπύλου τμήματος που αντιστοιχεί στο φορτισμένο τμήμα του φορέα (βλέπε διάγραμμα M_{II-III} βελ. 64 και M_{II-III} βελ. 68).

2. Η ύπαρξη συγκεντρωμένης κατακόρυφης δύναμης σε ακραία ή ενδιάμεση θέση συνεχούς φορτίου, αν και δεν διασπά την τιμή της καμπτικής ροπής M στη θέση της δύναμης, δημιουργεί στο διάγραμμα γωνία υπό μορφήν ακίδας που οφείλεται στις δύο εφαπτόμενες, εκατέρωθεν της διατομής όπου δρά η δύναμη.

3. Στο διάγραμμα (Q), όταν από τριγωνική φόρτιση μεταβαίνουμε σε αφόρτιστο τμήμα του φορέα που συνορεύει με την κορυφή της τριγωνικής χωρίς τη μεσολάβηση κατακόρυφης δύναμης,

τότε η οριζόντια ευθεία του διαγράμματος που αντιστοιχεί στο αφόρτιστο τμήμα είναι μαζί και εφαπτομένη του παραβολικού τμήματος της φορτισμένης περιοχής. (βλέπε διάγρ. ΑΠ-III σελ. 104).

4. Όταν στο όριο μεταξύ δύο τμημάτων δεν εμφανίζεται συγκεντρωμένη κατακόρυφη δύναμη ή ροπή, τότε η τιμή της Q ή M αντίστοιχα που προκύπτει απ' τη χρησιμοποίηση των εξισώσεων στα γειτονικά τμήματα είναι πάντα η ίδια. (επαλήθευση).

4.12 Δυσμενείς φορτίσεις

Σαν κατασκευαστικό στοιχείο, ο φορέας πρέπει να μελετηθεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να μπορεί να αναλάβει τα προβλεπόμενα φορτία σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τους, ειδικά εκείνους που προκαλούν δυσμενέστερες καταπονήσεις.

Τα φορτία που κατά πάγια τακτική αναλαμβάνει ένας φορέας είναι:

- 1) Το δικό του (ίδιο) βάρος που θεωρείται μόνιμο φορτίο (g)
- 2) Το ωφέλιμο ή κινητό φορτίο (p), και
- 3) Το φορτίο χιονιού (s).

Η σύγχρονη δράση των παραπάνω φορτίων που ονομάζονται κύρια, συνιστούν τη λεγόμενη φόρτιση H του φορέα.

Πέρα όμως από τα κύρια φορτία, ένας φορέας μπορεί να αναλαμβάνει και πρόσθετα φορτία, δηλαδή φορτία που προέρχονται από:

- 1) Ανεμοπίεση (w)
- 2) Μεταβολή της θερμοκρασίας, και
- 3) Δυνάμεις πεδήσεως (φρένα).

Η σύγχρονη δράση των κύριων και πρόσθετων φορτίων, συνιστούν την ονομαζόμενη φόρτιση HZ .

Τα κτηριακά έργα επιβαρύνονται συνήθως με φόρτιση H , ενώ οι γέφυρες με HZ .

Στη μελέτη ενός φορέα, τα φορτία που συνδυάζονται μεταξύ τους για να δώσουν τις δυσμενέστερες καταπονήσεις, είναι:

α) Τα μόνιμα φορτία (g), που δεν μεταβάλλονται και συνεπώς προκαλούν φόρτιση του φορέα σε όλο του το μήκος, και

β) Τα κινητά ή ωφέλιμα φορτία (p), που μπορούν να κινούνται κατά μήκος του φορέα και συνεπώς να τον επιβαρύνουν διαφορετικά, ανάλογα με τη θέση που έχουν κάθε φορά.

Όταν ο φορέας φορτίζεται σε όλο του το μήκος με φορτίο $q = g + p$, λέμε ότι υφίσταται καθολική φόρτιση.

Όταν όμως ένα τμήμα του φορτίζεται με q ενώ το υπόλοιπο με g , η φόρτιση ονομάζεται μερική, και μπορεί να αποτελέσει μία περίπτωση δυσμενούς φορτίσεως.

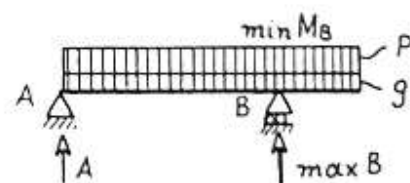
Στην αμφιέρειστη δοκό, οι μέγιστες αντιδράσεις ετήριξης και οι μέγιστες καμπτικές ροπές προκύπτουν για καθολική φόρτιση q .

Στη μονοπροέχουσα δοκό, επειδή η φόρτιση του προβόλου μειώνει την αντίδραση στην ακραία ετήριξη και την καμπτική ροπή στο άνοιγμα, οι μέγιστες τιμές υπολογίζονται για μερική φόρτιση.

Ανάλογα με τη θέση που έχει το κινητό φορτίο πάνω στη μονοπροέχουσα δοκό, προκύπτουν οι παρακάτω περιπτώσεις φορτίσεως:

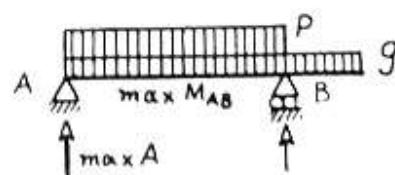
1) Καθολική φόρτιση.

Προκαλεί τη μέγιστη αντίδραση της εσωτερικής ετήριξης ($\max B$) και την ελάχιστη (απόλυτα μέγιστη) αρνητική ροπή στη ετήριξη του προβόλου ($\min M_B$)

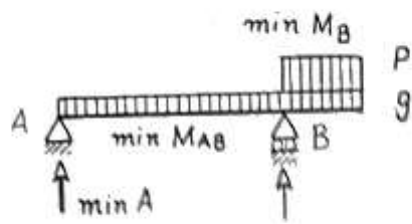


2) Κινητό φορτίο μόνο στο άνοιγμα

Προκαλεί τη μέγιστη αντίδραση της ακραίας ετήριξης ($\max A$) και τη μέγιστη ροπή ανοίγματος ($\max M_{AB}$)



3) Κινητό φορτίο μόνο στον πρόβολο.

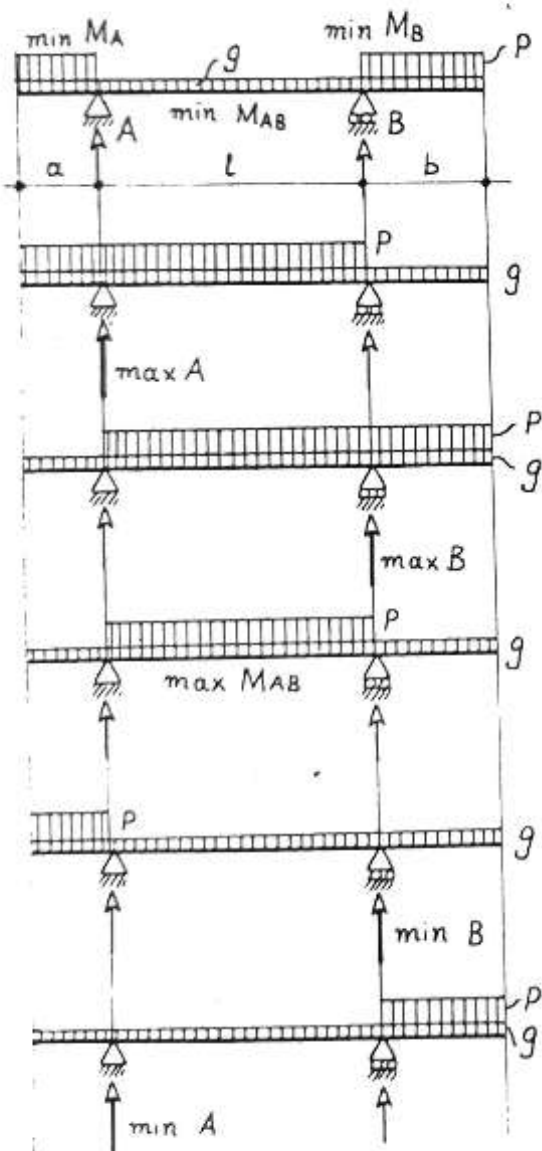


Προκαλεί την ελάχιστη ροπή στο άνοιγμα ($\min M_{AB}$) και την ελάχιστη αντίδραση της ακραίας ετήριξης ($\min A$). Αν η αντίδραση προκύψει αρνητική, τότε πρέπει η δοκός να αγκυρώνεται στη ετήριξη.

αγκυρώνεται στη ετήριξη.

Στην αμφιπροέχουσα δοκό, οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές των αντιδράσεων και ροπών δεν προκύπτουν για καθοδική φόρτιση όπως στην αμφιέρειστη, αλλά για μερική ή φόρτιση της δοκού από τα κινητά φορτία.

Όμως επειδή υπάρχουν δύο πρόβολοι, οι δυνατές περιπτώσεις φόρτισης είναι έξι, ενώ στη μονοπροέχουσα ήταν μόνο τρεις.



1) Φόρτιση δύο προβόλων

Προκύπτει: $\min M_A$, $\min M_B$, $\min M_{AB}$.

2) Φόρτ. ανοίγματος χ αριστ. προβόλου

Προκύπτει η $\max A$

3) Φόρτ. ανοίγματος χ δεξιού προβόλου

Προκύπτει η $\max B$

4) Φόρτιση μόνο ανοίγματος

Προκύπτει η $\max M_{AB}$

5) Φόρτιση μόνο αριστ. προβόλου

Προκύπτει $\min M_A$ και $\min B$.

6) Φόρτιση μόνο δεξιού προβόλου

Προκύπτει $\min M_B$ και $\min A$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΔΙΚΤΥΩΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

5.1 Γενικά

Θα ονομάζουμε δικτυωτό φορέα ή απλά δικτυώμα, μία κατασκευή που αποτελείται από ράβδους οι οποίες συνδέονται αρθρωτά μεταξύ τους.

Βασικό στοιχείο των φορέων αυτών είναι οι ράβδοι, στις οποίες προέχει μόνο η διάσταση του μήκους, ως προς την οποία μπορούν ν' αναλάβουν φορτία.

Τα σημεία στα οποία συντρέχουν δύο ή περισσότερες ράβδοι ονομάζονται κόμβοι του δικτυώματος και υπολογίζονται σαν αρθρώσεις.

Τα εξωτερικά φορτία, που είναι συγκεντρωμένες δυνάμεις, εφαρμόζονται πάντα στους κόμβους, είτε κατ' ευθείαν (σε περίπτωση άμεσης φόρτισης), είτε ύστερα από μεταβίβαση (σε περίπτωση έμμεσης).

Τα δικτυώματα είναι φορείς που συναντώνται συχνά στην πράξη σε περιπτώσεις γεφυρών, υποστέγων και γενικά κατασκευών μεγάλων ανοιγμάτων.

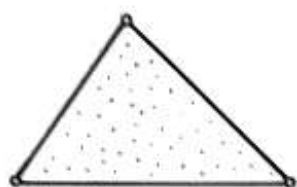
Ανάλογα με τη διάταξη των ράβδων τους οι δικτυωτοί φορείς διακρίνονται:

α) στους επίπεδους, όπου τόσο οι ράβδοι όσο και τα εξωτερικά φορτία κείνται στο ίδιο επίπεδο και

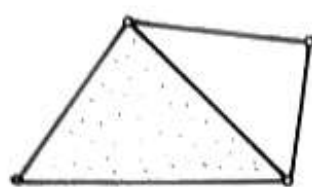
β) στους χωρικούς, όπου ράβδοι και φορτία έχουν τυχαία θέση στο χώρο.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα επίπεδα δικτυώματα, με τα οποία και θ' ασχοληθούμε. Διακρίνονται σε απλά και σύνθετα.

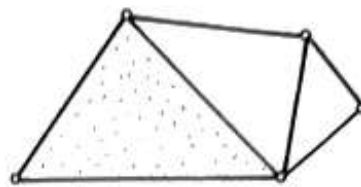
Απλά είναι εκείνα που προκύπτουν απ' το λεγόμενο θεμελιώδη τριγωνικό δίκτυο, που είναι (βλ. α) τρεις ράβδοι συν-



(α)



(β)



(γ)

δεόμενες αρθρωτά σε τρίγωνο, αν κάθε φορά προστίθεται νέος κόμβος μέσω δύο ράβδων που δεν κείνται στην ίδια ευθεία (βλ. β και γ).

Σύνθετα είναι εκείνα που προκύπτουν από σύνδεση δύο ή περισσότερων δίκτυων, είτε κατ' ευθείαν μέσω αρθρώσεων, είτε μέσω ράβδων που δεν είναι παράλληλες ούτε συντρέχουσες, είτε με άλλους συνδεστώτερους τρόπους.

Όπως αναφέρθηκε προηγούμενα, κάθε ράβδος, σαν δεσμικό στοιχείο του δικτυώματος που βρίσκεται μεταξύ δύο κόμβων όπου ασκούνται συγκεντρωμένες δυνάμεις, αναλαμβάνει φορτία μόνο κατ' την έννοια του μήκους της, και επομένως καταπονείται αξονικά (σε θλίψη ή εφελκυσμό).

Το πρόβλημα συνελώς που εμφανίζεται στα επίπεδα δικτυώματα είναι ο προσδιορισμός της αξονικής αυτής δύναμης που αναπτύσσεται σε κάθε ράβδο, τόσο σαν ένταση όσο και σαν είδος (εφελκυσμός ή θλίψη).

Για να είναι εκμεταλλεύσιμη μία δικτυωτή κατασκευή θα πρέπει να πληρεί δύο προϋποθέσεις:

α) Να είναι σταθερή ή γεωμετρικά ορισμένη.

Τούτο σημαίνει ότι ο αριθμός των ράβδων της θα πρέπει να

είναι ορισμένος σε σχέση με τον αριθμό των κόμβων της. Γιατί αφαίρεση ακόμη και μίας ράβδου έχει σαν αποτέλεσμα να αποκτά κινητικότητα ο φορέας, ή όπως θα λέμε, μετατρέπεται σε μονοτρόχιο μηχανισμό.

β) Να είναι στατικά ορισμένος, δηλαδή να είναι δυνατός ο υπολογισμός των δυνάμεων των ράβδων της. Για να συμβαίνει αυτό, θα πρέπει ο αριθμός των ράβδων του δικτύωματος να έχει συγκεκριμένη τιμή, που εξαρτάται απ' τον αριθμό των κόμβων του.

Αν η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη απ' εκείνη που για το φορέα είναι στατικά απαραίτητη, τότε το δίκτυωμα χαρακτηρίζεται στατικά αόριστο με βαθμό στατικής αοριστίας τον αριθμό των πλεοναζουσών ράβδων.

Για να πληρούνται και οι δύο αυτές προϋποθέσεις, δηλαδή για να είναι ένα δίκτυωμα στατικά ορισμένο και σταθερό, θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$P_{εε} + P_{εξ} = 2κ,$$

όπου: $P_{εε}$ ο αριθμός των εσωτερικών ράβδων απ' τις οποίες αποτελείται το δίκτυωμα

$P_{εξ}$ ο αριθμός των εξωτερικών ράβδων που θεωρούνται απαραίτητες για τη στήριξη του δικτύωματος και είναι πάντα 3 (2 για άρθρωση και 1 για κύλιση)

$κ$ ο αριθμός των κόμβων του δικτύωματος.

Για δίκτυωμα στο χώρο, θα πρέπει αντίστοιχα να είναι:

$$P_{εε} + P_{εξ} = 3κ.$$

Για την επίλυση των επιπέδων δικτυωμάτων, δηλαδή τον προσδιορισμό των δυνάμεων που αναπτύσσονται στις ράβδους τους, χρησιμοποιούνται βασικά οι παρακάτω μέθοδοι:

1. Η αναλυτική μέθοδος ισορροπίας των κόμβων
2. Η γραφική μέθοδος Cremona
3. Η αναλυτική μέθοδος των τομών ή μέθοδος Ritter.

Για την επίλυση των δικτυωμάτων επισημαίνεται ότι:

α) Το ίδιο (νεκρό) βάρος των ράβδων του θεωρείται αμελητέο

β) Δικτυώματα που είναι γεωμετρικά όμοια και δέχονται ίσες δυνάμεις β' αντίστοιχους κόμβους, θα εμφανίζουν ίσες δυνάμεις και στις αντίστοιχες ράβδους.

Τούτο σημαίνει ότι η ένταση των ράβδων ενός δικτυώματος δεν εξαρτάται απ' το μέγεθός του, αλλ' απ' την ένταση των εξωτερικών φορτίων και τη γεωμετρία του.

Ο υπολογισμός της δύναμης κάθε ράβδου γίνεται για να καθοριστεί η απαραίτητη διατομή της, έτσι ώστε να επιτυγχάνονται ταυτόχρονα:

- i) οικονομία στο υλικό του φορέα και
- ii) ασφάλεια στη λειτουργία του.

5.2 Η αναλυτική μέθοδος ισορροπίας κόμβων

Η χρήση της μεθόδου αυτής είναι περιορισμένη και εφαρμόζεται κυρίως όταν οι γωνίες που σχηματίζουν μεταξύ των οι ράβδοι του δικτυώματος και τα εξωτερικά φορτία είναι τέτοιες που να δίνουν γνωστούς τριγωνομετρικούς αριθμούς (30° , 45° , 60°).

Μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων στις στηρίξεις του δικτυώματος, εξετάζουμε αναλυτικά την ισορροπία κάθε κόμβου του, ξεκινώντας και συνεχίζοντας σε κόμβο όπου υπάρχουν μέχρι δύο άγνωστες δυνάμεις ράβδων.

Αυτό γίνεται επειδή στο σύστημα ορθογωνίων αξόνων που εγκαθιστούμε νοητά σε κάθε κόμβο για να εκφράσουμε την

ισορροπία του, οι εξισώσεις που διατίθενται είναι δύο:

$$\sum x^{\rightarrow} = 0 \quad \text{και} \quad \sum y^{\uparrow} = 0$$

Η εξίσωση $(\sum M)^{\curvearrowright} = 0$ δεν έχει νόημα αφού οι δυνάμεις είναι συντρέχουσες και ο κόμβος θεωρείται σαν άρθρωση.

Κατά την εισαγωγή της άγνωστης δύναμης μίας ράβδου η φορά της ορίζεται αυθαίρετα.

Το θετικό ή αρνητικό πρόσημο που προκύπτει απ' την επίλυση των εξισώσεων δηλώνει αντίστοιχα τη σωστή ή λανθασμένη επιλογή της φοράς.

Παρατήρηση: Όταν σε κόμβο συντρέχουν:

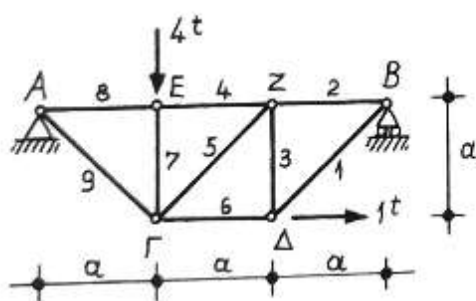
α) δύο ράβδοι ή δυνάμεις που κείνται επ' ευθείας

β) μία τρίτη ράβδος λοξή ή κάθετη,

τότε η δύναμη της τρίτης ράβδου είναι πάντα μηδενική ενώ οι άλλες δύο είναι ίσες και αντίθετες.

Η όλη διαδικασία της μεθόδου φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

5.2.1 Παράδειγμα



Του εικονιζόμενου δικτυωτού φορέα να προσδιοριστούν με την αναλυτική μέθοδο ισορροπίας κόμβων οι δυνάμεις των ράβδων του, καθώς και το είδος της καθεμιάς.

Λύση

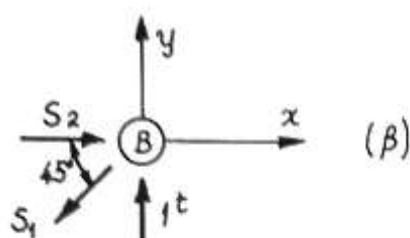
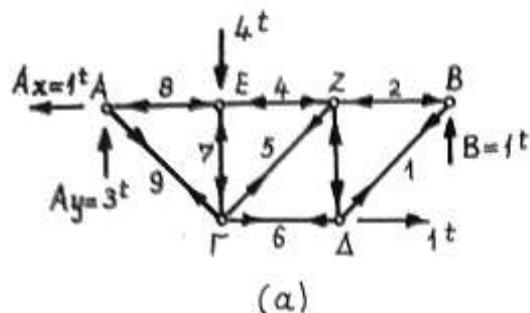
Αντιδράσεις

$$(\sum M)_A^{\curvearrowright} = 0 \Rightarrow 4 \cdot a - 1 \cdot a - B \cdot 3a = 0 \Rightarrow B = 1^t$$

$$\sum y^{\uparrow} = 0 \Rightarrow Ay - 4 + 1 = 0 \Rightarrow Ay = 3^t$$

$$\sum x^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow -Ax + 1 = 0 \Rightarrow Ax = 1^t$$

Μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων και την κατασκευή του διαγράμματος ελευθέρου σώματος (βλ. α), ξεκινάμε,



εξετάζοντας την ισορροπία του κόμβου Β, όπου συντρέχουν δύο μόνο άγνωστες δυνάμεις ράβδων.

Ισορροπία κόμβου Β

Σχεδιάζουμε τον κόμβο Β μ' όλες τις γνωστές δυνάμεις που α-
βσούνται σ' αυτόν (εδώ είναι μόνο
η $B=1^t$), ειςάχοντας π.χ την S_1
εφελκυστική και την S_2 θλιπτική.

Ξεκινώντας απ' τη $\sum y^{\uparrow} = 0$ (για
να μην εμφανισθεί η S_2), θα έχουμε:

$$\sum y^{\uparrow} = 0 \Rightarrow 1 - S_1 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{0,707} = +1,41^t$$

$$\sum x^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow S_2 - 1,41 \cdot \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow S_2 = 1,41 \cdot 0,707 = +1^t$$

Επειδή τα πρόσημα που βρέθηκαν για τις δυνάμεις S_1
και S_2 είναι θετικά, σημαίνει ότι οι φορές που εκλέχτηκαν
είναι σωστές.

Τις σωστές αυτές φορές μεταφέρουμε στο σχήμα (α), δίπλα
στον κόμβο που εξετάζουμε την ισορροπία του, και στη συνέχεια,
σύμφωνα με την αρχή της δράσης - αντίδρασης, σημειώνουμε τις
αντίθετες φορές δίπλα στον απέναντι κόμβο κάθε ράβδου α-
ντίστοιχα.

Τώρα παρατηρούμε ότι η ράβδος 1 εφελκύει τον κόμβο
Β, άρα και η ίδια εφελκύεται με δύναμη $1,41^t$, οπότε εφελ-
κύνει και τον απέναντι κόμβο Δ με την ίδια δύναμη.

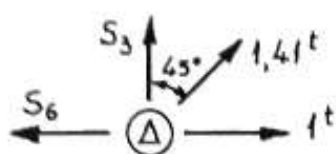
Καταγράφουμε λοιπόν στον πίνακα δυνάμεων των ράβδων
που ακολουθεί στο τέλος, το εφελκυστικό αποτέλεσμα της δύ-
ναμης για τη ράβδο 1, σαν $+1,41$.

Αντίθετα η ράβδος 2 θλίβει τον κόμβο Β, άρα και η ίδια θλίβεται με δύναμη 1 t , οπότε θλίβει και τον απέναντι κόμβο Ζ με την ίδια δύναμη.

Το νέο αυτό αποτέλεσμα καταγράφουμε στον πίνακα σαν -1 .

Επειδή στον κόμβο Ζ συντρέχουν τρεις άγνωστες δυνάμεις, πηγαίνουμε υποχρεωτικά στον κόμβο Δ όπου υπάρχουν μόνο δύο και ακολουθούμε την ίδια πορεία.

Ισορροπία κόμβου Δ



Εδώ εισάγουμε εφελκυστικές και τις δύο άγνωστες δυνάμεις S_3 και S_6 , οπότε έχουμε:

$$\Sigma x^{\pm} = 0 \Rightarrow -S_6 + 1,41 \mu 45^{\circ} + 1 = 0 \Rightarrow S_6 = +2\text{ t}$$

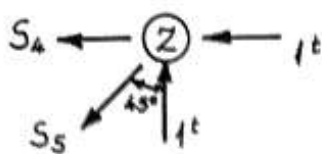
$$\Sigma y^{\uparrow\downarrow} = 0 \Rightarrow S_3 + 1,41 \sigma \nu 45^{\circ} = 0 \Rightarrow S_3 = -1\text{ t}$$

Ενώ το θετικό πρόσημο της S_6 σημαίνει τη σωστή εφελκυστική φορά της, το αρνητικό πρόσημο της S_3 σημαίνει ότι η σωστή της φορά είναι αντίθετη της εφελκυστικής που εκλέχτηκε, δηλαδή είναι θλιπτική.

Μεταφέροντας τις σωστές φορές στο σχήμα (α) και τις αντίθετές τους στους απέναντι κόμβους, μετά τη διαπίστωση του εφελκυσμού στη ράβδο 6 και της θλίψης στην 3, καταγράφουμε στον πίνακα τα αποτελέσματα σαν $+2$ και -1 αντίστοιχα.

Παρατήρηση: Από την παραπάνω διεργασία προκύπτει ότι όταν αρχικά παίρνουμε μία άγνωστη δύναμη σαν εφελκυστική τότε το πρόσημο που προκύπτει απ' την επίλυση της εξίσωσης εκφράζει κατ' ευθείαν την πραγματική εντατική κατάσταση της ράβδου.

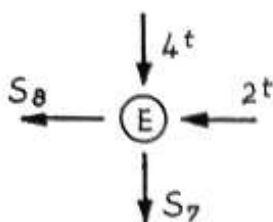
Το αντίθετο συμβαίνει αν αρχικά πάρουμε την άγνωστη δύναμη σαν θλιπτική.

Ισορροπία κόμβου Z

Όμοια, απ' το σχήμα έχουμε:

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 1 - S_5 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow S_5 = +1,41t$$

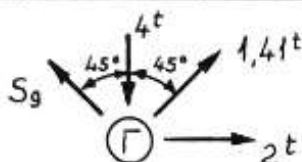
$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -S_4 - 1,41 \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow S_4 = -2t$$

Ισορροπία κόμβου E

Όπως προκύπτει απ' το σχήμα, είναι:

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -S_8 - 2 = 0 \Rightarrow S_8 = -2t$$

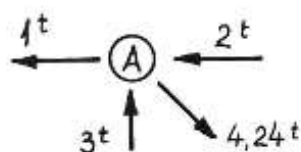
$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -S_7 - 4 = 0 \Rightarrow S_7 = -4t$$

Ισορροπία κόμβου Γ

Επειδή εδώ έχουμε μία μόνο άγνωστη δύναμη, η αλλη εξίσωση θα χρησιμοποιηθεί σαν επαλήθευση.

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -S_9 \cos 45^\circ + 1,41 \sin 45^\circ + 2 = 0 \Rightarrow S_9 = \frac{1+2}{0,707} = +4,24t$$

Επαλήθευση: $\sum y^{\uparrow+} = 4,24 \sin 45^\circ - 4 + 1,41 \sin 45^\circ = 3 - 4 + 1 = 0!$

Ισορροπία κόμβου A (Επαλήθευση).

$$\sum x^{\rightarrow+} = -1 + 4,24 \sin 45^\circ - 2 = -1 + 3 - 2 = 0!$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 3 - 4,24 \cos 45^\circ = 3 - 3 = 0!$$

Πίνακας δυνάμεων των ράβδων

Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δύναμη (t)	+1,41	-1	-1	-2	+1,41	+2	-4	-2	+4,24

Έτσι ολοκληρώθηκε η εικόνα που παρουσιάζει την εντατική κατάσταση κάθε ράβδου του δικτυώματος, με την παρατήρηση ότι για κάθε ράβδο η πραγματική της εντατική κατάσταση είναι

αντίθετη απ' αυτήν που εκ πρώτης όψεως φαίνεται.

Έτσι π.χ. η ράβδος 2, ενώ φαίνεται ότι εφελκύνεται, ουσιαστικά θλίβεται, γιατί όπως αναφέραμε θλίβει τους κόμβους στα άκρα της.

Η επαλήθευση που γίνεται στο τέλος δεν αποτελεί μέρος της επίλυσης του δικτυώματος και γιαυτό δεν είναι υποχρεωτική. Όμως όταν γίνεται, και ισχύει, δείχνει ότι τόσο οι αντιδράσεις του δικτυώματος όσο και οι δυνάμεις των ράβδων του έχουν γενικά υπολογιστεί σωστά.

Έτσι ο μελετητής αποκτά την απαραίτητη σιγουριά για τους υπολογισμούς που έκανε, ώστε να προχωρήσει μετά στο βασικό έργο, που είναι ο καθορισμός της διατομής κάθε ράβδου.

Οι εξισώσεις που προκύπτουν για επαλήθευση αποτελούν ουσιαστικά περίεργα των εξισώσεων ισορροπίας των κόμβων του δικτυώματος λόγω της χρήσης των στερεοστατικών εξισώσεων ισορροπίας για τον υπολογισμό των αντιδράσεων.

Διότι, σε δικτύωμα k κόμβων, αν στον αριθμό $2k-3$ των δυνάμεων των ράβδων που πρέπει να υπολογιστούν, προσθέσουμε τις τρεις αντιδράσεις ετήριξης που εμφανίζονται στους ισοστατικούς φορείς, προκύπτουν συνολικά

$$2k-3+3 = 2k$$

άγνωστες δυνάμεις, οι οποίες θα υπολογιστούν κανονικά από τις $2k$ εξισώσεις που θα προκύψουν λόγω της ισορροπίας των k κόμβων ($\sum x^{\pm} = 0$, $\sum y^{\pm} = 0$).

Ο λόγος για τον οποίο προσδιορίζουμε πρώτα τις αντιδράσεις ενός δικτυώματος είναι για να βρεθεί κόμβος που να συντρέχουν μόνο 2 άγνωστες δυνάμεις, αφού στον κόμβο της ετήριξης η αντίδραση δεν παύει να είναι μία άγνωστη δύναμη.

5.3 Η γραφική μέθοδος Cremona

Η μέθοδος αυτή ασχολείται ουσιαστικά με τη γραφική έκφραση της ισορροπίας του κάθε κόμβου, ενοποιώντας όμως όλα τα επί μέρους δυναμοπολύγωνα που προκύπτουν απ' την εργασία αυτή σε ένα, που είναι γνωστό σαν διάγραμμα Cremona.

Αν και γραφική, η μέθοδος αυτή οδηγεί σε γρήγορο υπολογισμό των δυνάμεων των ράβδων και προσφέρεται ιδιαίτερα σε περιπτώσεις όπου τα εξωτερικά φορτία και οι ράβδοι του δικτυώματος σχηματίζουν μεταξύ τους διάφορες γωνίες.

Όπως στην αναλυτική μέθοδο έτσι και εδώ, γενικά μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων, εξετάζουμε γραφικά την ισορροπία κάθε κόμβου, αρχίζοντας και συνεχίζοντας σε κόμβο όπου υπάρχουν μέχρι δύο άγνωστες δυνάμεις ράβδων.

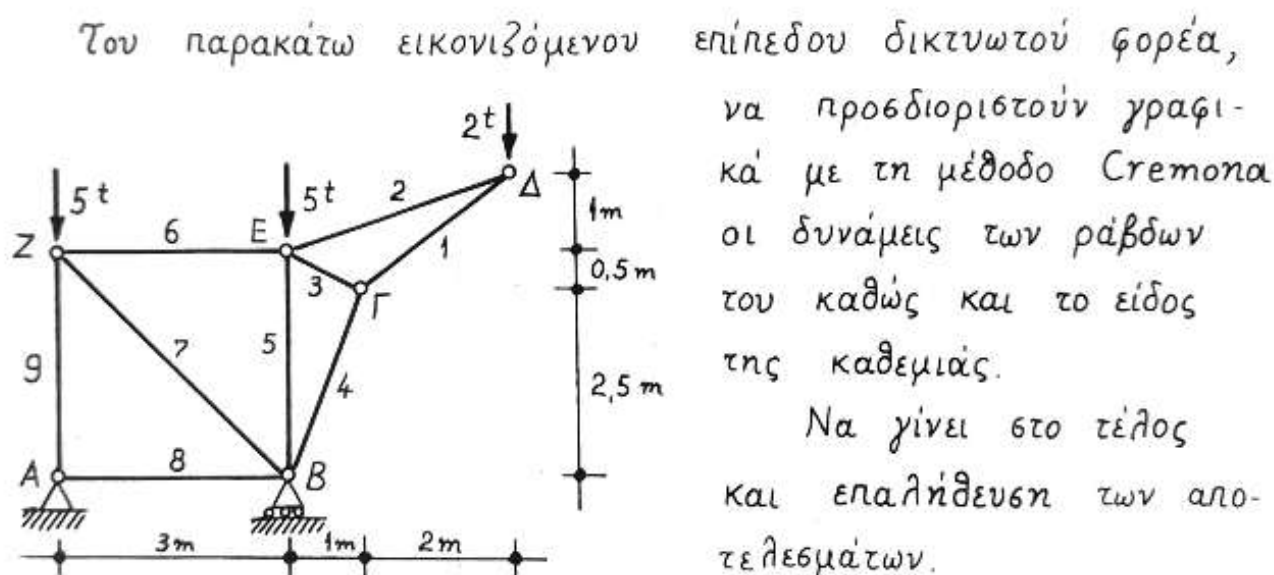
Και τούτο γιατί, όπως είναι γνωστό, προκειμένου να εξετάσουμε την ισορροπία ενός κόμβου όπου συντρέχουν 3 δυνάμεις, εκ των οποίων η μία είναι γνωστή (μπορεί και να θεωρηθεί συνισταμένη άλλων γνωστών δυνάμεων), ενώ οι άλλες δύο μόνο κατά διεύθυνση, απ' τα δύο άκρα της γνωστής δύναμης φέρνουμε παράλληλες προς τις δύο γνωστές διευθύνσεις, οπότε το κλείσιμο του δυναμοτριγώνου που προκύπτει μας δίνει τις φορές και τις εντάσεις των δύο αγνώστων δυνάμεων.

Σε σχέση με την αναλυτική μέθοδο, η γραφική είναι λιγώτερο ακριβής, αλλ' αυτή η μικρότερη ακρίβεια είναι τόσο αβήμαντη που δεν εμποδίζει καθόλου τη χρησιμοποίηση της μεθόδου απ' όλους σχεδόν τους μελετητές, επειδή διακρίνεται για την ταχύτητα, την κομψότητα και προπαντός τη μικρή πιθανότητα λάθους που είναι αποτέλεσμα των πολλαπλών επαληθεύσεων που εμφανίζονται.

Στην όλη οργάνωση της μεθόδου και ιδιαίτερα στην ονομασία των δυνάμεων που προκύπτουν για κάθε ράβδο, σημαντική υπήρξε η συμβολή του Bow και γι' αυτό η όλη εργασία είναι γνωστή και σαν μέθοδος Bow - Cremona.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί περιγράφονται αναλυτικά τα διάφορα στάδια της μεθόδου, δίνοντας την εντύπωση ότι πρόκειται για πολύπλοκη εργασία. Όμως, μετά την απόκτηση κάποιας εμπειρίας, τα στάδια αυτά ακολουθούνται μηχανικά, με αποτέλεσμα η επίλυση του δικτυώματος, όπως προαναφέραμε, να γίνεται πολύ γρήγορα και προπαντός δίγouρα.

5.3.1 Παράδειγμα



Λύση

Αντιδράσεις

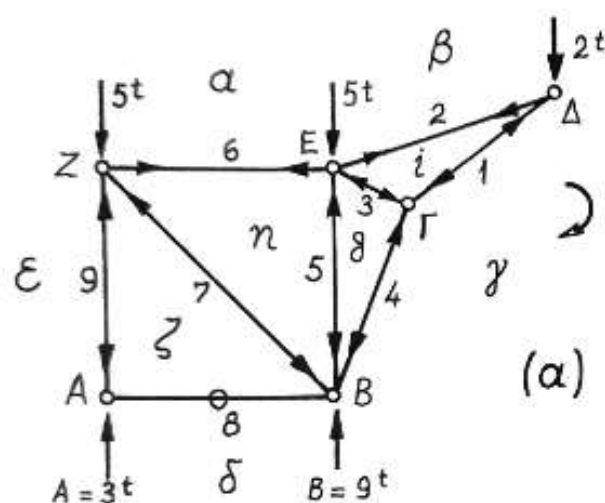
$$(\sum M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 - B \cdot 3 = 0 \Rightarrow B = 9t$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow A - 5 - 5 + 9 - 2 = 0 \Rightarrow A = 3t$$

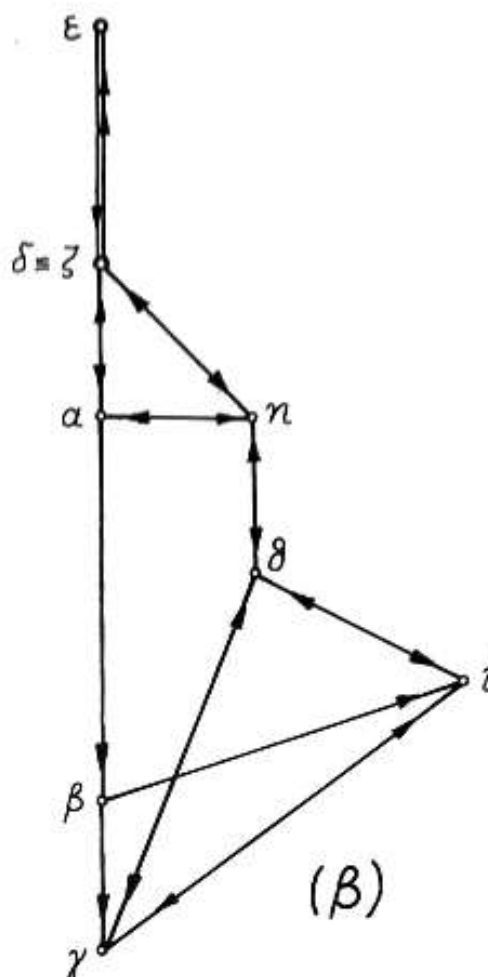
Μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων, κατασκευάζουμε το διά-

γραμμά ελευθέρου σώματος (δκ. α) και ακολουθούμε τις παρακάτω εργαβίες.

α) Ορίζουμε μία φορά δια-
γραφής, π.χ. δεξιότροφη, των δυνά-
μεων που εμφανίζονται γύρω από
κάθε κόμβο. Τούτο σημαίνει ότι αν
κατά την εξέταση π.χ. της ισορρο-
πίας του κόμβου Ε ξεκινήσουμε
την κατασκευή του δυναμοπολυγώνου



Διάγραμμα ελευθέρου σώματος



Διάγραμμα Cremona

παίρνοντας τη δύναμη της ράβδου 2, η επόμενη δύναμη που θα λάβουμε υπόψη, θα είναι υποχρεωτικά της ράβδου 3, που εμφανίζεται πρώτη δεξιότροφα, και όχι των 2^t ή της ράβδου 5 ή 6.

β) Καλύπτοντας όλο το επίπεδο του σχήματος, ονομάζουμε α, β, γ..... όλες τις επιφάνειες που δημιουργούνται τόσο απ' τις ράβδους του δικτυώματος όσο και από τα εξωτερικά φορτία και αντιδράσεις, έτσι ώστε κάθε δύναμη, αντίδραση ή ράβδος να κω-
ρίξει 2 επιφάνειες.

γ) Αρχίζουμε με κόμβο όπως ο Δ, όπου συντρέχουν δύο μόνο άγνωστες δυνάμεις ράβδων και εξετάζουμε την ισορροπία του,

Ξεκινώντας την κατασκευή του δυναμοπολυγώνου απ' τις γνωστές δυνάμεις, έτσι ώστε να καταλήγουμε πάντα στις δύο άγνωστες.

Κόμβος Δ

Σχεδιάζουμε λοιπόν με κλίμακα $1\text{cm} \hat{=} 1\text{t}$ ($6 \times \beta$) τη γνωστή δύναμη των 2t , η οποία χαρακτηρίζεται με το διάνυσμα $\vec{\beta\gamma}$. Διότι, προκειμένου να περάσουμε πάνω απ' τη δύναμη των 2t , περιτρεφόμενοι δεξιόστροφα γύρω απ' τον κόμβο που εξετάζουμε την ισορροπία, πρέπει να πατήσουμε πρώτα στην επιφάνεια β και μετά στη γ .

Συνεχίζοντας δεξιόστροφα συναντάμε τη ράβδο 1, που σύμφωνα με τα παραπάνω αρκεί στον κόμβο Δ τη δύναμη $\gamma\iota$, απ' τις επιφάνειες γ και ι που διαχωρίζει.

Φέρνουμε λοιπόν στο διάγραμμα Cremona απ' το γ την παρ/λη της ράβδου 1 και πάνω σ' αυτή περιμένουμε το σημείο ι .

Συνεχίζοντας τη διαδρομή συναντούμε τη ράβδο 2 που αρκεί στον κόμβο Δ τη δύναμη $\iota\beta$.

Επειδή το σημείο ι δεν είναι ακόμη γνωστό, φέρνουμε στο διάγραμμα απ' το σημείο β την παρ/λη της ράβδου 2, που φυσικά τέμνει την εκ του γ παρ/λη της 1 που φέραμε πριν, στο σημείο ι .

Μετά τον ορισμό του ι , την ισορροπία του κόμβου Δ, εκφράζει το δυναμοτρίγωνο $\beta\gamma\iota\beta$. Για το κλείσιμό του ακολουθούμε τη διαδρομή που προκύπτει απ' τα ονόματα των επιφανειών που αντιστοιχούν στη δεξιόστροφη περιφορά γύρω απ' τις δύο άγνωστες τελευταίες δυνάμεις, δηλαδή το δρομολόγιο $\gamma\iota\beta$, βάζοντας τα βελάκια της κίνησης στο τέλος της διαδρομής κάθε δύναμης.

Τα βελάκια αυτά, που εκφράζουν τις σωστές φορές

των αγνώστων δυνάμεων, μεταφέρουμε στις αντίστοιχες ράβδους (βλ. α) η λ' α' στον κόμβο Δ που εξετάζουμε την ισορροπία του. Αντίθετες φορές βάζουμε στους απέναντι του Δ κόμβους Γ και Ε.

Τώρα βλέπουμε (βλ. α) ότι η ράβδος 1 π.χ. θλίβει τον κόμβο Δ με δύναμη, που βρίσκουμε απ' το διάγραμμα Cremona, αν μετρήσουμε με το υποδεκάμετρο το τμήμα γι (ή ιγ), σύμφωνα με την κλίμακα που πήραμε. Έτσι βρίσκουμε $\gamma_i = 6 \text{ cm}$ και συνεπώς στον πίνακα δυνάμεων των ράβδων που ακολουθεί καταγράφουμε τη δύναμη της ράβδου 1 σαν -6 t .

Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δύναμη (t)	-6	+5,1	-3,1	-5,4	-2	+2	-2,8	0	-3

Όμοια βρίσκουμε ότι η ράβδος 2 εφελκύει τον κόμβο Δ, με δύναμη $i\beta = 5,1 \text{ t}$, την οποία καταγράφουμε σαν $+5,1$ και ερχόμαστε στον κόμβο Γ, επειδή στον Ε υπάρχουν 3 άγνωστες δυνάμεις.

Κόμβος Γ

Για να καταλήξουμε στις δύο άγνωστες δυνάμεις των ράβδων 3 και 4 (βλ. α), ξεκινάμε τη διαδρομή μας απ' τη γνωστή δύναμη της ράβδου 1, που είναι τώρα η ιγ.

Γράφουμε λοιπόν στο βλ. β το βελάκι στον άδειο χώρο (επαλήθευση) του τελικού μήκους ιγ, το οποίο βελάκι επαληθεύεται μ' εκείνο που ήδη βάλαμε στο βλ. α, σαν αντίθετη φορά στον απέναντι του Δ κόμβο Γ.

Συνεχίζοντας δεξιόστροφα στον κόμβο Γ, συναντάμε τη ράβδο 4, που ακεί β' αυτόν τη δύναμη γθ.

Φέρνουμε λοιπόν στο διάγραμμα Cremona απ' το γ την παρ/λη της ράβδου 4 και πάνω β' αυτή περιμένουμε το δ.

Στη συνέχεια της διαδρομής, η ράβδος 3 ακεί στον κόμβο τη δύναμη δι, οπότε απ' το ι φέρνουμε παρ/λη της 3, ορίζοντας έτσι το σημείο δ.

Του δυναμοτριγώνου $\gamma\delta\epsilon$, που εκφράζει πιά την ισορροπία του κόμβου Γ, διανύουμε τώρα μόνο τη διαδρομή που αντιστοιχεί στις δύο άγνωστες δυνάμεις, δηλαδή τη $\gamma\delta$, βάζοντας στο τέλος των δυνάμεων τα βελάκια των κατευθύνσεων, τα οποία μεταφέρουμε στις αντίστοιχες ράβδους, πλάι στον κόμβο Γ, με τις αντίθετες φορές στους απέναντι κόμβους Ε και Β.

Παρατηρούμε τώρα ότι οι δυνάμεις των ράβδων 4 και 3 είναι θλιπτικές. Μετρώντας στο διάγραμμα Cremona τα μήκη $\gamma\delta$ και $\delta\epsilon$ τις καταγράφουμε στον πίνακα σαν $-5,4$ και $-3,1$ αντίστοιχα.

Κόμβος Ε

Ξεκινάμε το δυναμοπολύγωνο απ' τη γνωστή δύναμη $\vec{a\beta}=5^t$. Απ' το σημείο Β που έχουμε στο διάγραμμα, εύκολα ορίζουμε το α, παίρνοντας κατακόρυφα προς τα πάνω μήκος $\beta\alpha=5\text{ cm}$.

Συνεχίζοντας την περιστροφή στον κόμβο, συναντάμε τη γνωστή δύναμη βι της ράβδου 2, οπότε, πηγαίνοντας στο διάγραμμα βρίσκουμε στο τέλος του μήκους βι τον κενό χώρο (επαληθευση), για να βάλουμε το βελάκι της κατεύθυνσης, που επαληθεύεται μ' εκείνο που βάλαμε ήδη στο $\delta\chi$ α σαν αντίθετη φορά, απ' την ισορροπία του κόμβου Δ.

Κατά τον ίδιο τρόπο επαληθεύουμε τη γνωστή δύναμη $\delta\theta$ της ράβδου 3.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, απ' το θ του $\delta\chi$ β φέρνουμε την παρ/λη της ράβδου 5, που τέμνει την εκ του α παρ/λη της 6 στο η.

Κάνουμε τη διαδρομή $\theta\eta\alpha$ βάζοντας τα βελάκια, που μεταφέρουμε στις ράβδους 5 και 6 με τα απέναντι αντίθετά τους.

Μετρούμε στο διάγραμμα Cremona τα καινούργια μήκη $\theta\eta$ και $\eta\alpha$, παρατηρώντας τον κόμβο Ε τι παθαίνει απ' τις δυνάμεις των ράβδων 5 και 6 και τις καταγράφουμε σαν -2

και +2 αντίστοιχα.

Κόμβος Ζ

Με παρόμοιο τρόπο τοποθετούμε στο διάγραμμα τη δύναμη $\vec{\epsilon\alpha} = 5^t$ ορίζοντας το ϵ , και επαληθεύουμε τη δύναμη απ' της ράβδου 6.

Απ' το η φέρνουμε παρ/λη της 7, που τέμνει την απ' το ϵ παρ/λη της 9 στο σημείο ζ .

Η διαδρομή $\eta\zeta$ ορίζει τη δύναμη $-2,8$ της ράβδου 7, ενώ η διαδρομή $\zeta\epsilon$ που είναι διπλή (σημειώνεται για διευκόλυνση με διπλή γραμμή), ορίζει τη δύναμη -3 της ράβδου 9.

Κόμβος Α

Μεταφερόμενοι ήδη στον κόμβο Α περιμένουμε να συναντήσουμε το μηδενισμό της δύναμης στη ράβδο 8, σύμφωνα με το σκεπτικό της παρατήρησης στη σελ. 83.

Πραγματικά, τοποθετώντας στο διάγραμμα τη γνωστή αντίδραση $A = \vec{\delta\epsilon} = 3^t$, ορίζουμε το γράμμα δ σαν σημείο που ανήκει στην εκ του ϵ κατακόρυφη σε απόσταση 3cm προς τα κάτω. Επειδή όμως η δύναμη $\epsilon\zeta$ της κατακόρυφης ράβδου 9 υπολογίστηκε ήδη σε 3^t , έπεται ότι το δ συμπίπτει με το ζ . Άρα η δύναμη της ράβδου 8, που είναι το μήκος-σημείο $\zeta\delta$ είναι μηδενική.

Κόμβος Β

Η μεταφορά στον κόμβο Β θα κλείσει τον κύκλο των γραφικών ισορροπιών με την επαληθεύση της γνωστής ήδη αντίδρασης Β, τόσο για την ένταση, όσο και τη διεύθυνση και φορά της.

Πραγματικά, ξεκινώντας στο διάγραμμα απ' τη μηδενική δύναμη $\delta\zeta$ της ράβδου 8, και επαληθεύοντας τις δυνάμεις των ράβδων 7, 5 και 4 αντίστοιχα με τα διανύσματα $\vec{\zeta\eta}$, $\vec{\eta\delta}$ και $\vec{\delta\gamma}$, διαπιστώνουμε ότι η ένταση $\gamma\delta$ της αντίδρασης Β είναι όντως $9^t (= 9\text{cm})$ με διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα άνω.

Σημείωση.

Ο προσδιορισμός των αντιδράσεων, ειδικά για το δικτύωμα αυτό θα μπορούσε ν' αποφευχθεί, επειδή για το ξεκίνημα της επίλυσης (γραφικής ή αναλυτικής), υπάρχει κόμβος (ο Δ), με δύο μόνο άγνωστες δυνάμεις (των ράβδων 1 και 2).

Σε τέτοιες περιπτώσεις οι αντιδράσεις προκύπτουν απ' την εξέταση ισορροπίας των κόμβων βτήριξης, που κανονικά θα χρησιμοποιούσαμε για επαλήθευση.

5.4 Η αναλυτική μέθοδος των τομών (Ritter)

Είναι δυνατόν ένα δικτύωμα να είναι στατικά ορισμένο και σταθερό, να πληρούνται δηλαδή η σχέση

$$\rho_{ε\sigma} + \rho_{ε\zeta} = 2κ,$$

και όμως να παρουσιάζει προβλήματα στην επίλυσή του.

Τα προβλήματα αυτά άλλοτε είναι δυνατό να ξεπεραστούν με κάποια προσπάθεια και άλλοτε όχι.

Είναι δυνατόν π.χ να ζητούνται οι δυνάμεις ορισμένων μόνο ράβδων ενός μεγάλου δικτυώματος, που βρίσκονται μακριά απ' τους κόμβους απ' όπου ξεκινάμε την επίλυση, οπότε, για να φτάσουμε στις ζητούμενες δυνάμεις των ράβδων, θα έχουμε ήδη κοπιάσει άσκοπα, πέρα απ' τη σημαντική πιθανότητα λάθους που αντιμετωπίζουμε ως το τέλος.

Σ' άλλες πάλι περιπτώσεις είναι αδύνατο το ξεκίνημα της επίλυσης, γιατί β' όλους τους κόμβους συντρέχουν τουλάχιστον τρεις άγνωστες δυνάμεις ράβδων.

Σ' ορισμένες τέλος περιπτώσεις, ενώ ξεκινάμε κανονικά την επίλυση, φτάνουμε σε κάποιο στάδιο όπου η συνέχιση της επίλυσης είναι αδύνατη, γιατί β' οποιονδήποτε επόμενο κόμβο συν-

τρέχουν τρεις άγνωστες δυνάμεις ράβδων.

Σ' όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, και όχι μόνο αυτές, τη λύση δίνει η αναλυτική μέθοδος των τομών ή μέθοδος Ritter, απ' το όνομα του εφευρέτου της.

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή κάνουμε μια τομή στο φορέα, χωρίζοντάς τον σε δύο τμήματα.

Στο ένα απ' αυτά, αφού τοποθετήσουμε τις πραγματικές αλλ' άγνωστες για μας δυνάμεις στις θέσεις των ράβδων που κόγαμε, εξετάζουμε την ισορροπία του, χρησιμοποιώντας συνήθως τις στερεοστατικές εξισώσεις.

Κατά την εκτίλεση της τομής φροντίζουμε:

α) να μην απομονώσουμε κόμβο, αλλά τουλάχιστον ράβδο ή δίσκο, και

β) ο αριθμός των ράβδων που θα κόγουμε να είναι 3 ή το πολύ 4.

Ο αριθμός αυτός δεν μπορεί να είναι μικρότερος του 3 γιατί αλλιώς δεν θα μπορούσαν να συνδεθούν σταθερά τα δύο τμήματα που χωρίσαμε με την τομή. Και επειδή η τομή περιεσσοτέρων ράβδων σημαίνει μεγαλύτερη δυσκολία στον υπολογισμό των δυνάμεών τους, φροντίζουμε να τις περιορίσουμε στον ελάχιστο αριθμό, δηλαδή 3.

Με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχουν άγνωστες αντιδράσεις στο τμήμα που απομονώσαμε, ο υπολογισμός των δυνάμεων των ράβδων που κόγαμε γίνεται συνήθως αν αρχικά πάρουμε το μηδενισμό του αλγεβρικού αθροίσματος των ροπών όλων των δυνάμεων $(\Sigma M)_i^+ = 0$, ως προς το σημείο τομής ή οποιωνδήποτε δύο απ' τις κομένες ράβδους. τότε, αν ο αριθμός των αποκομένων ράβδων είναι:

α) 3, απ' τη σχέση $(\Sigma M)_i^+ = 0$ βρίσκουμε κατ' ευθείαν τη μία απ' αυτές

β) 4, υποχρεωτικά θ' αναζητήσουμε και μια άλλη εξίσωση ($\Sigma x^{\pm}=0$ ή $\Sigma y^{\pm}=0$), όπου να μην εμφανίζονται οι άγνωστες δυνάμεις, ως προς το σημείο τομής των οποίων πήραμε το προηγούμενο αλγεβρικό άθροισμα ροπών.

Στη συνέχεια, για τις υπόλοιπες δύο δυνάμεις χρησιμοποιούμε τις στερεοστατικές εξισώσεις $\Sigma x^{\pm}=0$ ή $\Sigma y^{\pm}=0$, ή το μηδενισμό του αλγεβρικού άθροισματος ροπών ως προς άλλο σημείο.

Το μόνο πρόβλημα που συνήθως παρουσιάζεται στο αλγεβρικό άθροισμα ροπών είναι ο υπολογισμός του μοχλοβραχίονα κάθε δύναμης.

Στην περίπτωση που ο παραπάνω μοχλοβραχίονας είναι προφανής ή εύκολα (γεωμετρικά ή τριγωνομετρικά) προσδιορίσιμος έχει καλώς· αν όμως εμφανίζεται ιδιαίτερη δυσκολία ή πολυπλοκότητα, προσφεύγουμε στο γραφικό του προσδιορισμό σύμφωνα με την κλίμακα που χρησιμοποιήσαμε για τη σχεδίαση του δικτυώματος.

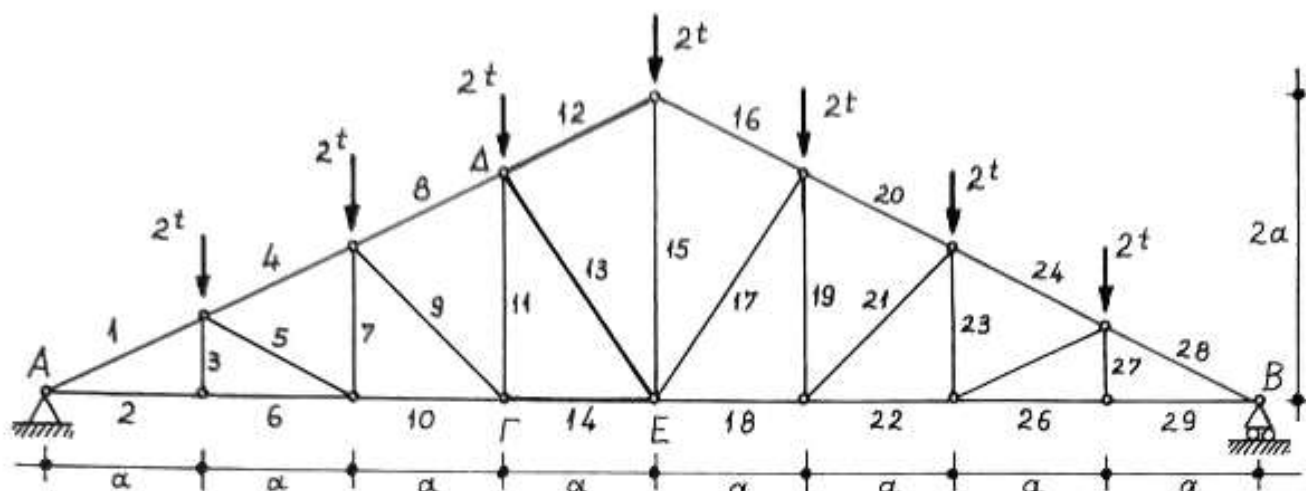
Στα παραδείγματα που ακολουθούν γίνεται η περιγραφή της μεθόδου μόνο για την αντιμετώπιση του συγκεκριμένου προβλήματος που περιγράφεται. Η παραπέρα επίλυση του φορέα, αν ζητείται, μπορεί να γίνει κανονικά με μία απ' τις μεθόδους που ήδη αναφέραμε (αναλυτική ή γραφική).

Κατά την εξέταση της ισορροπίας του τμήματος που κόπηκε, ειδαίγουμε συνήθως την άγνωστη δύναμη της ράβδου με εφελκυστική φορά. Όπως αναφέραμε και στην αναλυτική μέθοδο ισορροπίας των κόμβων, αν το πρόβλημα που θα προκύψει απ' την επίλυση της εξίσωσης είναι θετικό, η εφελκυστική φορά που εκλέχτηκε είναι σωστή.

Στην αντίθετη περίπτωση η ένταση της ράβδου είναι θλιπτική.

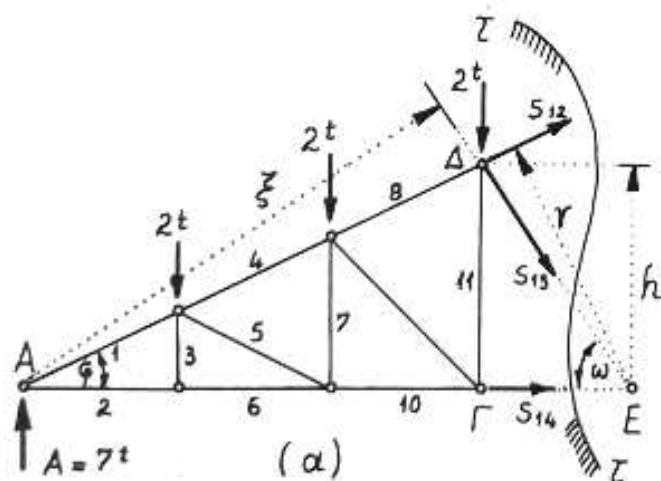
5.4.1 Παραδείγματα

1. Του επίπεδου δικτυωτού φορέα του σχήματος να υπολογιστούν μόνο οι δυνάμεις των ράβδων 12, 13 και 14



Λύση

Μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων, που εδώ λόγω συμμετρίας είναι $A = B = 7t$, θεωρούμε τομή $\tau\tau$ ($6 \times a$), που χωρίζει το φορέα σε δύο τμήματα, κόβοντας τις ράβδους των οποίων ζητούνται οι δυνάμεις (ή τουλάχιστον τη μία απ' αυτές).



Προ της τομής ο αριστερά αυτής ευρισκόμενος δίκκος ΑΓΔ ισορροπεί κάτω απ' την επίδραση της γνωστής αντίδρασης $A = 7t$, των τριών κατακόρυφων δυνάμεων των $2t$, καθώς και εκείνων που αντιστοικούν στις ράβδους 12, 13 και 14 της τομής.

Η ισορροπία του παραπάνω δίκκου εξακολουθεί να υπάρχει εφ' όσον στις θέσεις των κομένων ράβδων βάλουμε τις πραγμα-

τικές αλλ' άγνωστες ακόμη (εσωτερικές για το δικτύωμα) δυνάμεις S_{12} , S_{13} και S_{14} , τις οποίες ειδαίνουμε εφελκυστικές. Αν το πρόσημο που θα προκύψει απ' την επίλυση είναι αρνητικό, θα σημαίνει ότι οι δυνάμεις ασκούνται αντίθετα και θλίβουν τους αντίστοιχους κόμβους.

Αν h είναι η απόσταση του Δ (σημείου τομής των ράβδων 12 και 13) απ' τη ράβδο 14, r η απόσταση του E (σημείου τομής των 13 και 14) απ' τη 12 και ξ η απόσταση του A (σημείου τομής των 12 και 14) απ' τη 13, εφ' όσον ο δίσκος ισορροπεί, θα ικανοποιούνται οι σχέσεις:

$$\sum x^{\uparrow\downarrow} = 0, \quad \sum y^{\uparrow\downarrow} = 0 \quad \text{και} \quad (\sum M)^{\uparrow\downarrow} = 0.$$

Αντί αυτών μπορούμε βέβαια να χρησιμοποιήσουμε τρεις φορές την τελευταία εξίσωση ως προς τα σημεία Δ , E και A αντίστοιχα, μιάς και οι μοχλοβραχίονες h , r και ξ των παραπάνω σημείων ως προς τις αντίστοιχες άγνωστες δυνάμεις υπολογίζονται εύκολα τριγωνομετρικά.

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{1}{2} = \frac{h}{3a} \Rightarrow \underline{h = 1,5a}$$

$$\varphi = 26,57^\circ \Rightarrow \eta\mu\varphi = 0,447 \quad \text{και} \quad \underline{r = 4a \cdot \eta\mu\varphi = 1,79a}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{1,5a}{a} = 1,5 \Rightarrow \omega = 56,31^\circ, \quad \eta\mu\omega = 0,832, \quad \underline{\xi = 4a \cdot \eta\mu\omega = 3,33a}$$

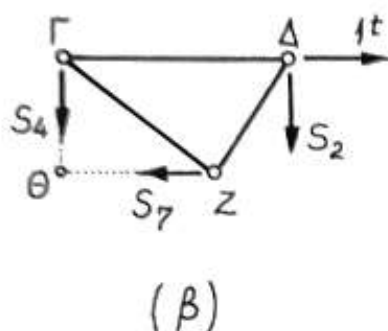
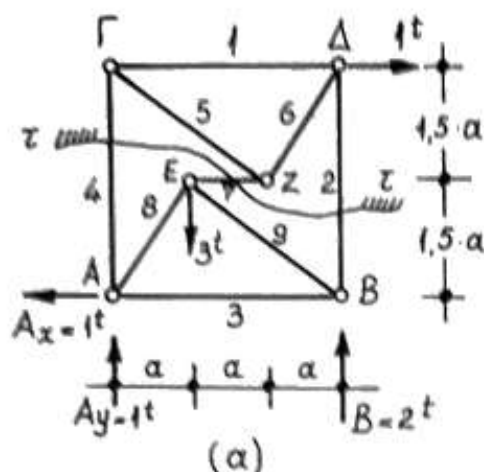
Έτσι θα έχουμε:

$$\begin{aligned} (\sum M)_\Delta^{\uparrow\downarrow} = 0 &\Rightarrow 7 \cdot 3a - 2 \cdot 2a - 2 \cdot a - S_{14} \cdot 1,5a = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_{14} = \frac{21 - 4 - 2}{1,5} = 10^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sum M)_E^{\uparrow\downarrow} = 0 &\Rightarrow 7 \cdot 4a - 2 \cdot 3a - 2 \cdot 2a - 2 \cdot a + S_{12} \cdot 1,79a = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_{12} = - \frac{28 - 6 - 4 - 2}{1,79} = -8,94^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sum M)_A^{\uparrow\downarrow} = 0 &\Rightarrow 2 \cdot a + 2 \cdot 2a + 2 \cdot 3a + S_{13} \cdot 3,33a = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_{13} = - \frac{2 + 4 + 6}{3,33} = -3,6^t. \end{aligned}$$

Οι αντιδράσεις υπολογίζονται εύκολα απ' τις γνωστές τε-
ρεοστατικές εξισώσεις:



$$(\sum M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow$$

$$1 \cdot 3a + 3 \cdot a - B \cdot 3a = 0 \Rightarrow B = 2t$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow Ay - 3 + 2 = 0 \Rightarrow Ay = 1t$$

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -Ax + 1 = 0 \Rightarrow Ax = 1t$$

Όμως, επειδή σε κάθε κόμβο συντρέχουν τρεις ράβδοι, δεν είναι δυνατό να εφαρμοστεί ούτε η αναλυτική μέθοδος ισορροπίας των κόμβων, ούτε το διάγραμμα Cremona.

Αναγκαστικά λοιπόν χρησιμο-
ποιούμε τομή ττ (δκ α), που τέ-
μνει τις τρεις ράβδους σύνδεσης
των δύο δίσκων.

Έτσι απομονώνουμε τον επάνω δίσκο ΓΔΖ (δκ β) και εξε-
τάζουμε την ισορροπία του κάτω απ' την επίδραση των δυνά-
μεων $1t$, S_2 , S_4 και S_7 , τις οποίες εισάγουμε εφελκυστικές.

$$(\sum M)_\Theta^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 1 \cdot 1,5a + S_2 \cdot 3a = 0 \Rightarrow S_2 = -0,5t$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -S_4 + 0,5 = 0 \Rightarrow S_4 = 0,5t$$

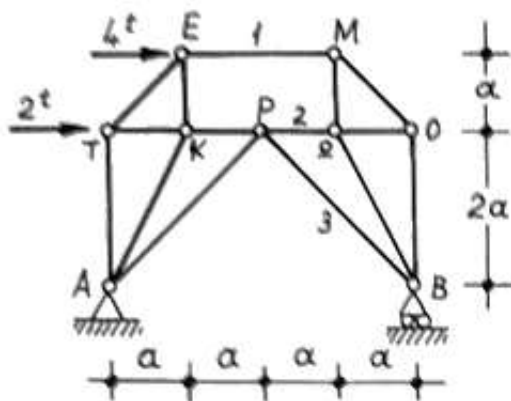
$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow 1 - S_7 = 0 \Rightarrow S_7 = 1t$$

Μετά τον υπολογισμό των δυνάμεων των ράβδων 2, 4 και 7, ή έστω και μιάς απ' αυτές, συνεχίζουμε εξετάζοντας την ισορροπία κάθε κόμβου (αναλυτικά ή γραφικά).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Ο υπολογισμός των αντιδράσεων εδώ δεν ήταν απαραίτητος, ε-

πειδή για την ισορροπία του παραπάνω δίσκου οι αντιδράσεις δεν εμφανίστηκαν πουθενά. Έγινε για την περίπτωση που εξετάζοταν η ισορροπία του κάτω δίσκου ΑΒΕ, αλλά και για να δείχτεί το αδύνατο της επίλυσης με γραφική ή αναλυτική μέθοδο.



3. Του σύνθετου επίπεδου δικτυώματος του σχήματος να αντιμετωπιστεί, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η αναλυτική ή γραφική του επίλυση.

Λύση

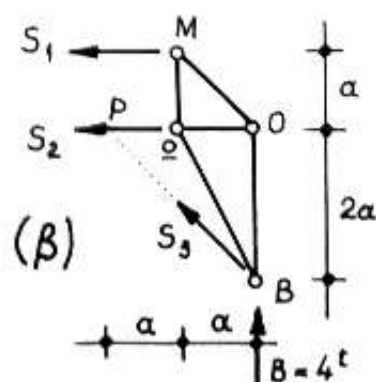
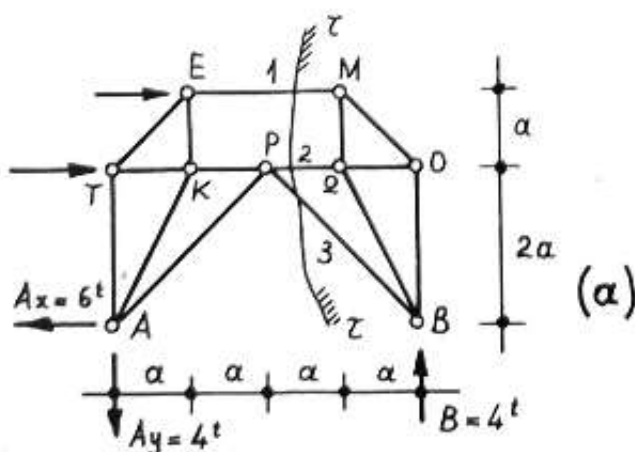
Το παραπάνω δικτύωμα είναι στερεό, αφού αποτελείται απ' τους δίσκους ΑΡΚΕΤΑ και ΒΡΟΜΟΒ που συνδέονται μεταξύ τους μέσω της άρθρωσης Ρ και της ράβδου ΕΜ. Άλλωστε ισχύει και η σχέση $\rho_{εε} + \rho_{εζ} = 2κ$, αφού $15 + 3 = 2 \cdot 9$.

Ο υπολογισμός των αντιδράσεων, ευχερής όπως και προηγούμενα, δίνει:

$$(\sum M)_A^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2a + 4 \cdot 3a - B \cdot 4a = 0 \Rightarrow B = 4^t$$

$$\sum y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -Ay + 4 = 0 \Rightarrow Ay = 4^t$$

$$\sum x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow -Ax + 2 + 4 = 0 \Rightarrow Ax = 6^t$$



Οστόσο ούτε το διάγραμμα Cremona ούτε η αναλυτική μέθοδος ισορροπίας των κόμβων οδηγεί σε προσδιορισμό δύναμης οποιασδήποτε ράβδου.

Προσφεύγουμε λοιπόν στην τομή $\tau\tau$ (βλ. α), που τέμνει τις ράβδους 1, 2 και 3. Έτσι απομονώνεται ο δίσκος ΒΔΜΟΒ (βλ. β), στον οποίο ασκούνται η αντίδραση $B=4t$ και οι δυνάμεις S_1 , S_2 και S_3 που εισάγονται εφελκυστικές. Έτσι έχουμε:

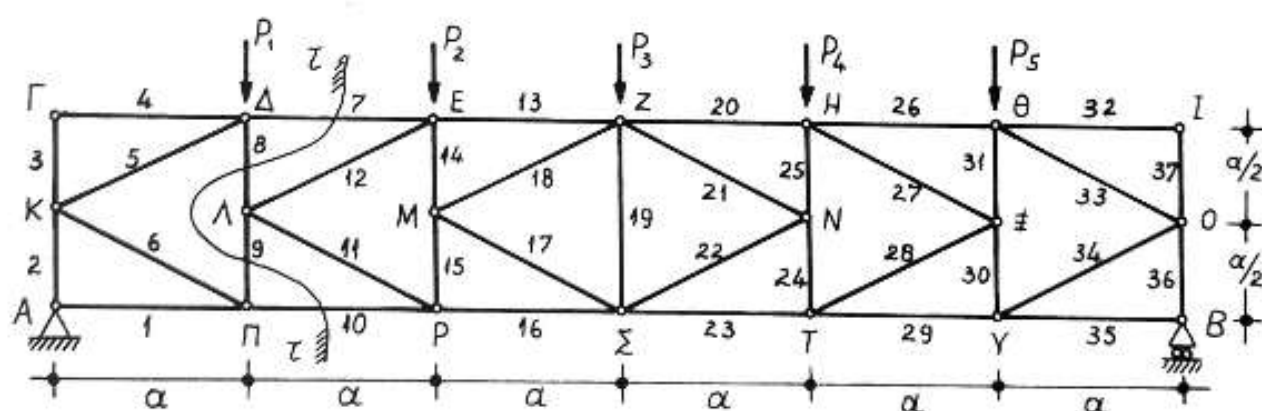
$$(\sum M)_P^+ = 0 \Rightarrow -S_1 \cdot a - 4 \cdot 2a = 0 \Rightarrow S_1 = -8t$$

$$\sum y^+ = 0 \Rightarrow 4 + S_3 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow S_3 = -\frac{4}{0,707} = -5,657t$$

$$\sum x^+ = 0 \Rightarrow 8 - S_2 + 5,657 \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow S_2 = 8 + 4 = 12t$$

Μετά τον προσδιορισμό της S_3 ή S_1 , ο υπολογισμός του δικτυώματος με την αναλυτική ή γραφική μέθοδο είναι δυνατός, αφού μπορούμε να ξεκινήσουμε απ' τον κόμβο Β ή Μ αντίστροφα και να συνεχίσουμε κανονικά.

4. Του επίπεδου δικτυώματος τύπου "Κ" του σχήματος να εξεταστεί η επίλυσή του γραφικά ή αναλυτικά.



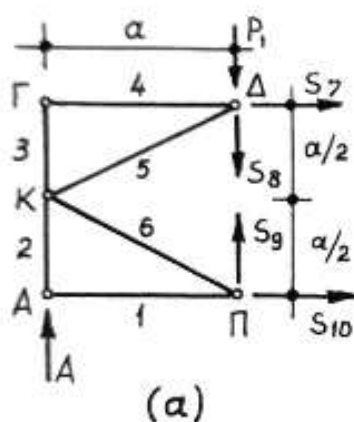
Λύση

Ολοκληρώνοντας την ανάπτυξη της μεθόδου των τομών με το παραπάνω δικτύωμα τύπου "Κ", το οποίο, όπως και τα προηγούμενα, είναι στατικά ορισμένο και σταθερό ($37+3=2 \cdot 20$), παρατηρούμε ότι,

μετά τον υπολογισμό των αντιδράσεων που δεν παρουσιάζει καμμία δυσκολία, το διάγραμμα Cremona αρχίζει κανονικά π.χ απ' τον κόμβο Α, οδηγώντας στον υπολογισμό των δυνάμεων 1, 2 και στη συνέχεια των 3 και 4.

Όμως, ήδη απ' τον κόμβο Π και μετά, είναι αδύνατη η συνέχιση του υπολογισμού των δυνάμεων των ράβδων, γιατί τόσο ε' αυτόν όσο και στους ανάλογους μ' αυτόν κόμβους Δ, Θ και Υ συντρέχουν τρεις άγνωστες δυνάμεις ράβδων.

Προσφεύγουμε λοιπόν υποχρεωτικά στην τομή ττ, εξετάζοντας την ισορροπία του αριστερού τμήματος (δκ α). Θεωρώντας εφεδρικές τις δυνάμεις των ράβδων 7, 8, 9 και 10 που κόψαμε, θα έχουμε:



$$(\sum M)_\Delta^{+} = 0 \Rightarrow A \cdot a - S_{10} \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow S_{10} = A$$

$$\sum X^{+} = 0 \Rightarrow S_7 + S_{10} = 0$$

$$\Rightarrow S_7 = -S_{10} = -A$$

Τώρα μπορούμε να συνεχίσουμε την επίλυση του δικτυώματος, φτάνοντας ως τους κόμβους Ζ και Σ, των οποίων την ισορροπία θα εξετάσουμε αφού ακολουθήσουμε αντίστοιχη πορεία υπολογισμών (με αντίστοιχη τομή φυσικά), απ' το άλλο άκρο του φορέα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

ΤΡΙΑΡΘΡΩΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

6.1 Γενικά

Τριαρθρωτός φορέας ή τριαρθρωτό τόξο ονομάζεται κάθε επίπεδη κατασκευή που αποτελείται από δύο στερεά τμήματα τα οποία συνδέονται με άρθρωση τόσο μεταξύ τους όσο και με το έδαφος.

Ανάλογα με το είδος των στερεών τμημάτων του φορέα διακρίνουμε τους ολόωμους και τους δικτυωτούς τριαρθρωτούς φορείς.

Οι τριαρθρωτοί φορείς αν και στηρίζονται με δύο αρθρώσεις στο έδαφος, παρουσιάζοντας έτσι 4 άγνωστες αντιδράσεις, ανήκουν ωστόσο στους ισοστατικούς φορείς.

Γιά τον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών που αναπτύσσονται σε τυχούσα διατομή ενδιαφέρον παρουσιάζει κυρίως ο υπολογισμός των αντιδράσεων.

Το σημαντικώτερο χαρακτηριστικό που παρουσιάζουν οι ολόωμοι τριαρθρωτοί φορείς είναι ότι οι καμπτικές ροπές που αναπτύσσονται στις διατομές τους είναι αρκετά μικρότερες απ' εκείνες που παρουσιάζονται στις απλές ολόωμες δοκούς που χρησιμοποιούνται για την κάλυψη του ίδιου ανοίγματος με τα ίδια εξωτερικά φορτία. Σε ορισμένες μάλλον περιπτώσεις, όπου είναι δυνατόν να δοθεί συγκεκριμένη παραβολική μορφή στο φορέα, είναι δυνατός ο μηδενισμός των καμπτικών ροπών σε όλο το μήκος του φορέα!

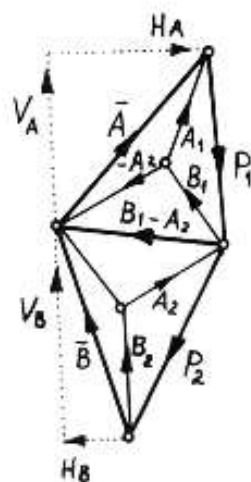
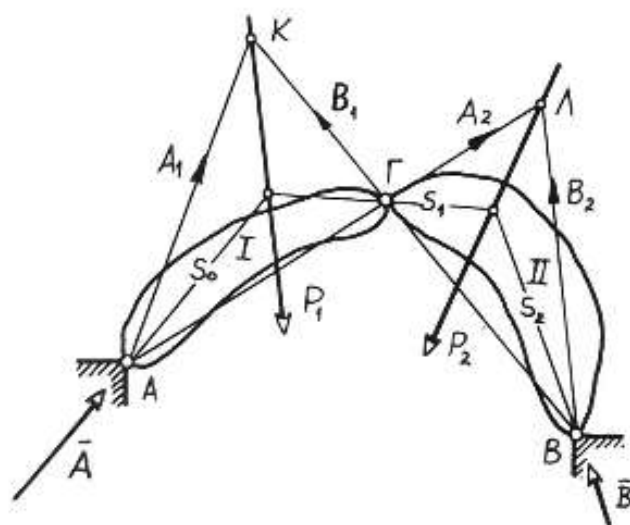
Είναι επομένως οι τριαρθρωτοί φορείς γενικά οικονομικώτεροι των συνήδων δοκών, αλλά μόνο σε κατασκευές μεγάλων ανοιγμάτων. Και τούτο διότι ένα σημαντικό κόστος ενός τριαρθρωτού φορέα προκύπτει για την εξασφάλιση της εσωτερικής στατικής λειτουργίας των τριών αρθρώσεων του.

6.2 Υπολογισμός των αντιδράσεων

α) Γραφικά

Θεωρούμε τον τριαρθρωτό φορέα του σχήματος, που αποτελείται απ' τα τμήματα I και II, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους στο Γ με άρθρωση, και στηρίζονται στο έδαφος μέσω των επίσης αρθρώσεων στα σημεία A και B. Ζητούνται:

- Οι αντιδράσεις στις στηρίξεις A και B
- Η δύναμη που μεταβιβάζεται μέσω της άρθρωσης Γ , όταν στο τμήμα I ενεργεί η συνισταμένη δύναμη P_1 και στο II η P_2 .



Εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας μπορούμε ν' ακολουθήσουμε την παρακάτω σειρά βεργιών.

Αν στο σύστημα ενεργούσε μόνο η δύναμη P_1 , τότε

οι αντιδράσεις που θ' αναπτύσσονται στις στερίξεις A και B θα ήταν αντίστοιχα η A_1 και η B_1 , απ' τις οποίες η δεύτερη έχει άξονα την $B\Gamma$ ενώ η πρώτη περνάει απ' το A και το σημείο τομής K της B_1 με την P_1 .

Όμοια, αν η P_2 ενεργούσε μόνη, θα εμφανίζονταν στις στερίξεις οι αντιδράσεις A_2 και B_2 , εκ των οποίων η πρώτη έχει φορέα την $A\Gamma$ ενώ η δεύτερη περνάει απ' το B και το σημείο τομής Λ της A_2 με την P_2 .

Οι εντάσεις, οι διευθύνσεις και οι φορές των δυνάμεων αυτών φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα δυνάμεων.

Όταν όμως οι δυνάμεις P_1 και P_2 ενεργήσουν μαζί, τότε το τμήμα I θα ισορροπεί κάτω απ' την επίδραση των παρακάτω δυνάμεων.

α) της P_1

β) των γνωστών ήδη αντιδράσεων B_1 και $-A_2$ που δημιουργεί το τμήμα II στο I για τις δύο περιπτώσεις φορτίσεων, και

γ) της άγνωστης αντίδρασης $\bar{A}$.

Έτσι το κλειστό δυναμοπολύγωνο των δυνάμεων P_1 , B_1 , $-A_2$ και $\bar{A}$ στο διάγραμμα δυνάμεων θα μας ορίσει την αντίδραση $\bar{A}$.

Στη συνέχεια η $\bar{B}$ θα κλείσει το δυναμοπολύγωνο των P_1 , P_2 και $\bar{A}$.

Μέσω της άρθρωσης Γ διαβιβάζεται η $B_1 - A_2$ απ' το τμήμα II προς το I και η αντίθετη προς αυτήν απ' το I προς το II.

Οι φορείς των αντιδράσεων $\bar{A}$ και $\bar{B}$ καθώς της διά του Γ διαβιβαζόμενης δύναμης είναι οι S_0 , S_2 και S_1 αντίστοιχα που σημειώνονται στο διάγραμμα θέσης.

Οι οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες των αντιδράσεων

$\bar{A}$ και $\bar{B}$ δίνουν αντίστοιχα τις οριζόντιες και κατακόρυφες καταπονήσεις του φορέα.

Σημείωση: Ίδιο αποτέλεσμα των αντιδράσεων θα μπορούσαμε να είχαμε αν μετά τις δύο φάσεις φόρτισης θεωρούσαμε την αντίδραση για την κάθε στήριξη σαν συνισταμένη των επί μέρους αντιδράσεων που εμφανίστηκαν χωριστά σε κάθε φάση φόρτισης.

Δηλαδή: $\bar{A} = A_1 + A_2$ και $\bar{B} = B_1 + B_2$.

β) Αναλυτικά

Για τυχούσα εξωτερική φόρτιση του τριαρθρωτού φορέα, αναπτύσσονται στις στήριξεις των αρθρώσεων Α και Β δύο γενικά αντιδράσεις που αναλύονται σε τέσσερις συνολικά οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες:

$$V_A, H_A \text{ και } V_B, H_B.$$

Για τον αναλυτικό προσδιορισμό των τεσσάρων αντιδράσεων, σχηματίζουμε τις τρεις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας

$$(\sum M)_A^{\uparrow+} = 0, \quad \sum y^{\uparrow+} = 0, \quad \sum x^{\rightarrow+} = 0$$

και επί πλέον μία τέταρτη εξίσωση, απ' τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών στη θέση της άρθρωσης Γ,

$$(\sum M)_{\Gamma_{αριστ.}}^{\uparrow+} = 0 \quad \text{ή} \quad (\sum M)_{\Gamma_{δεξ.}}^{\uparrow+} = 0,$$

σχηματίζοντας το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών μόνον των αριστερά ή δεξιά του Γ ευρισκομένων δυνάμεων.

Συνήθως συμφέρει ν' αρχίζουμε απ' την εξίσωση αυτή και στη συνέχεια να καταλήγουμε στις στερεοστατικές. Συγκεκριμένα:

α) Αν οι στήριξεις είναι στο ίδιο επίπεδο (ισοϋψείς), η εξίσωση $(\sum M)_A^{\uparrow+} = 0$ θα μας δώσει κατ' ευθείαν τη V_B , ενώ στη συνέχεια η $(\sum M)_{\Gamma_{δεξ.}}^{\uparrow+} = 0$ θα μας δώσει την H_B .

Τέλος οι εξισώσεις $\sum x^{\rightarrow+} = 0$ και $\sum y^{\uparrow+} = 0$ θα μας δώσουν

αντίστοιχα τις υπόλοιπες H_A και V_A .

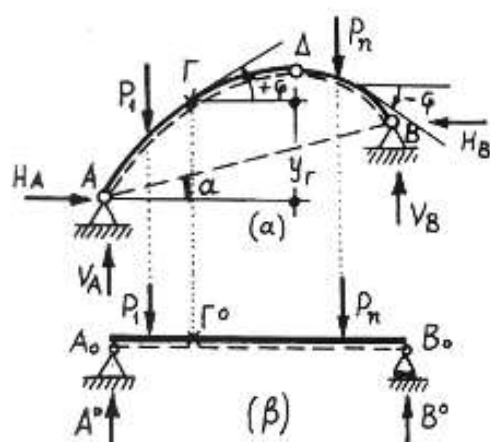
β) Αν οι στηρίξεις είναι ανισοϋγείς, το σύστημα των εξισώσεων

$$(\sum M)_{\Gamma_{\delta\epsilon\zeta}}^{\lambda+} = 0 \quad \text{και} \quad (\sum M)_A^{\lambda+} = 0$$

θα μας δώσει τις αντιδράσεις H_B και V_B , ενώ για τις H_A και V_A ακολουθείται η ίδια με τις ισοϋγείς πορεία ($\sum x^{\lambda+} = 0$, $\sum y^{\lambda+} = 0$).

6.3 Υπολογισμός της έντασης

Μετά τον προσδιορισμό των αντιδράσεων, ο υπολογισμός των εντατικών μεγεθών M, Q, N σε κάθε διατομή γίνεται βάσει του ορισμού, μέσω των αριστερά (ή δεξιά) της διατομής ευρισκομένων δυνάμεων (φορτίων και αντιδράσεων).



Αν ο φορέας έχει καμπύλο άξονα τότε καταφεύγουμε στις σχέσεις:

$$M_{\Gamma} = M_{\Gamma_0} - H \cdot y_{\Gamma} \quad \text{δυνα}$$

$$Q_{\Gamma} = Q_{\Gamma_0} \sin \varphi - H \eta \mu(\varphi - \alpha)$$

$$N_{\Gamma} = -Q_{\Gamma_0} \eta \mu \varphi - H \sin(\varphi - \alpha)$$

όπου : α η γωνία που σχηματίζει η AB με την οριζόντια που περνάει απ' το A ,

φ η γωνία κλίσης της υπόψη διατομής,

H η συνιστώσα της H_A ή H_B κατά τη διεύθυνση AB

$M_{\Gamma_0}, Q_{\Gamma_0}$ η καμπτική ροπή και η τέμνουσα δύναμη αντίστοιχα στη διατομή Γ_0 της αντίστοιχης προς το φορέα αμφίερειστης A_0B_0 , που φορτίζεται όπως ο αρχικός φορέας.

Στην άρθρωση Δ , πρέπει φυσικά να ισχύει:

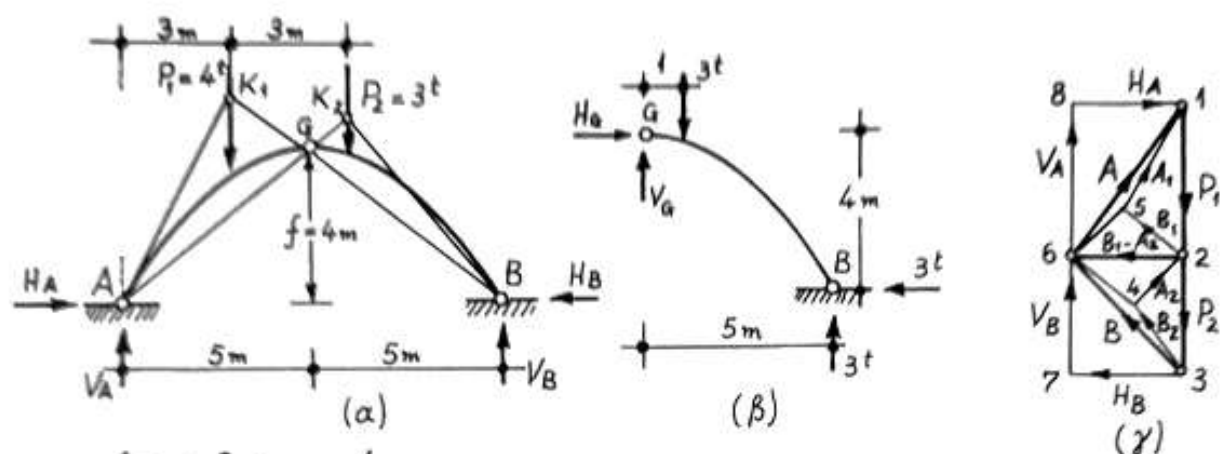
$$M_{\Delta} = 0.$$

6.4 Παράδειγμα

Του παραβολικού τριαρθρωτού φορέα που εικονίζεται στο σχήμα, να υπολογιστούν αναλυτικά και γραφικά

- οι αντιδράσεις στις στηρίξεις και
- η δια της άρθρωσης G διαβιβαζόμενη δύναμη.

Λύση



Αναλυτικά

Αν H_A, H_B και V_A, V_B είναι οι οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες των αντιδράσεων στις στηρίξεις A και B , απ' τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας, σε συνδυασμό με τα όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 6.2, έχουμε:

$$(\Sigma M)_A^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 4 \cdot 3 + 3 \cdot 6 - V_B \cdot 10 = 0 \Rightarrow V_B = 3^t$$

$$(\Sigma M)_{G \text{ δεξ}}^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1 - 3 \cdot 5 + H_B \cdot 4 = 0 \Rightarrow H_B = 3^t$$

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow V_A - 4 - 3 + 3 = 0 \Rightarrow V_A = 4^t$$

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow H_A - 3 = 0 \Rightarrow H_A = 3^t$$

Αν H_G και V_G είναι η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που διαβιβάζεται δια της άρθρωσης G , εξετάζοντας την ισορροπία του δεξιού τμήματος (εκ. β), θα έχουμε:

$$\Sigma x^{\rightarrow+} = 0 \Rightarrow H_G - 3 = 0 \Rightarrow H_G = 3^t$$

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow V_G - 3 + 3 = 0 \Rightarrow V_G = 0$$

Γραφικά

Στο σχήμα (α) φέρνουμε τη BG που τέμνει την P_1 στο K_1 , καθώς και την AG που τέμνει την P_2 στο K_2 .

Στη συνέχεια φέρνουμε την AK_1 και τη BK_2 .

Στο σχήμα (γ) παίρνουμε κατακόρυφα με κλίμακα $1\text{cm} \hat{=} 2\text{t}$ τις δυνάμεις P_1 και P_2 .

Η δύναμη P_1 αναλύεται στις B_1 και A_1 , παράλληλες αντίστοιχα προς τις BK_1 και AK_1 .

Επίσης η P_2 αναλύεται στις B_2 και A_2 , παρ/λες αντίστοιχα προς τις BK_2 και AK_2 .

Έτσι ορίζονται τα σημεία 5 και 4, τα οποία μαζί με το 2 αποτελούν τις τρεις κορυφές παραλληλογράμμου, του οποίου η τέταρτη κορυφή - δηλαδή το σημείο 6 - δίνει, μετά το κλείσιμο του δυναμοπολυγώνου, τις αντιδράσεις A και B αντίστοιχα.

Απ' την ανάλυση των αντιδράσεων σε κατακόρυφες και οριζόντιες συνιστώσες, προκύπτει:

$$V_A = 4^t \quad H_A = 3^t$$

$$\text{και} \quad V_B = 3^t \quad H_B = 3^t$$

Η δύναμη $(26) = B_1 - A_2$, είναι η διαβιβαζόμενη απ' το δεξιό στο αριστερό τμήμα, ενώ η αντίθετη προς αυτή δύναμη $(62) = -(B_1 - A_2)$, η διαβιβαζόμενη απ' το αριστερό προς το δεξιό τμήμα.

Σύμφωνα με το διάγραμμα δυνάμεων (σχ. γ), η δύναμη αυτή είναι οριζόντια και έχει ένταση 3^t .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

ΤΡΙΒΗ

7.1 Γενικά

Όταν δύο σώματα εφάπτονται μεταξύ τους, εμφανίζεται πάντοτε μία αντίσταση που τείνει να εμποδίσει την ολίσθηση του ενός ως προς το άλλο. Την αντίσταση αυτή ονομάζουμε *τριβή*.

Έτσι, για να προκαλέσουμε π.χ. ολίσθηση μεταξύ δύο πλάκων που εφάπτονται συμπιεζόμενες από δυνάμεις, είναι απαραίτητο να εφαρμόσουμε στις πλάκες ορισμένες άλλες δυνάμεις, που είναι απαραίτητες για να ξεπεράσουμε τις αντιστάσεις που προέρχονται απ' την τριβή.

Την έρευνα πάνω στην τριβή μεταξύ δύο εφαισόμενων στερεών επιφανειών έκανε πρώτος ο Coulomb.

Τα αποτελέσματα των πειραμάτων αυτών μπορούν να συνοψιστούν στους παρακάτω νόμους.

1. Η ολική τριβή είναι ανεξάρτητη απ' την έκταση των επιφανειών που βρίσκονται σ' επαφή.

2. Η ολική τριβή είναι ανάλογη της δύναμης που ασκείται κάθετα στην επιφάνεια επαφής και

3. Για μικρές ταχύτητες ολίσθησης, η ολική τριβή είναι πρακτικά ανεξάρτητη απ' τις ταχύτητες αυτές. Ωστόσο τα πειράματα δείχνουν ότι η δύναμη F , που είναι απαραίτητη για την έναρξη της ολίσθησης, είναι μεγαλύτερη απ' εκείνη που χρειάζεται για τη διατήρηση της ολίσθησης αυτής.

Οι παραπάνω νόμοι μπορούν να διατυπωθούν μαθηματικά με τον παρακάτω απλό τύπο:

$$F = \mu \cdot N$$

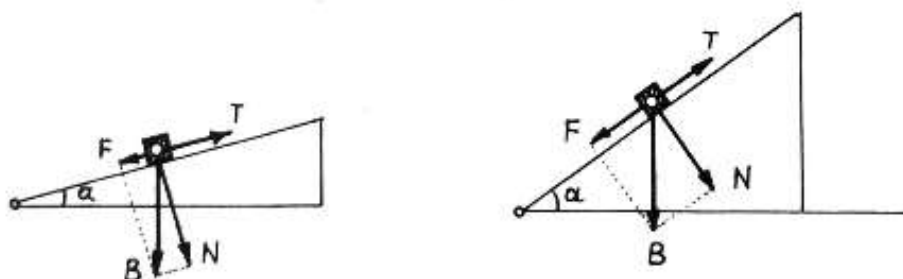
όπου μ είναι σταθερός αδιάστατος αριθμός, που ονομάζεται συντελεστής τριβής.

Αν ως δύναμη F θεωρήσουμε εκείνη που χρειάζεται για την έναρξη της ολίσθησης, ο αριθμός μ ονομάζεται συντελεστής στατικής τριβής· αν όμως F είναι η ελαφρά μικρότερη δύναμη που απαιτείται για τη διατήρηση της ολίσθησης που ήδη άρχισε, τότε ο μ ονομάζεται συντελεστής κινητικής τριβής.

Και οι δύο συντελεστές ποικίλουν αρκετά, ανάλογα με τη φύση και τις συνθήκες των επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή.

7.2 Γωνία τριβής

Πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, του οποίου η κλίση είναι πολύ μικρή, θέτουμε ένα σώμα και παρατηρούμε ότι τούτο ηρεμεί.



Η συνισταμένη F του βάρους του σώματος κατά την διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου δεν μπορεί να κινήσει το σώμα προς τα κάτω, γιατί υπάρχει η στατική τριβή T που εμφανίζεται και όταν το σώμα ηρεμεί ως προς το κεκλιμένο επίπεδο.

Το σώμα θα ισορροπεί πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο εφ' όσον ισχύει η σχέση:

$$F \leq T$$

Αν όμως η γωνία α του κεκλιμένου επιπέδου αυξάνεται συνεχώς, θα παρατηρήσουμε ότι για μια ορισμένη τιμή της α , το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει ομαλά.

Η τιμή αυτή της γωνίας α ονομάζεται γωνία τριβής. Τότε η συνιστώσα F του βάρους του σώματος είναι ίση και αντίθετη προς την τριβή ολίσθησης T και ισχύουν οι σχέσεις:

$$T = F \quad \text{και} \quad T = \mu \cdot N \quad (1)$$

Επειδή όμως είναι $F = B \eta \mu \alpha$ και $N = B \sigma \nu \alpha$, απ' την την εξίσωση (1) προκύπτει:

$$\mu = \frac{T}{N} = \frac{B \eta \mu \alpha}{B \sigma \nu \alpha} \quad \text{Άρα} \quad \mu = \varepsilon \varphi \alpha,$$

και συνεπώς ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ισούται με την τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας τριβής.

7.3 Τριβή κύλισης

Είναι φανερό ότι η προσπάθεια την οποία καταβάλλουμε για την κύλιση ενός σώματος είναι πολύ μικρότερη απ' την προσπάθεια εκείνη που καταβάλλουμε για να πετύχουμε την ολίσθηση της ίδιας μάζας πάνω στο ίδιο πάντοτε υποστήριγμα.

Γιαυτό στις διάφορες εφαρμογές προσπαθούμε να έχουμε γενικά κύλιση αντί για ολίσθηση (τροχοί, ρουλεμάν κ.λ.π).

Η τριβή που αναπτύσσεται όταν ένα στερεό σώμα κυλίνεται πάνω σε άλλο στερεό σώμα ονομάζεται τριβή κύλισης. Είναι ανάλογη προς την κάθετη δύναμη N και

εξαρτάται απ' τη φύση των επιφανειών.

Η τριβή κύλισης έχει ιδιαίτερη σημασία για τη μελέτη της κίνησης των διαφόρων οχημάτων.

Ονομάζεται συντελεστής έλξης ενός οχήματος, ο λόγος της δύναμης έλξης ενός οχήματος όταν αυτό κινείται ομαλά, προς την κάθετη δύναμη, με την οποία το όχημα πιέζει το δρόμο. Δηλαδή

$$\varphi = \frac{F_e}{N}$$

Για την κύλιση τροχών με ειδικότητα στεφάνη πάνω σε κοινό δρόμο, ο συντελεστής έλξης είναι περίπου 0,03, ενώ για τα διδηροδρομικά οχήματα 0,004.

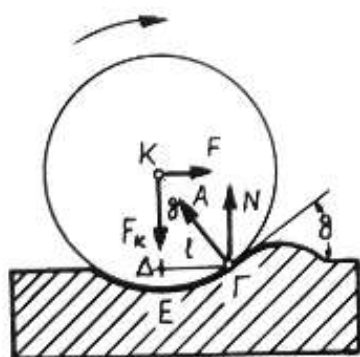
7.4 Προσδιορισμός της τριβής κύλισης

Θεωρούμε μια κατακόρυφη τομή κυλίνδρου, ο οποίος κυλίεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο.

Παρατηρούμε ότι ο κύλινδρος δεν τίθεται σε κίνηση, αν η ελκτική δύναμη F δεν αποκτήσει μια ορισμένη τιμή.

Εκτός απ' τη δύναμη F , ενεργούν πάνω στον κύλινδρο η κατακόρυφη δύναμη F_k του βάρους του και η αντίδραση A του επιπέδου στήριξης.

Δεχόμενοι την ισορροπία του συστήματος, η A θα είναι ίση και αντίθετη με τη συνισταμένη των F_k και F .



Αν l είναι η απόσταση $ΓΔ$ και N η κατακόρυφη συνιστώσα της A , η ροπή της N ως προς τον άξονα K , είναι

$$M_k = N \cdot l$$

Η ροπή αυτή αντιστέκεται στην κίνηση και ονομάζεται ροπή κύλισης.

Αλλά προφανώς είναι $F_k = N$. Άρα $M_k = F_k \cdot \ell$. Δηλαδή η ροπή κύλισης M_k είναι ανάλογη προς τη δύναμη F_k με την οποία ο κύλινδρος πιέζει το επίπεδο.

Το ℓ , είναι εδώ ο συντελεστής τριβής κύλισης και παριστάνει μήκος.

Για να κυλίεται ο κύλινδρος με σταθερή ταχύτητα, θα πρέπει η F να δίνει ροπή ίση και αντίθετη προς τη M_k .

Θεωρώντας τις ροπές ως προς τον στιγμιαίο άξονα E που βρίσκεται κάτω απ' τον K , αν R η ακτίνα, θα έχουμε:

$$F \cdot R = N \cdot \ell = F_k \cdot \ell$$

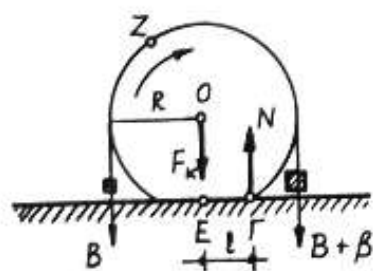
Άρα:
$$F = \frac{\ell}{R} F_k$$

7.5 Μέτρηση του συντελεστή τριβής κύλισης

Ο συντελεστής της τριβής κύλισης μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί με την παρακάτω διαδικασία.

Τοποθετούμε τον κύλινδρο του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε το συντελεστή τριβής κύλισης, πάνω σε οριζόντιο επίπεδο.

Σε σημείο Z της επιφάνειάς του, στερεώνεται νήμα, στα άκρα του οποίου εξαρτώνται δύο ίσα βάρη B .



Στο ένα απ' αυτά βάζουμε μικρά πρόσθετα βάρη β , μέχρι που να πετύχουμε την κατάργηση της πρεμίας του κυλίνδρου.

Έστω N η κατακόρυφη συνιστώσα της αντίδρασης του επιπέδου, που εφαρμόζεται σε σημείο E . Η GE είναι τότε ο ζητούμενος συντε-

λεστής τριβής κύλισης l .

Αν F_K είναι το βάρος του κυλίνδρου, παίρνοντας το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων, που ενεργούν πάνω στον κύλινδρο κατά τη στιγμή κατάργησης της πριμίας, ως προς το σημείο E , θα έχουμε:

$$(\Sigma M)_E^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow -B \cdot R - N \cdot l + (B + \beta)R = 0 \Rightarrow Nl = \beta \cdot R \quad (1)$$

Η κατακόρυφη συνιστώσα N της αντίδρασης θα προκύψει απ' τον μηδενισμό των κατακορύφων δυνάμεων:

$$\Sigma y^{\uparrow+} = 0 \Rightarrow N - B - F_K - (B + \beta) = 0 \Rightarrow N = F_K + 2B + \beta$$

Απ' την (1) βρίσκουμε τώρα την τιμή του l

$$l = \frac{\beta \cdot R}{F_K + 2B + \beta}$$

7.6 Παράδειγμα

Μία ομογενής σανίδα στηρίζεται σε κατακόρυφο τοίχο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης σε κάθε άκρο της σανίδας είναι 0,25. Να υπολογιστεί η ελάχιστη γωνία την οποία πρέπει να σχηματίζει η σανίδα με το οριζόντιο επίπεδο, χωρίς αυτή να ολισθαίνει, α) αναλυτικά και β) γραφικά.

Λύση

α) Έστω α η μικρότερη γωνία την οποία πρέπει να σχηματίζει η σανίδα με το οριζόντιο επίπεδο, ώστε να ισορροπεί.

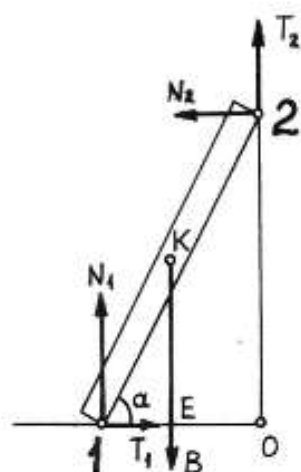
Στα άκρα 1 και 2 της σανίδας, όπου αυτή στηρίζεται στο δάπεδο και τον τοίχο αντίστοιχα, αναπτύσσονται αντιδράσεις.

Καθεμία από τις αντιδράσεις αυτές αναλύεται σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα, όπως φαίνεται στο σχήμα της επόμενης σελίδας.

Έτσι, πάνω στη σανίδα ενεργούν συνολικά (5) πέντε ομοεπίπεδες δυνάμεις, εκ των οποίων η μία είναι το βάρος B της σανίδας, ενώ οι άλλες είναι οι συνιστώσες N_1, T_1 και N_2, T_2 των αντιδράσεων της στα σημεία στηρίξης 1 και 2.

Οι 4 απ' αυτές άγνωστοι θα βρεθούν ουνδιαστικά απ' την επίλυση συστήματος (5) πέντε εξισώσεων, εκ των οποίων τρεις θα εκφράζουν την ισορροπία της σανίδας και δύο τη σχέση που συνδέει κάθε συνιστώσα της αντίδρασης με την αντίστοιχη προς αυτήν κάθετη, μέσω του συντελεστή τριβής, που είναι ο 5^{ος} άγνωστος.

Έτσι έχουμε τις εξισώσεις:



$$(\Sigma M)_2^+ = 0 \Rightarrow N_1 \cdot (OI) - T_1 \cdot (O2) - B \cdot (OE) = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma y^+ = 0 \Rightarrow N_1 + T_2 - B = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma x^+ = 0 \Rightarrow T_1 - N_2 = 0 \quad (3)$$

$$T_1 = \mu N_1 \quad (4)$$

$$T_2 = \mu N_2 \quad (5)$$

Απ' τις παραπάνω εξισώσεις οι υπ' αρ. (2) και (3) γίνονται αντίστοιχα λόγω των (4) και (5):

$$(2) : N_1 + \mu N_2 = B \quad (2')$$

$$(3) : \mu N_1 = N_2 \quad (3')$$

Αν τώρα στη (2') θέσουμε την τιμή της N_2 που παίρνουμε απ' την (3'), προκύπτει:

$$N_1 + \mu^2 N_1 = B \quad \text{ή} \quad N_1 (1 + \mu^2) = B \quad (2'')$$

Απ' το ορθογώνιο τρίγωνο (102) βρίσκουμε:

$$(OI) = (12) \sin \alpha \quad (O2) = (12) \eta \mu \alpha \quad \text{και} \quad OE = \frac{(OI)}{2} = \frac{(12)}{2} \sigma \omega \alpha.$$

Επομένως η (1) γίνεται:

$$N_1 \cdot (12) \text{ δυνά } - T_1 \cdot (12) \text{ ημά } - B \frac{(12)}{2} \text{ δυνά } = 0$$

$$\text{ή } 2 \cdot N_1 \text{ δυνά } - 2 T_1 \cdot \eta \mu \alpha - B \text{ δυνά } = 0$$

Στην εξίσωση αυτή, αν αντικαταστήσουμε την τιμή της T_1 απ' την (4) και της B απ' την (2"), παίρνουμε:

$$2 N_1 \text{ δυνά } - 2 \mu N_1 \eta \mu \alpha - N_1 (1 + \mu^2) \text{ δυνά } = 0$$

$$2 \mu \eta \mu \alpha = 2 \text{ δυνά } - (1 + \mu^2) \text{ δυνά }$$

$$\text{ή } 2 \mu \eta \mu \alpha = (2 - 1 - \mu^2) \text{ δυνά }.$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση:

$$\epsilon \phi \alpha = \frac{1 - \mu^2}{2 \mu}.$$

Στην τελευταία σχέση, βάζοντας ήδη την τιμή του $\mu = 0,25$, βρίσκουμε:

$$\epsilon \phi \alpha = \frac{1 - 0,0625}{0,5} = 1,875.$$

Άρα η ζητούμενη γωνία είναι $\alpha = 61^\circ 55' 39''$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Παρατηρούμε ότι η τιμή της γωνίας α εξαρτάται μόνο απ' το συντελεστή τριβής ολίσθησης μ και είναι ανεξάρτητη απ' το βάρος, το μήκος, τη διατομή και το ειδικό βάρος της εα-νίδας, μεγέθη που αλλιώστε και γιαυτό δεν δόθηκαν.

β) Το πρόβλημα είναι δυνατό να επιλυθεί γραφικά αν λάβουμε υπόψη:

ι) ότι ο δοσμένος συντελεστής τριβής είναι ο λόγος της οριζόντιας προς την κάθετη συνιστώσα της αντίδρασης που δημιουργείται στο σημείο επαφής της σκάλας με την επιφάνεια τριβής, και

όπως και της AN_1), φέρνουμε απ' το Σ την παρ/λη της $\Gamma 2$, ορίζοντας στον κατακόρυφο τοίχο το σημείο E .

Έτσι προέκυψε το τυχόν μήκος AE της εκάλης, που ισορροπεί σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, σχηματίζοντας τη ζητούμενη γωνία ω , η οποία μετρούμενη με μοιρογνώμονιο προκύπτει $\omega = 62^\circ$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν δίνεται το μήκος ℓ της εκάλης, τότε είναι εύκολη η τελική της θέση $\Phi\Lambda$. Πραγματικά, αν πάρουμε πάνω στην AE το τμήμα $AD = \ell$ και απ' το Δ φέρουμε παρ/λη της OA , ορίζουμε στην OE το Λ , απ' όπου φέρνουμε τελικά τη $\Lambda\Phi$ παρ/λη της AE .

2. Όμοια, αν δίνεται το βάρος B της εκάλης είναι πολύ εύκολος ο προσδιορισμός των αντιδράσεων $\bar{A}$ και $\bar{E}$ στις στηρίξεις της με τις οριζόντιες και κατακόρυφες προβολές τους, όπως φαίνεται στο δυναμοτρίγωνο του σχήματος. Έτσι, αν π.χ. $B = 100 \text{ κρ}$, προκύπτουν:

$$\bar{A} = 97 \text{ κρ} \quad \text{και} \quad \bar{E} = 24 \text{ κρ},$$

με προβολές αντίστοιχα:

$$\text{οριζόντιες: } T_1 = 23,5 \text{ κρ} \quad N_2 = 23,5 \text{ κρ}$$

$$\text{κατακόρυφες: } N_1 = 94 \text{ κρ} \quad T_2 = 6 \text{ κρ}.$$

3. Οι τιμές αυτές επαληθεύονται επίσης από αναλυτικές σχέσεις που ήδη βρήκαμε. Έτσι,

$$\text{από (2')} \Rightarrow N_1 = \frac{B}{1+\mu^2} = \frac{100}{1+0,0625} = 94,12 \text{ κρ}$$

$$\text{από (4)} \Rightarrow T_1 = \mu N_1 = 0,25 \cdot 94,12 = 23,53 \text{ κρ}$$

$$\text{από (3)} \Rightarrow N_2 = T_1 = 23,53 \text{ κρ} \quad \text{και}$$

$$\text{από (5)} \Rightarrow T_2 = \mu N_2 = 0,25 \cdot 23,53 = 5,88 \text{ κρ}.$$



$$1 \text{ cm} \hat{=} 10 \text{ κρ}.$$

ΜΕΡΟΣ Β'

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

8.1 Γενικά

Όπως ορίσαμε στις βασικές έννοιες της Μηχανικής, υλικό σημείο είναι ένα σώμα, όχι κατ' ανάγκη μικρό, το οποίο όμως κατά την κίνησή του θεωρείται σαν μονάδα ύλης, δηλαδή η κίνηση όλων των μερών του σώματος είναι η ίδια.

Η κίνηση, που εκφράζει την αλλαγή θέσης ενός υλικού σημείου, είναι μια κατάσταση που κυριαρχεί σχεδόν σε όλα τα φυσικά φαινόμενα.

Εμφανίζεται απ' τις μεγαλύτερες μονάδες πλανητών του Σύμπαντος μέχρι τις μικρότερες μονάδες ύλης, τα άτομα, στα οποία τελικά πάλι κινούνται τα ηλεκτρόνια κ.λ.π.

Το σύνολο των θέσεων τις οποίες καταλαμβάνει διαδοχικά ένα υλικό σημείο, αποτελούν την τροχιά του.

Η κίνηση ενός υλικού σημείου μπορεί να είναι ευθύγραμμη ή καμπυλόγραμμη, αν η τροχιά του είναι αντίστοιχα ευθεία γραμμή ή καμπύλη.

Για τη μελέτη και περιγραφή μίας κίνησης ο παρατηρητής πρέπει να καθορίσει ένα σύστημα αναφοράς, το οποίο:

α) αν είναι ακίνητο, η μελετώμενη κίνηση ονομάζεται *απόλυτη*· ενώ

β) αν κινείται μιλάμε για *σχετική* κίνηση.

Έτσι π.χ. οι επιβάτες ενός σταματημένου τρένου νομίζουν ότι κινούνται όταν απέναντί τους βλέπουν ένα κινούμενο τρένο που θεωρούν σταματημένο.

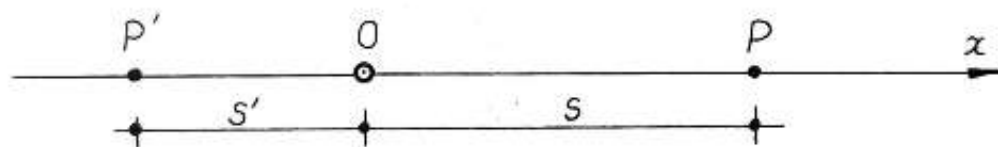
8.2 Ευθύγραμμη κίνηση

Η απλότητα που εμφανίζει η ευθύγραμμη κίνηση σε συνδυασμό με την κομψότητά της, είναι λόγοι για τους οποίους αξίζει ν' ασχοληθούμε παρακάτω.

Αν και το είδος αυτό της κίνησης δεν διεκδικεί την πλειονότητα αυτών που εμφανίζονται στη φύση, όμως σε συνδυασμό με την καμπυλόγραμμη κίνηση καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος των μηχανικών εργασιών που εμφανίζονται σήμερα στην πράξη· γιατί οι περιβόστες κινήσεις που παρουσιάζονται σε μηχανικές εργασίες (τροχοί, έμβολα, ελατήρια κ.λπ.) ανάγονται στο ίδιο επίπεδο, όπως και η ευθύγραμμη.

Όπως λοιπόν ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ευθύγραμμη είναι η κίνηση που γίνεται πάνω σε μια ευθεία.

Η θέση του υλικού σημείου P πάνω στον άξονα x του εκτήματος καθορίζεται με την απόστασή του S απ' την αρχή O του άξονα.



Έτσι η απόσταση S είναι θετική επειδή δεξιά του O , ενώ η S' είναι αρνητική γιατί το P' κινήθηκε αριστερά του O .

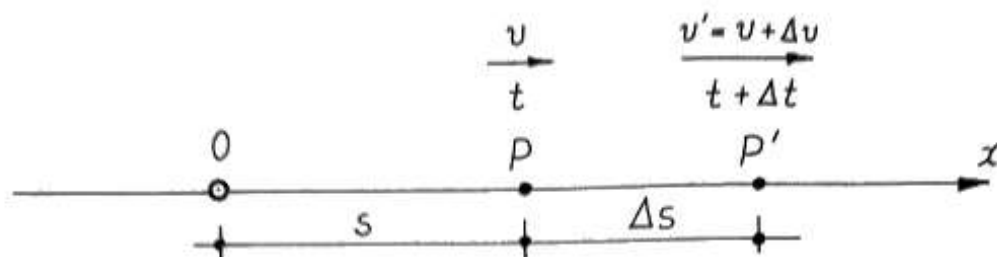
Το μήκος που διανύει το κινητό, με το θετικό ή αρνητικό του πρόσημο, καθορίζει, σε σχέση με την αρχική του θέση, την τελική θέση του κινητού πάνω στον άξονα.

8.2.1 Μετατόπιση

Αν γνωρίζουμε το χρόνο t ο οποίος αντιστοιχεί στις διαφορετικές θέσεις του σημείου κατά την κίνησή του, τότε γνωρί-

ζούμε την κίνηση του υλικού σημείου.

Αν το σημείο P του παρακάτω σχήματος, καθώς κινείται πάνω στον άξονα, φθάσει στη θέση P' κατά τη διάρκεια χρό-



νου Δt , η διαφορά Δs της απόστασης των δύο θέσεων απ' το σημείο αναφοράς O ονομάζεται γραμμική μετατόπιση ή απλά διάστημα του κινητού.

8.2.2 Ταχύτητα

Ονομάζουμε μέση ταχύτητα v_M του κινητού, το πηλίκον του διαστήματος που έκανε το κινητό, διά του χρόνου, μέσα στον οποίο κινήθηκε· δηλαδή:

$$v_M = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Αν ο χρόνος Δt είναι πολύ μικρός, έτσι ώστε να τείνει στο μηδέν, τότε δεν υπάρχει μεταβολή στο ρυθμό κίνησης του κινητού, τότε το παραπάνω πηλίκον πλησιάζει σε μια οριακή τιμή που ονομάζεται στιγμιαία ταχύτητα ή απλά ταχύτητα και είναι:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Είναι επομένως η ταχύτητα ενός κινητού, η πρώτη παράγωγος του διαστήματος ως προς το χρόνο.

Η ταχύτητα λαμβάνεται θετική όταν η μετατόπιση αυξάνει με το χρόνο, και αρνητική όταν ελαττώνεται.

Εκφράζεται συνήθως σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο (m/sec).

8.2.3 Επιτάχυνση

Επανερχόμενοι στο σχήμα της προηγούμενης σελίδας, έστω v η στιγμιαία ταχύτητα υλικού σημείου στη θέση P .

Αν $v' = v + \Delta v$ είναι η ταχύτητα που αποκτά μετά από χρόνο Δt στο σημείο P' , θα ονομάζουμε μέση επιτάχυνση του κινητού, το πηλίκον της διαφοράς ταχύτητας Δv που παρουσιάστηκε μέσα στο χρόνο Δt , διά του χρόνου τούτου· δηλαδή:

$$a_M = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Προφανώς θα είναι $a_M > 0$ αν $v' > v$ και $a_M < 0$ αν $v' < v$.

Όπως όταν πρόκειται για ταχύτητα, έτσι και στην επιτάχυνση, διακρίνουμε όχι μόνο μέγεθος και διεύθυνση αλλά και φορά, μιάς και τα δύο μεγέθη είναι διανύσματα.

Επομένως θα θεωρούμε την επιτάχυνση ενός κινητού σαν θετική όταν η ταχύτητά του αυξάνει με το χρόνο και αρνητική στην αντίθετη περίπτωση.

Μπορεί συνεπώς η επιτάχυνση μιάς κίνησης να είναι θετική, κι όμως η ταχύτητά της να είναι αρνητική και αντίστροφα.

Αντίστοιχα με την ταχύτητα, ονομάζουμε στιγμιαία επιτάχυνση ή απλά επιτάχυνση ενός υλικού σημείου το λόγο

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad (i)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $v = \frac{ds}{dt}$ (ii), η (i) γράφεται:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Συνεπώς η επιτάχυνση ενός κινητού είναι η δεύτερη

παράγωγος του διαστήματος ως προς το χρόνο.

Αν απαλείψουμε το διαφορικό του χρόνου dt μεταξύ των σχέσεων (i) και (ii) παίρνουμε:

$$\frac{dv}{a} = \frac{ds}{v} \quad \text{ή} \quad v dv = a ds. \quad (\text{iii})$$

Η σχέση αυτή που συνδέει το διάστημα ενός κινητού με την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του, χρησιμοποιείται συχνά στις εφαρμογές.

8.3 Παραδείγματα

1. Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται ευθύγραμμα, καθορίζεται, σε σχέση με το χρόνο, απ' την εξίσωση:

$$s = 6t^2 - t^3,$$

όπου η μετατόπιση s εκφράζεται σε m και ο χρόνος t σε sec . Να γίνει η γραφική παράσταση των μεγεθών διαστήματος, ταχύτητας και επιτάχυνσης του κινητού συναρτήσει του χρόνου.

Λύση

Η ταχύτητα v του κινητού θα βρεθεί με παραγωγή της s ως προς t . δηλαδή:

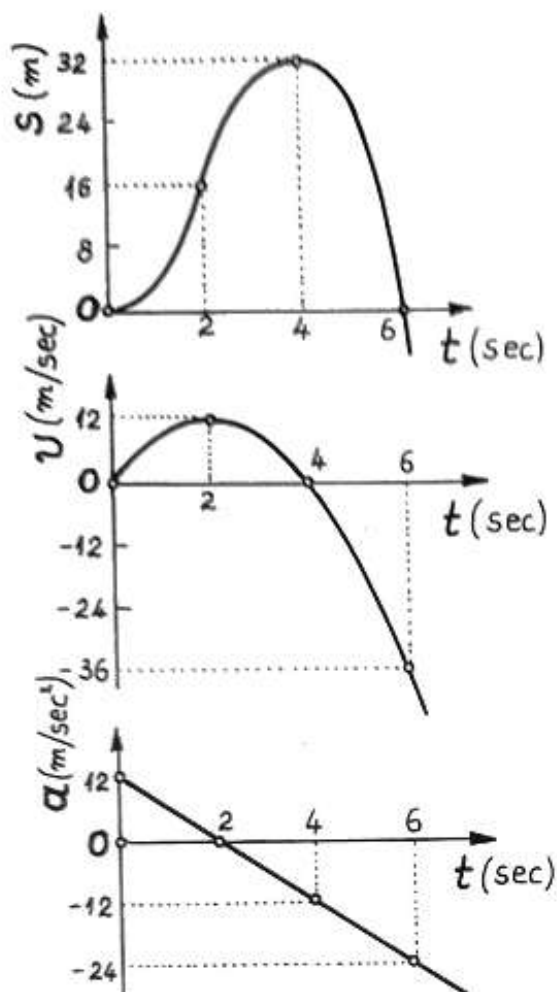
$$v = \frac{ds}{dt} = 12t - 3t^2,$$

ενώ η επιτάχυνσή του θα είναι:

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t.$$

Για τη γραφική παράσταση των ζητούμενων μεγεθών διαστήματος, ταχύτητας και επιτάχυνσης του κινητού, μετά τον υπολογισμό των ριζών των αντίστοιχων συναρτήσεων $s(t)$, $v(t)$ και $a(t)$, που είναι 0, 2, 4 και 6, διαχωρίζουμε την κίνηση του υλικού

σημείου σε τέσσερες χρονικές φάσεις,



α) $0 < t < 2$

β) $2 < t < 4$

γ) $4 < t < 6$ και

δ) $6 < t < \infty$,

και παρατηρούμε:

1. Στη θέση μηδενισμού της επιτάχυνσης (από τιμές θετικές σε αρνητικές), η ταχύτητα παρουσιάζει μέγιστη τιμή ενώ το διάστημα σημείο καμψής.

2. Σε θέσεις μηδενισμού της ταχύτητας το διάστημα παρουσιάζει ακρότατο, και μάλιστα ελάχιστο για τη χρονική στιγμή μηδενισμού της ταχύτητας κατά την οποία η επιτάχυνση έχει θετική τιμή, και μέγιστο για εκείνη τη στιγμή μηδενισμού

της ταχύτητας κατά την οποία η επιτάχυνση είναι αρνητική.

3. Για θετικές τιμές της ταχύτητας το διάστημα αυξάνεται με το χρόνο, ενώ για αρνητικές τιμές αντίστοιχα ελαττώνεται.

4. Για θετικές τιμές της επιτάχυνσης η ταχύτητα αυξάνεται με το χρόνο, ενώ για αρνητικές τιμές αντίστοιχα ελαττώνεται.

2. Της εικονιζόμενης στο σχήμα ράβδου AB μήκους ℓ , το μεν σημείο A κινείται οριζόντια και προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα v , το δε σημείο B κινείται πάνω στην OB .

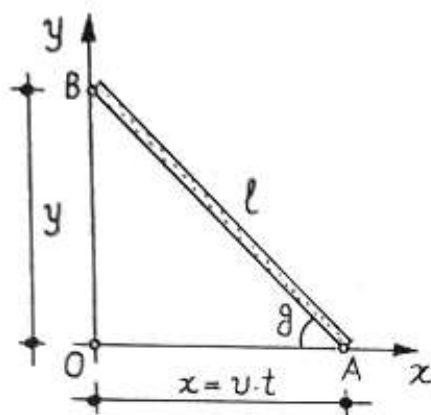
α) Να βρεθούν οι εκφράσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου για την κατακόρυφη κίνηση του

άκρου B της ράβδου, και

β) Αν $\ell = 6,24\text{m}$ και $v = 5\text{m/sec}$, να υπολογιστεί η ταχύτητα του σημείου B, όταν η γωνία θ είναι 70° .

Λύση

α) Εκλέγοντας σαν άξονα y την ευθεία OB με αρχή το O, συμπεραίνουμε απ' το σχήμα ότι η απομάκρυνση $y = OB$ του άκρου B, δίνεται απ' την εξίσωση:



$$y = \sqrt{\ell^2 - (vt)^2} \quad (1)$$

Διαφορίζοντας την (1) ως προς t, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = v_B &= \frac{(\ell^2 - (vt)^2)'}{2\sqrt{\ell^2 - (vt)^2}} \\ &= -\frac{v^2 t}{\sqrt{\ell^2 - (vt)^2}} \quad (2) \end{aligned}$$

Διαφορίζοντας πάλι την (2) ξανά ως προς t, παίρνουμε την επιτάχυνση a_B του σημείου B

$$\begin{aligned} \frac{dv_B}{dt} = a_B &= -\frac{(v^2 t)' \cdot \sqrt{\ell^2 - (vt)^2} - v^2 t \cdot (\sqrt{\ell^2 - (vt)^2})'}{\ell^2 - (vt)^2} = \\ &= -\frac{v^2 \sqrt{\ell^2 - (vt)^2} + v^2 t \cdot \frac{v^2 t}{\sqrt{\ell^2 - (vt)^2}}}{\ell^2 - (vt)^2} = -\frac{v^2(\ell^2 - (vt)^2) + v^4 t^2}{(\ell^2 - (vt)^2)^{3/2}} = \\ &= -\frac{v^2 \ell^2 - v^4 t^2 + v^4 t^2}{(\ell^2 - (vt)^2)^{3/2}} = -\frac{v^2 \ell^2}{(\ell^2 - (vt)^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

β) Αν x, y οι αποστάσεις των A και B απ' το σημείο O, τότε σε κάθε χρονική στιγμή θα ισχύει η σχέση:

$$x^2 + y^2 = \ell^2.$$

Διαφορίζοντας ως προς t, έχουμε $2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$.

$$\text{Άρα } v_B = \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Αλλ' όμως είναι $\frac{x}{y} = \tan \theta$ και $\frac{dx}{dt} = v$.

Άρα: $v_B = -\tan \theta \cdot v$.

Θέτοντας ήδη $\theta = 70^\circ$ και $v = 5 \text{ m/sec}$, παίρνουμε

$$v_B = -0,36 \cdot 5 = -1,82 \text{ m/sec}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι το B κινείται προς τα κάτω.

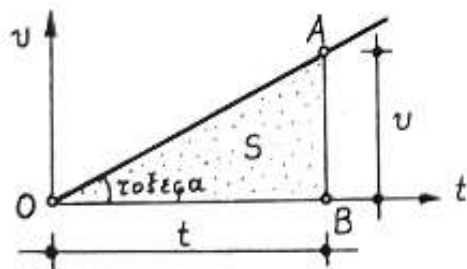
2. Η ταχύτητα του B είναι ανεξάρτητη του μήκους l της ράβδου.

3. Οι εκφράσεις της ταχύτητας και επιτάχυνσης συναρτήθει του χρόνου ισχύουν για το διάστημα $0 < t < l/v$, εφόσον το B πρέπει να εφάπτεται του τοίχου OB.

[3.] Ένα σημείο αναχωρεί απ' την ηρεμία και κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση a . Κατά τη χρονική στιγμή t έχει αποκτήσει ταχύτητα v και διανύει διάστημα s .

Να βρεθούν τύποι που συνδέουν μεταξύ τους τις τρεις αυτές ποσότητες.

Λύση



Τις ζητούμενες σχέσεις μπορούμε να πάρουμε αν μελετήσουμε το διάγραμμα $v-t$ της κίνησης του σημείου. Στο διάγραμμα αυτό η επιτάχυνση a εκφράζεται με την κλίση της ευθείας OA, η ταχύτητα v με την

τεταγμένη BA, ο χρόνος t από την τεταγμένη OB και το διάστημα S απ' το εμβαδό του τριγώνου OAB.

$$\text{Άρα } v = at \quad (1) \quad \text{και } s = \frac{1}{2} vt \quad (2)$$

$$\text{Η (2) λόγω της (1) γίνεται } s = \frac{1}{2} at^2, \quad (3)$$

και θέτοντας την τιμή του t απ' την (3) στην (1)

$$v = \sqrt{2as} \quad (4)$$

Οι παραπάνω τύποι είναι πολύ χρήσιμοι για την αριθμητική λύση προβλημάτων που αναφέρονται στην ευθύγραμμη κίνηση ενός σημείου που κινείται με σταθερή επιτάχυνση, με την προϋπόθεση ότι αναχωρεί απ' την ηρεμία ($s=0$), αλλά και απ' την αρχή μέτρησης των διαστημάτων ($s_0=0$).

8.4 Υπολογισμός της Μετατόπισης

Μια λογική και αναμενόμενη περιγραφή της κίνησης ενός σώματος, είναι, να δίνεται το διάστημα που καλύπτει τούτο σε σχέση με το χρόνο.

Όμως στον κόσμο των πραγματικών κινήσεων σήμερα, η μετατόπιση ενός σώματος σπάνια εκφράζεται συνάρτησει του χρόνου. Κι' αυτό επειδή είναι δύσκολος ο προκαθορισμός των συνθηκών κίνησης ενός σώματος, έτσι ώστε τούτο να έχει μια συγκεκριμένη θέση σε μια δοσμένη χρονική στιγμή.

Αντίθετα είναι πολύ εύκολο να καθοριστεί ένας νόμος ο οποίος θα διέπει την κίνηση του σώματος. Τότε ο χρόνος που θ' απαιτηθεί για να βρίσκεται το κινητό σε συγκεκριμένη θέση αποτελεί αντικείμενο υπολογισμού, που μπορεί να γίνει στη συνέχεια σύμφωνα με τους περιορισμούς της κίνησης.

Συνήθως λοιπόν δίνεται η επιτάχυνση συνάρτησει ενός ή περισσότερων από τα μεγέθη s , v ή t , οπότε, με κατάλληλη χρήση των τύπων που συνδέουν την ταχύτητα και την

επιτάχυνση, καταλήγουμε σε σχέση που εκφράζει τη μετατόπιση του κινητού συναρτήσει του χρόνου.

Στην περίπτωση ελεύθερης πτώσης ενός σώματος η επιτάχυνση είναι σταθερή ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Όταν όμως η κίνηση προκαλείται απ' την παραμόρφωση ελατηρίου, τότε η επιτάχυνση είναι συνάρτηση της παραμόρφωσης του ελατηρίου.

Παρακάτω θα εξετάσουμε τις κυριώτερες περιπτώσεις, σύμφωνα με τις οποίες καθορίζεται η επιτάχυνση ενός κινητού.

8.4.1 Η επιτάχυνση δίνεται συναρτήσει του χρόνου,

$$\text{δηλαδή } a = f(t).$$

Απ' τον ορισμό της επιτάχυνσης είναι ήδη γνωστό ότι:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{ή} \quad dv = a dt = f(t) dt.$$

Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της τελευταίας εξίσωσης προκύπτει

$$\int dv = \int f(t) dt \quad (i)$$

Απ' την ολοκλήρωση αυτή προκύπτει μία σταθερά, ο καθορισμός της οποίας εξασφαλίζει τη μαθηματική περιγραφή της κίνησης για το συγκεκριμένο σώμα που δόθηκε· γιατί υπάρχουν πολλές κινήσεις που ικανοποιούν τη δοσμένη επιτάχυνση $a = f(t)$, διαφέροντας π.χ. στις αρχικές ταχύτητες.

Για να καθοριστεί λοιπόν ακριβώς η κίνηση ενός υλικού σημείου, προσδιορίζονται οι λεγόμενες αρχικές συνθήκες της κίνησης, δηλαδή η αρχική ταχύτητα v_0 και η αρχική θέση S_0 κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Έτσι το αόριστο ολοκλήρωμα της σχέσης (i), αντικαθίσταται τώρα με το

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t f(t) dt \quad \text{ή} \quad v - v_0 = \int_0^t f(t) dt,$$

οπότε προκύπτει η ταχύτητα του κινητού

$$v = v_0 + \int_0^t f(t) dt.$$

Στη συνέχεια η μετατόπιση S υπολογίζεται με ολοκλήρωση της σχέσης

$$ds = v dt, \quad (ii)$$

που εκφράζει ήδη τον ορισμό της ταχύτητας.

Με ομοεικό ανάλογο της σχέσης (i), επειδή το S μεταβάλλεται από S_0 μέχρι S ενώ το t από 0 έως t , προκύπτει αντίστοιχα:

$$\int_{S_0}^S ds = \int_0^t \left[v_0 + \int_0^t f(t) dt \right] dt,$$

οπότε

$$S = S_0 + \int_0^t \left[v_0 + \int_0^t f(t) dt \right] dt.$$

8.4.2 Η επιτάχυνση δίνεται συνάρτησει της μετατόπισης

$$\text{δηλαδή} \quad a = f(s).$$

Απ' τις σχέσεις

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{και} \quad a = \frac{dv}{dt},$$

απαλείφοντας το χρόνο dt παίρνουμε

$$v dv = a ds.$$

Άρα

$$v dv = f(s) ds,$$

οπότε με ολοκλήρωση όπως και προηγούμενα προκύπτει

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{S_0}^S f(s) ds$$

$$\text{ή} \quad \left[\frac{v^2}{2} \right]_{v_0}^v = \int_{S_0}^S f(s) ds = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}.$$

Απ' την τελευταία σχέση υπολογίζεται η ταχύτητα v σε σχέση με τη μετατόπιση s .

Στη συνέχεια την ταχύτητα αυτή αντικαθιστούμε στη σχέση

$$ds = v dt,$$

ακολουθώντας, με ολοκλήρωση, το δκεπτικό της σχέσης (ii), οπότε προκύπτει η μετατόπιση s συνάρτηση του χρόνου t .

8.4.3 Η επιτάχυνση δίνεται συνάρτηση της ταχύτητας

$$\text{δηλαδή } a = f(v).$$

Εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{ή την} \quad a = v \frac{dv}{ds},$$

απ' τις οποίες παίρνουμε αντίστοιχα τη σχέση

$$f(v) = \frac{dv}{dt} \quad \text{ή την} \quad f(v) = \frac{v dv}{ds},$$

δηλαδή την

$$dt = \frac{dv}{f(v)} \quad \text{ή την} \quad ds = \frac{v dv}{f(v)}.$$

Έτσι, ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε την ταχύτητα σε σχέση με το χρόνο ή τη μετατόπιση αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας την ταχύτητα αυτή στη σχέση

$$v = \frac{ds}{dt}$$

και ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε τη σχέση της μετατόπισης του υλικού σημείου σε σχέση με το χρόνο.

8.5 Παραδείγματα

4. Από ύψος 20 m ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω σφαίρα με ταχύτητα 15 m/sec. Αν η επιτάχυνση λόγω βαρύτητας είναι $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$, να βρεθούν:

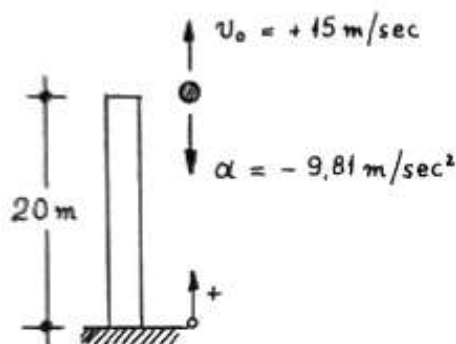
α) Η ταχύτητα και το ύψος της σφαίρας για κάθε χρονική στιγμή.

β) Το μέγιστο ύψος της σφαίρας και ο απαιτούμενος για αυτό χρόνος t .

γ) Η χρόνος πτώσης της σφαίρας στο έδαφος και η ταχύτητά της κατά την πτώση.

Να δοθούν γραφικές παραστάσεις $v-t$ και $s-t$.

Λύση



Παίρνοντας σαν αφετηρία το έδαφος, έχουμε

$s_0 = 20 \text{ m}$, $v_0 = 15 \text{ m/sec}$ και $a = -9,81 \text{ m/sec}^2$.

α) Αν' τη σχέση $a = \frac{dv}{dt}$ παίρνουμε διαδοχικά:

$$-9,81 = \frac{dv}{dt} \quad \text{ή} \quad dv = -9,81 dt$$

$$\text{Άρα} \quad \int_{v_0=15}^v dv = - \int_0^t 9,81 dt \Rightarrow [v]_{15}^v = -[9,81t]_0^t$$

$$\text{ή} \quad v - 15 = -9,81t \quad \text{και} \quad \underline{v = 15 - 9,81t}$$

Το ύψος s της σφαίρας θα βρεθεί με ολοκλήρωση της σχέσης

$$v = \frac{ds}{dt} = 15 - 9,81t,$$

δηλαδή:

$$\int_{s_0=20}^s ds = \int_0^t (15 - 9,81t) dt \Rightarrow [s]_{20}^s = \left[15t - \frac{9,81}{2}t^2 \right]_0^t$$

και συνεπώς

$$S = 20 + 15t - 4,905t^2$$

β) Όταν η σφαίρα φτάσει στο μέγιστο ύψος της, τότε θα είναι προφανώς $v = 0$.

Άρα $0 = 15 - 9,81t$ και $t = 1,53 \text{ sec}$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του t στη σχέση της μετατόπισης που βρήκαμε στην α' ερώτηση, παίρνουμε:

$$S = 20 + 15 \cdot 1,53 - 4,905 \cdot 1,53^2 = 31,47 \text{ m}$$

γ) Κατά τη στιγμή της πτώσης, εφόσον πάρθηκε σαν αφετηρία το έδαφος, θα είναι $S = 0$, δηλαδή

$$20 + 15t - 4,905t^2 = 0,$$

απ' όπου $t_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 4,905 \cdot 20}}{2 \cdot 4,905}$ $\begin{cases} t_1 = 4,06 \text{ sec} \\ t_2 = -1,004 \text{ sec} \end{cases}$

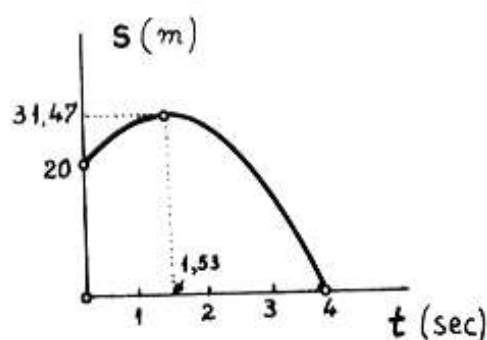
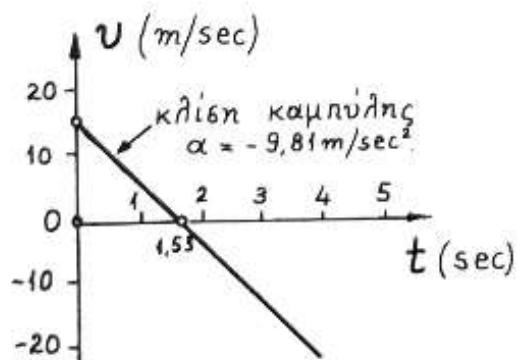
Ο αρνητικός χρόνος είναι χωρίς σημασία και παραλείπεται.

Η ταχύτητα της σφαίρας κατά τη στιγμή της πτώσης θα βρεθεί απ' την αντίστοιχη σχέση που πήραμε στην α' ερώτηση

$$v = 15 - 9,81t = 15 - 9,81 \cdot 4,06$$

ή $v = -24,83 \text{ m/sec.}$

Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις $v-t$ και $s-t$, που είναι απεικονίσεις των σχέσεων που βρήκαμε στην α' ερώτηση.



2. Υλικό σημείο κινείται πάνω σε οριζόντια ευθεία με επιτάχυνση $a = 6\sqrt[3]{s}$.

Όταν $t = 2 \text{ sec}$, η μετατόπισή του απ' την αρχή είναι $s = +27 \text{ m}$ και η ταχύτητά του $v = +27 \text{ m/sec}$.

Να υπολογιστεί η ταχύτητα, η επιτάχυνση και το διάστημα που διανύθηκε απ' το υλικό σημείο για $t = 4 \text{ sec}$.

Επίσης να χαραχτούν τα διαγράμματα $s-t$, $v-t$ και $a-t$.

Λύση

Επειδή η επιτάχυνση a δίνεται σαν συνάρτηση της μετατόπισης s , θα ολοκληρώσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$v \cdot dv = a ds, \quad \text{οπότε:}$$

$$\int v dv = \int 6s^{1/3} ds \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} + C_1 = \frac{6s^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{9}{2} s^{4/3}$$

Για τον καθορισμό της σταθεράς C_1 , επειδή (για $t = 2 \text{ sec}$) είναι $v = 27 \text{ m/sec}$ όταν $s = 27 \text{ m}$, θα έχουμε:

$$\frac{27^2}{2} + C_1 = \frac{9}{2} 27^{4/3} \quad \text{ή} \quad \frac{3^6}{2} + C_1 = \frac{3^2 \cdot 3^4}{2} \Rightarrow C_1 = 0.$$

Άρα $v^2 = 9s^{4/3}$, δηλαδή $v = 3s^{2/3}$

Αντικαθιστώντας τώρα την τιμή αυτή της v στην εξίσωση

$$v = \frac{ds}{dt},$$

παίρνουμε: $3s^{2/3} = \frac{ds}{dt} \quad \text{ή} \quad 3dt = \frac{ds}{s^{2/3}},$

και ολοκληρώνοντας,

$$3 \int dt = \int s^{-2/3} ds \quad \text{ή} \quad 3t + C_2 = \frac{s^{-2/3+1}}{-\frac{2}{3}+1} = 3s^{1/3} \quad (i)$$

Επειδή όμως για $t = 2 \text{ sec}$ είναι $s = 27 \text{ m}$, θα είναι:

$$3 \cdot 2 + C_2 = 3 \cdot 27^{1/3} \quad \text{ή} \quad 6 + C_2 = 9 \Rightarrow C_2 = 3$$

και συνεπώς η (i) γίνεται

$$3t + 3 = 3s^{1/3} \quad \text{ή} \quad 3(t+1) = 3s^{1/3}$$

και τελικά $s = (t+1)^3$.

Απ' την τελευταία εξίσωση, που συνδέει τη μετατόπιση με το χρόνο, προκύπτουν τελικά οι ζητούμενες εξισώσεις:

$$s = (t+1)^3$$

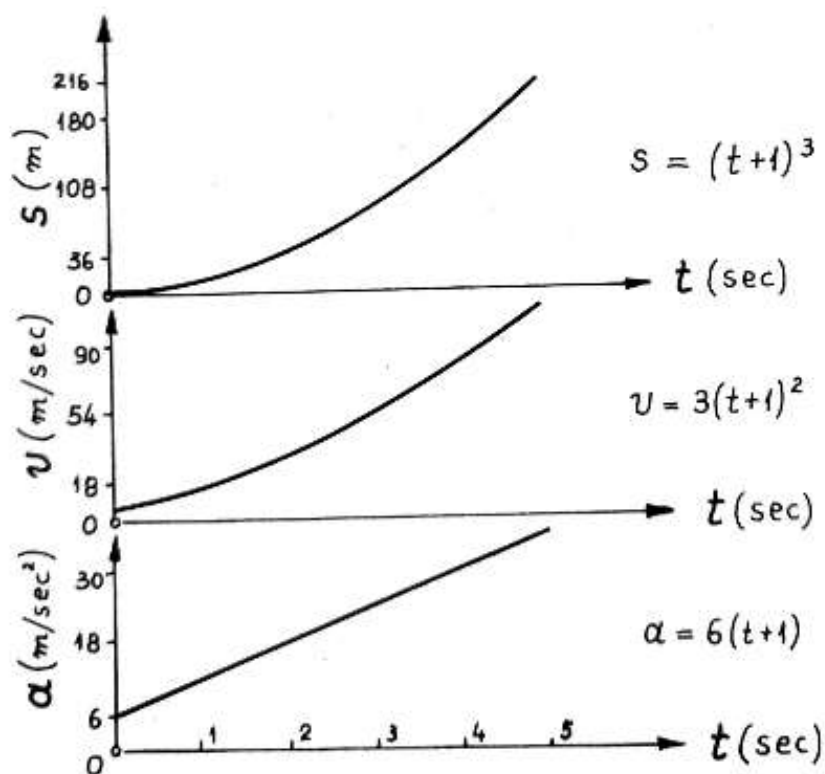
$$v = 3s^{2/3} = 3(t+1)^2$$

$$a = 6s^{1/3} = 6(t+1)$$

Θέτοντας στις παραπάνω εξισώσεις $t = 4 \text{ sec}$ βρίσκουμε αντίστοιχα:

$$\underline{s = 125 \text{ m}}, \quad \underline{v = 75 \text{ m/sec}} \quad \text{και} \quad \underline{a = 30 \text{ m/sec}^2}.$$

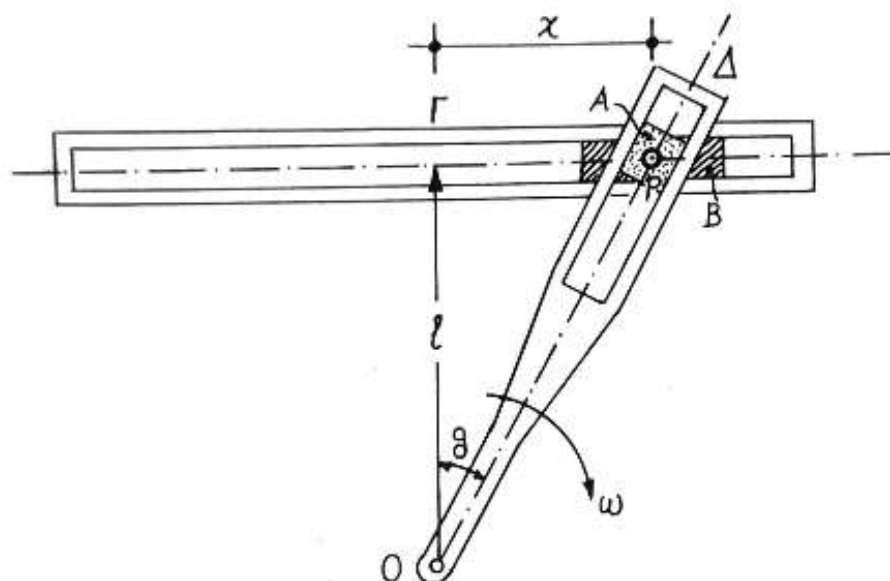
Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



3. Στο μηχανισμό του εχήματος ο βραχίονας $ΟΔ$ που ταλαντεύεται περιτρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Το τεμάχιο A ολισθαίνει ελεύθερα μέσα β' εγκοπή του $ΟΔ$ και συνδέεται αρθρωτά με άλλο τεμάχιο B το οποίο κινείται οριζόντια, στο σημείο P .

Αν $l = 3\text{ m}$ και $\omega = 10\text{ rad/sec}$, να υπολογιστεί στη θέση $\theta = 45^\circ$ η ταχύτητα της άρθρωσης P , αν θεωρηθεί σαν υλικό σημείο που ανήκει στο τεμάχιο B , (δηλαδή κινείται οριζόντια).

Λύση



Α x είναι η απόσταση του σημείου P από το Γ , θα έχουμε

$$x = l \varepsilon \varphi \theta$$

Διαφορίζοντας ως προς t , παίρνουμε την ταχύτητα του σημείου P

$$v_P = \frac{dx}{dt} = l \varepsilon \mu^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

Επειδή όμως $\frac{d\theta}{dt} = \omega$, τελικά θα έχουμε

$$v_P = l \varepsilon \mu^2 \theta \cdot \omega,$$

και θέτοντας τα δεδομένα, $v_P = 3 \varepsilon \mu^2 45 \cdot 10 = 60\text{ m/sec}$.

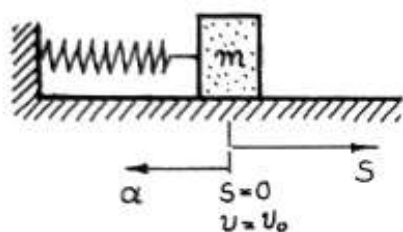
4. Η επιτάχυνση a που αποκτά το σώμα m του σχήματος που ολισθαίνει είναι ανάλογη της μετατόπισής του S , αλλά έχει αντίθετη φορά και δίνεται απ' τη σχέση

$$a = -\kappa^2 S$$

όπου κ είναι σταθερός αριθμός.

Να υπολογιστούν η μετατόπιση S και η ταχύτητα v του σώματος συναρτήσει του χρόνου, όταν είναι γνωστό ότι για $t=0$ η μετατόπιση και η ταχύτητα του σώματος είναι αντίστοιχα $s=0$ και $v=v_0$.

Λύση 1η



Επειδή η επιτάχυνση δίνεται συναρτήσει της μετατόπισης χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$v dv = a ds,$$

$$\text{η οποία γίνεται } v dv = -\kappa^2 s ds,$$

$$\text{και ολοκληρώνοντας } \int v dv = \int -\kappa^2 s ds$$

$$\text{ή } \frac{v^2}{2} = -\frac{\kappa^2 s^2}{2} + C_1 \quad (1)$$

Επειδή όμως (για $t=0$) είναι $v=v_0$ και $S=0$, προκύπτει

$$C_1 = \frac{v_0^2}{2},$$

οπότε η (1) γίνεται

$$v = + \sqrt{v_0^2 - \kappa^2 s^2}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μετατόπιση S συναρτήσει του χρόνου χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \kappa^2 s^2},$$

η οποία μετά από ολοκλήρωση γίνεται:

$$\int dt = \int \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - \kappa^2 s^2}} + C_2 = \int \frac{ds}{v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa}{v_0}\right)^2 s^2}} + C_2 \quad (2)$$

Αλλ' είναι γνωστό απ' τις παραγώγους αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων (βλέπε ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Θ.Γ. ΛΟΚΚΑ βελ. 239), ότι :

$$(\operatorname{τοξημ} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (3)$$

όπου u τυχούσα συνάρτηση, π.χ. $u = f(s)$. Θέτοντας ήδη

$$u = \frac{\kappa}{v_0} s$$

και ολοκληρώνοντας την (3) ως προς s , παίρνουμε

$$\operatorname{τοξημ} \frac{\kappa}{v_0} s = \int \frac{\frac{\kappa}{v_0} ds}{\sqrt{1 - \left(\frac{\kappa}{v_0}\right)^2 s^2}} = \kappa \int \frac{ds}{v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa}{v_0}\right)^2 s^2}} \quad (4)$$

Η (4) συνδυαζόμενη με την (2) δίνει :

$$t = \frac{1}{\kappa} \operatorname{τοξημ} \frac{\kappa}{v_0} s + C_2 \quad (5)$$

Επειδή όμως για $t=0$ είναι και $s=0$, η σταθερά C_2 είναι

$$C_2 = 0,$$

οπότε η (5) γίνεται τώρα

$$\operatorname{τοξημ} \frac{\kappa}{v_0} s = \kappa t \quad \Rightarrow \quad \frac{\kappa}{v_0} s = \eta \mu \kappa t,$$

$$\text{και τελικά} \quad s = \frac{v_0}{\kappa} \eta \mu \kappa t \quad (6)$$

Η (6) είναι η ζητούμενη σχέση που εκφράζει τη μετατόπιση συνάρτησε του χρόνου. Ήδη παραγωγίζοντας την (6) ως προς t βρίσκουμε και την ταχύτητα

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 \varsigma \upsilon \nu \kappa t. \quad (7)$$

Οι σχέσεις (6) και (7) εκφράζουν περιοδικό χαρακτήρα της κίνησης. Με τον όρο περίοδο εννοούμε το χρόνο που απαιτείται

για την εκτέλεση μιάς ταλάντωσης. Και με τον όρο ταλάντωση εννοούμε μια απλή αρμονική κίνηση κατά την οποία η δύναμη επαναφοράς και η επιτάχυνση είναι μεγέθη ανάλογα προς τη μετατόπιση αλλά με αντίθετη φορά.

Λύση 2^η

Απ' τη σχέση της επιτάχυνσης, προκύπτει:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = -\kappa^2 s \quad \text{ή} \quad \frac{d^2s}{dt^2} + \kappa^2 s = 0 \quad (8)$$

Η τελευταία σχέση είναι μία διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως, της οποίας η λύση έχει τη γνωστή μορφή

$$s = A \eta_{\mu\kappa t} + B \sigma_{\nu\kappa t} \quad (9)$$

όπου A και B είναι σταθερές.

Παραγωγίζοντας την (9) ως προς t παίρνουμε την ταχύτητα

$$v = \frac{ds}{dt} = A \kappa \sigma_{\nu\kappa t} - B \kappa \eta_{\mu\kappa t} \quad (10)$$

Επειδή όμως για $t=0$ είναι $v=v_0$ και $s=0$, απ' τις σχέσεις (10) και (9) προκύπτει αντίστοιχα ότι:

$$A = \frac{v_0}{\kappa} \quad \text{και} \quad B = 0.$$

Και συνεπώς οι σχέσεις (9) και (10) διαμορφώνονται τελικά στις

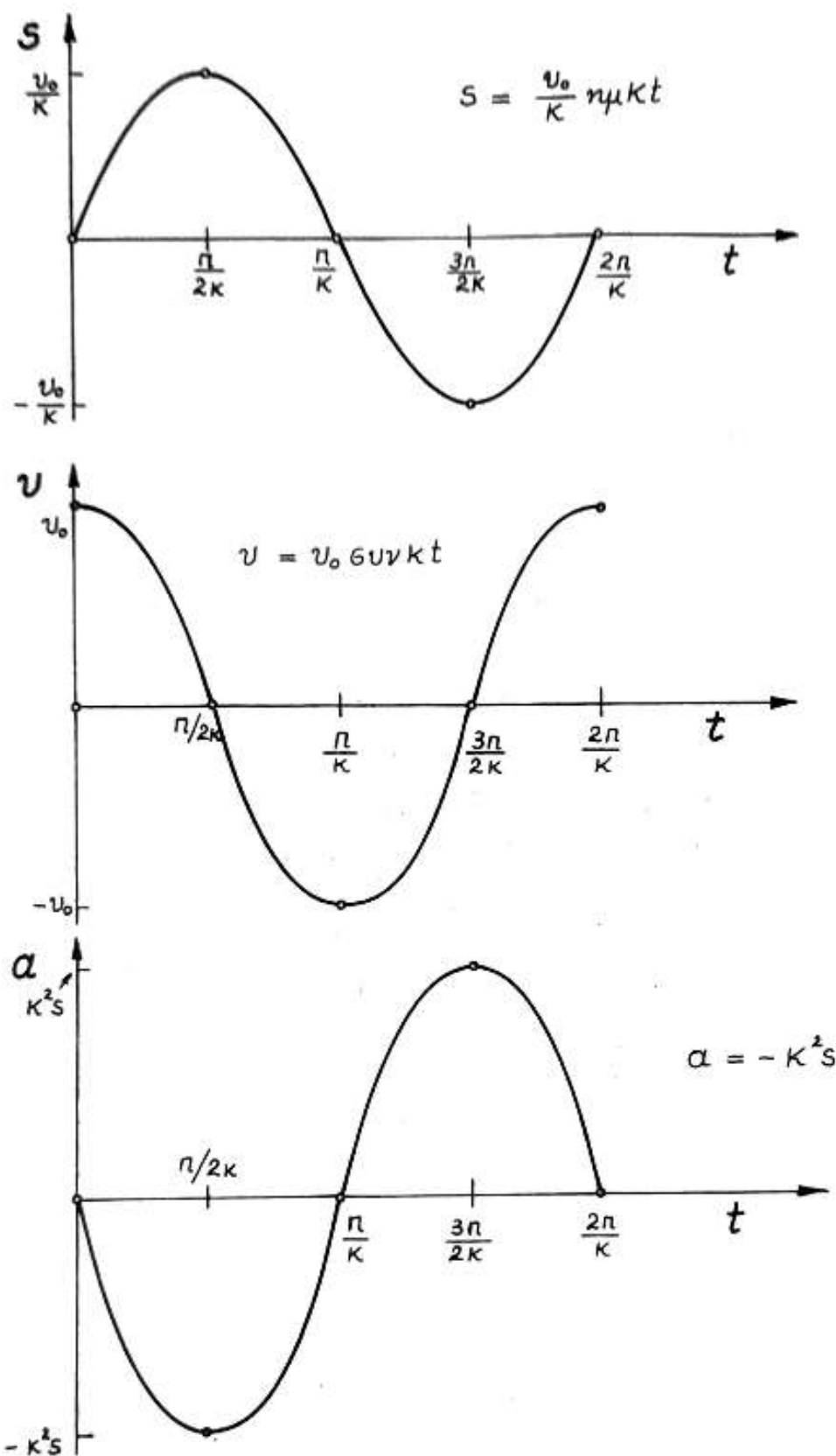
$$s = \frac{v_0}{\kappa} \eta_{\mu\kappa t}$$

$$\text{και} \quad v = v_0 \sigma_{\nu\kappa t}$$

Παριστάνοντας στην επόμενη σελίδα γραφικά τα μεγέθη της μετατόπισης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος κατά την αρμονική παλινδρομική του κίνηση, παρατηρούμε ότι εμφανίζεται μια διαφορά φάσης.

Η επιτάχυνση προηγείται της ταχύτητας κατά το $1/4$ της πε-

ρίοδου καθώς και της μετατόπισης κατά μισή περίοδο.



8.6 Ευθύγραμμη ομοιόμορφη κίνηση.

Στην περίπτωση κατά την οποία ένα υλικό σημείο διανύει ίσες αποστάσεις σε ίσα χρονικά διαστήματα, έχουμε τη λεγόμενη κίνηση σταθερής ταχύτητας ή μη επιταχυνόμενη.

Η ταχύτητα εκφράζεται με τη σχέση

$$\frac{ds}{dt} = v = \text{σταθερά}$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση της ταχύτητας βρίσκουμε τη μετατόπιση συνάρτηση του χρόνου, αν είναι γνωστή η αρχική θέση S_0 του σημείου. Πραγματικά, είναι

$$\int_{S_0}^S ds = v \int_0^t dt \quad \text{ή} \quad S = S_0 + v \cdot t$$

Η τελευταία απλή σχέση έχει πολλές εφαρμογές.

8.7 Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση

Εδώ η επιτάχυνση a είναι σταθερή και εκφράζεται με τη σχέση

$$\frac{dv}{dt} = a = \text{σταθερά.}$$

Η ταχύτητα βρίσκεται με ολοκλήρωση, δηλαδή

$$\int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt \quad \text{ή} \quad v = v_0 + at. \quad (1)$$

Δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή η ταχύτητα ισούται με την αρχική της τιμή συν την αύξηση at που προκύπτει απ' την επιτάχυνση.

Αν δέσουμε την έκφραση αυτή της ταχύτητας στη σχέση

$$v = \frac{ds}{dt}$$

και ολοκληρώσουμε, προκύπτει

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + at) dt \quad \text{ή} \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2)$$

Επίσης ολοκληρώνοντας τη σχέση που βρήκαμε ήδη σε προηγούμενη παράγραφο

$$v dv = a ds$$

με a σταθερή, προκύπτει

$$\int_{v_0}^v dv = a \int_{s_0}^s ds \quad \text{ή} \quad v = v_0^2 + 2a(s - s_0) \quad (3)$$

Αν απεικονίσουμε τη σχέση του διαστήματος s συνάρτηση του χρόνου t , παίρνουμε μία παραβολή.

Επίσης απεικονίζοντας την ταχύτητα και την επιτάχυνση συνάρτηση του χρόνου παίρνουμε αντίστοιχα ροξή ευθεία και οριζόντια γραμμή.

Η επιτάχυνση των σωμάτων κοντά στην επιφάνεια της γης λόγω βαρύτητας είναι σταθερή εφόσον αγνοηθεί η αεροδυναμική αντίσταση.

Αν θεωρήσουμε την προς τα πάνω φορά θετική, τότε οι σχέσεις (1), (2) και (3) για την ελεύθερη πτώση των σωμάτων, γίνονται:

$$v = v_0 - gt$$

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$\text{και} \quad v^2 = v_0^2 - 2gh$$

Η επιτάχυνση παριστάνεται με το g ενώ το διάστημα απ' το επίπεδο αναφοράς με το h .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9ο

ΚΙΝΗΤΙΚΗ

9.1 Γενικά - Νόμοι του Νεύτωνα

Εξετάσαμε ως τώρα την κινηματική της ευθύγραμμης κίνησης ενός υλικού σημείου ανεξάρτητα απ' το αίτιο που την προκαλεί, δηλαδή τη δύναμη.

Ας μπούμε τώρα στις σχέσεις που συνδέουν τα διάφορα είδη των κινήσεων ενός υλικού σημείου με τις αντίστοιχες δυνάμεις που τα προκαλούν, ή όπως θα λέμε, στη μελέτη της κινητικής μιας ευθύγραμμης κίνησης.

Τη μελέτη αυτή θα στηρίζουμε σ' ορισμένα αξιώματα, που στη Μηχανική ονομάζονται Αρχές της Δυναμικής.

Αυτά είναι ουσιαστικά γενικεύσεις των παρατηρήσεων του Kepler πάνω στην κίνηση των ουρανίων σωμάτων, αλλά και σε πειράματα ακριβείας που έγιναν σε διάφορα σώματα πάνω στη γη.

Τα πρώτα με σχετική ακρίβεια πειράματα έγιναν απ' το Γαλιλαίο, ο οποίος και ανακάλυψε τους δύο πρώτους νόμους της κίνησης ενός υλικού σημείου που παραθέτουμε στη συνέχεια.

Όμως ο Νεύτων είναι εκείνος ο οποίος διατύπωσε στην οριστική τους μορφή τις αρχές της Δυναμικής, οι οποίες είναι ήδη γνωστές και σαν Νόμοι του Νεύτωνα.

Παρακάτω ακολουθεί μια σύντομη περιγραφή των νόμων αυτών.

9.1.1 1ος νόμος

Αν ένα σώμα βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας ή ευθύγραμμης κίνησης με σταθερή ταχύτητα, η κατάσταση αυτή παραμένει αμετάβλητη αν στο σώμα δεν επιδρούν εξωτερικές δυνάμεις.

Ο νόμος αυτός, που ονομάζεται πολλές φορές και αρχή της αδράνειας, ανακαλύφθηκε αρχικά απ' το Γαλιλαίο και βρίσκονταν σε αντίθεση με τα όσα διδάσκονταν την εποχή εκείνη απ' τους αρχαίους φιλόσοφους, σύμφωνα με τα οποία, προϋπόθεση για ευθύγραμμη κίνηση ενός υλικού σημείου με σταθερή ταχύτητα ήταν να ενεργήσει πάνω σ' αυτό μια σταθερή δύναμη κατά τη διεύθυνση της κίνησης.

Στο Γαλιλαίο δε διέφυγε το γεγονός ότι η μεταβολή (μείωση) της αρχικής ταχύτητας ενός σώματος που κινείται οφείλεται στις δυνάμεις τριβής και την αντίσταση του αέρα, και ότι εφόσον οι δυνάμεις αυτές μειώνονται, η κίνηση του σώματος μοιάζει ολοένα και περισσότερο με κίνηση σταθερής ταχύτητας.

Στην ειδική περίπτωση, κατά την οποία η ταχύτητα του σώματος είναι μηδέν, το σώμα ηρεμεί, επειδή δε δρα πάνω σ' αυτό καμμία δύναμη.

Σαν συνέπεια της πρώτης αυτής αρχής είναι το γεγονός ότι κάθε μεταβολή στην ταχύτητα ενός υλικού σημείου θα πρέπει ν' αποδοθεί σε ενέργεια κάποιας δύναμης που δρα πάνω σ' αυτό.

Στο ερώτημα που γεννιέται τώρα για τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη μεταβολή της ταχύτητας και της δύναμης που την προκαλεί, δίνεται απάντηση απ' το δεύτερο νόμο της Δυναμικής.

9.1.2 2ος νόμος

Η επιτάχυνση ενός υλικού σημείου είναι ανάλογη με τη δύναμη που ενεργεί πάνω σ' αυτό και έχει την ίδια κατεύθυνση.

Και ο νόμος αυτός ανακαλύφτηκε αρχικά απ' το Γαλιλαίο, ο οποίος βρήκε ότι η κίνηση της πτώσης χαρακτηρίζεται από σταθερή επιτάχυνση.

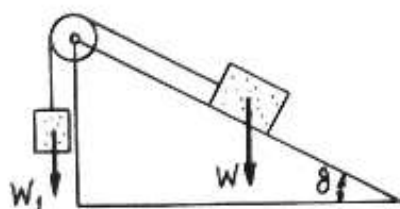
Έτσι διαπιστώθηκε ότι όταν μια σταθερή δύναμη δρα πάνω σ' ένα σώμα, αναπτύσσει σ' αυτό μια σταθερή επιτάχυνση η οποία μάλιστα είναι ανεξάρτητη απ' την ύλη απ' την οποία αποτελείται το σώμα.

Έτσι λοιπόν, ύστερα από πολύηλοκα πειράματα, προσδιορίστηκε αργότερα απ' το Νεύτωνα, με τη βοήθεια εκκρεμών, η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Για να επιβραδύνει την ταχύτητα κίνησης ενός σώματος που έπεφτε, και επομένως να ελαττώσει τη δυσκολία μέτρησης μικρών χρονικών διαστημάτων, ο Γαλιλαίος βρέθηκε να χρησιμοποιήσει το κεκλιμένο επίπεδο.

Το συμπέρασμα ήταν ότι η επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται λόγω της βαρύτητας πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο, είναι

$$a = g \sin \theta \quad (1)$$



Παρατηρούμε ότι όταν η τιμή της γωνίας θ τείνει να γίνει $\pi/2$ έχουμε την περίπτωση σώματος που πέφτει ελεύθερα, ενώ για $\theta = 0$, η κίνηση

του σώματος γίνεται με σταθερή ταχύτητα και μηδενική

επιτάχυνση.

Θεωρώντας ότι συνέχεια ο Γαλιλαίος τις δυνάμεις που ενεργούσαν πάνω στο σώμα, παρατήρησε ότι για την ισορροπία του πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, χρειάζεται δύναμη W_1 μικρότερη του βάρους του W .

Στην ιδανική περίπτωση, κατά την οποία δεν υπάρχουν τριβές, η δύναμη αυτή είναι ίση με

$$W_1 = W \eta \mu \theta \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε

$$\frac{W_1}{W} = \frac{a}{g} \quad \Rightarrow \quad W_1 = \frac{W}{g} a$$

και επομένως η δύναμη W_1 που ενεργεί πάνω στο σώμα είναι ανάλογη της επιτάχυνσης a που αναπτύσσει ε' αυτό ανεξάρτητα απ' τη γωνία κλίσης θ .

Η παρατήρηση αυτή του Γαλιλαίου πάνω στη σχέση δύναμης και επιτάχυνσης, η οποία βασίστηκε σε πειράματά του πάνω στην πτώση των σωμάτων, γενικεύτηκε απ' το Νεύτωνα, και χαρακτηρίστηκε απ' αυτόν σαν ο δεύτερος νόμος της Δυναμικής.

Στο νόμο αυτό δεν αναφέρεται τίποτα για την κίνηση του σώματος προτού ενεργήσει ε' αυτό η δύναμη.

Επομένως η επιτάχυνση που δίνεται στο σώμα απ' τη δύναμη που δρα πάνω του είναι ανεξάρτητη από κάθε προηγούμενη κίνησή του. Ή ακόμη ότι μια συγκεκριμένη δύναμη που δρα ε' ένα σώμα, προκαλεί ε' αυτό την ίδια πάντοτε επιτάχυνση, είτε το σώμα βρίσκονταν προηγούμενα σε ηρεμία είτε σε κίνηση κατά οποιαδήποτε διεύθυνση.

Επίσης στο νόμο αυτό δεν αναφέρεται τίποτα για το πλήθος των δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα.

Αν επομένως δ' ένα υλικό σημείο ενεργήσει κάποιο ύσθημα συντρεχουσών δυνάμεων, κάθε δύναμη χωριστά θα προκαλέσει στο υλικό σημείο τη δική της επιτάχυνση.

Συνεπώς η συνισταμένη επιτάχυνση του κινητού θα είναι το γεωμετρικό άθροισμα όλων των μερικών επιταχύνσεων.

Και επειδή κάθε μια απ' τις επιταχύνσεις είναι ανάλογη της αντίστοιχης δύναμης με την ίδια προς αυτή κατεύθυνση, συμπεραίνουμε ότι η συνισταμένη επιτάχυνση θα είναι ανάλογη προς τη συνισταμένη δύναμη έχοντας και την ίδια προς αυτή κατεύθυνση.

9.1.3 3ος νόμος

Σε κάθε δράση εμφανίζεται πάντοτε μια ίση και αντίθετη αντίδραση, ή, πράγμα που είναι το ίδιο, οι αμοιβαίες αλληλοεπιδράσεις δύο σωμάτων είναι πάντοτε ίσες και αντιθέτων κατευθύνσεων.

Αν ένα σώμα πιέζει ένα άλλο, τότε το δεύτερο σώμα πιέζει το πρώτο με δύναμη που είναι ίση και αντίθετη προς εκείνη που ασκεί το πρώτο.

Κατά παρόμοιο τρόπο, αν ένα σώμα έλκει από απόσταση κάποιο άλλο, τότε και το δεύτερο σώμα θα έλκει το πρώτο με δύναμη ίση αλλ' αντίθετης κατεύθυνσης.

Τέτοιο φαινόμενο συμβαίνει π.χ. στην αμοιβαία έλξη μεταξύ Γης και Ήλιου.

Ο νόμος αυτός ισχύει όχι μόνο για δυνάμεις βαρύτητας αλλά και για άλλα είδη δυνάμεων, όπως είναι οι ηλεκτρικές, οι μαγνητικές δυνάμεις κ.λ.π.

9.2 Η γενική εξίσωση της κίνησης υλικού σημείου

Με τη βοήθεια του δεύτερου νόμου της Δυναμικής μπορούμε να σχηματίσουμε τη γενική εξίσωση της κίνησης ενός υλικού σημείου.

Απ' τα πειράματα που έκανε ο Γαλιλαίος πάνω στην πτώση των σωμάτων γνωρίζουμε ότι αν πάνω σε υλικό σημείο ενεργήσει μόνο το βάρος του W , τότε θα προκαλέσει σ' αυτό επιτάχυνση g .

Αν όμως αντί της δύναμης W ενεργήσει στο υλικό σημείο άλλη δύναμη F , τότε ο δεύτερος νόμος της Δυναμικής μας πληροφορεί ότι η επιτάχυνση a που εμφανίζεται, όχι μόνο έχει την ίδια κατεύθυνση προς την F , αλλά επί πλέον ισχύει και η ισοότητα

$$\frac{a}{g} = \frac{F}{W},$$

απ' την οποία προκύπτει

$$F = \frac{W}{g} a.$$

Αυτή είναι η γενική εξίσωση της κίνησης ενός υλικού σημείου. Απ' αυτή μπορούμε να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση του κινητού σ' οποιοδήποτε χρονική στιγμή, συναρτήσει της δύναμης F που δρά σ' αυτό τη στιγμή εκείνη.

Απ' την ίδια εξίσωση παρατηρούμε επίσης ότι για μια συγκεκριμένη δύναμη F , η επιτάχυνση που παράγεται απ' αυτή, είναι αντιστρόφως ανάλογη προς τον παράγοντα

$$W/g.$$

Ο παράγοντας αυτός που χαρακτηρίζει κατά κάποιον τρόπο το βαθμό της "νωδρότητας" που δείχνει το υλικό σημείο στη

δράση της δύναμης που εφαρμόζεται σ' αυτό, είναι ένα μέτρο της αδράνειας του κινητού και ονομάζεται μάζα.

Αν λοιπόν θέσουμε, όπως αλλωστε διεθνώς παριστάνεται

$$m = \frac{W}{g},$$

τότε η γενική εξίσωση της κίνησης ενός υλικού σημείου, γράφεται

$$F = m \cdot a$$

9.3 Παραδείγματα

1. Αερόστατο συνολικού βάρους W πέφτει κατακόρυφα με επιτάχυνση a .

Να υπολογιστεί το ποσό έρματος Q που πρέπει να πεταχτεί ώστε το αερόστατο να αποκτήσει την ίδια επιτάχυνση αλλά προς τα πάνω.

Λύση

Εξετάζουμε πρώτα το αερόστατο κατά την πτώση του.



Οι δυνάμεις που δρουν πάνω σ' αυτό είναι το συνολικό του βάρος (μαζί με το έρμα) W και η άνωση P , που είναι ίση με το βάρος του όγκου αέρα που εκτοπίζει.

Επομένως η εξίσωση κίνησης του αερόστατου είναι

$$W - P = \frac{W}{g} a \quad (1)$$



Η εξίσωση αυτή, μετά την απόρριψη έρματος βάρους Q , γίνεται:

$$P - (W - Q) = \frac{W - Q}{g} a \quad (2)$$

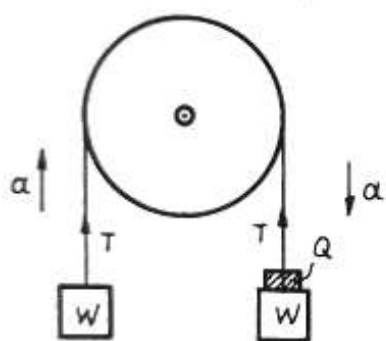
Απαλείφοντας ήδη τη δύναμη P μεταξύ των εξισώσεων (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε

$$Q = \frac{2W \cdot a}{g + a}$$

2. Πάνω σ' ένα απ' τα ίδια βάρη που κρέμονται απ' τις άκρες νήματος το οποίο περιβάλλει την τροχαλία του εκήματος τοποθετείται πρόσθετο βάρος Q , οπότε το σύστημα αρχίζει να κινείται με επιτάχυνση a .

Με την προϋπόθεση ότι η αδράνεια του συστήματος της τροχαλίας και η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέες ποσότητες, να υπολογιστεί το βάρος Q συναρτήσει του a και των βαρών W .

Λύση



Επειδή οι δυνάμεις αδράνειας και αντίστασης του συστήματος παραλείπονται, έπεται ότι η εφελκυστική δύναμη T , που έχει το νήμα μετά την τοποθέτηση του βάρους Q , και στα δύο εκέλη της τροχαλίας είναι η ίδια.

Εδώ έχουμε σύστημα δύο κινουμένων σωμάτων και επομένως μπορούμε να γράψουμε δύο εξισώσεις κίνησης. Έτσι, για το αριστερό βάρος θα έχουμε:

$$T - W = \frac{W}{g} a \quad (1)$$

Όμοια, για το δεξιό βάρος θα είναι

$$W + Q - T = \frac{W + Q}{g} a \quad (2)$$

Απαλείφοντας το T με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη, βρίσκουμε

$$Q = \frac{2W a}{g - a}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Απάντηση μπορεί να δοθεί και για τη δύναμη T του νήματος, η οποία, όπως και η άνωση P του προηγούμενου παραδείγματος, παίζουν βοηθητικό ρόλο στη λύση του.

[3.] Υλικό σημείο βάρους W , αφήνεται να πέση μέσα σε ρευστό, όπου η κίνηση συνοδεύεται από αντίσταση που είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της ταχύτητας του κινητού.

Με την προϋπόθεση ότι η άνωση μέσα στο ρευστό είναι αμελητέα, ενώ η αντίσταση έχει τιμή f για ταχύτητα του κινητού 1m/sec , να υπολογιστεί η σταθερή ταχύτητα την οποία αποκτά τούτο τελικά.

Λύση

Επειδή δίνεται ότι η κίνηση του υλικού σημείου μέσα στο ρευστό συνοδεύεται από αντίσταση A που είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της ταχύτητάς του, θα έχουμε τη σχέση:

$$A = \kappa \cdot v^2 \quad (\kappa \text{ αριθμός} \neq 0) \quad (1)$$

Επίσης δίνεται ότι η αντίσταση αυτή έχει τιμή f για ταχύτητα του σημείου 1m/sec . Άρα θα είναι

$$f = \kappa \cdot 1^2 \quad \text{ή} \quad f = \kappa$$

Έτσι η εξίσωση (1) γίνεται

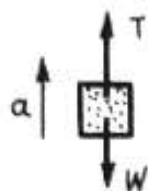
$$A = f \cdot v^2.$$

Όταν το κινητό κινείται στο ρευστό με σταθερή ταχύτητα, τότε το βάρος του γίνεται ίσο με την αντίσταση που συναντά μέσα σ' αυτό. Άρα θα έχουμε τελικά

$$A = W = f \cdot v^2, \quad \text{δηλαδή} \quad v = \sqrt{\frac{W}{f}}.$$

4. Σώμα βάρους W κινείται μέσω νήματος κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση a .
Να υπολογιστεί και να μελετηθεί η δύναμη του νήματος.

Λύση



Αν T είναι η δύναμη του νήματος, η σταθερή επιτάχυνση που αποκτά το σώμα κινούμενο προς τα πάνω οφείλεται στη σταθερή διαφορά μεταξύ των δυνάμεων T και W ($T > W$). Έτσι η εξίσωση της κίνησης του σώματος γράφεται:

$$T - W = \frac{W}{g} a,$$

απ' όπου προκύπτει $T = W \left(1 + \frac{a}{g} \right)$. (α)

Όπως βλέπουμε η δύναμη του νήματος εξαρτάται όχι μόνο απ' το βάρος αλλά και απ' την επιτάχυνση του σώματος.

Αν δώσουμε στο σώμα αρκετά μεγάλη επιτάχυνση, προκαλούμε στο νήμα δύναμη πολλαπλάσια του βάρους του, και όλοι γνωρίζουμε πόσο εύκολα κόβεται ένα νήμα που είναι δεμένο με κάποιο βάρος, όταν τραβήζουμε απότομα το νήμα.

Η εξίσωση (α) ισχύει επίσης και για την περίπτωση που το σώμα επιβραδύνεται, αρκεί ν' αλλάξουμε μόνο το πρόσημο της επιτάχυνσης a .

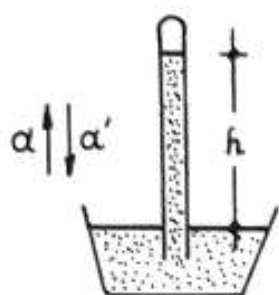
Τότε η δύναμη του νήματος γίνεται μικρότερη του βάρους W . Στην περίπτωση μάλιστα ελεύθερης πτώσης, οπότε είναι $a = -g$, η δύναμη αυτή μηδενίζεται.

5. Μέσα σ' ακίνητο ανελκυστήρα βρίσκεται υδραργυρικό βαρόμετρο που δείχνει ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι 76 cm Hg.
Ο ανελκυστήρας ανεβαίνει αρχικά με σταθερή επιτάχυνση

$\alpha = 1 \text{ m/sec}^2$, έπειτα κινείται ομαλά με σταθερή ταχύτητα και τελικά σταματά γιατί επιβραδύνεται σταθερά με επιβράδυνση $\alpha' = 2 \text{ m/sec}^2$.

Να υπολογιστούν οι ενδείξεις του βαρομέτρου κατά τις τρεις αυτές φάσεις της κίνησης του ανελκυστήρα.

Λύση



Η πυκνότητα γ του υδραργύρου παραμένει σταθερή κατά την κίνηση του ανελκυστήρα. Η ατμοσφαιρική πίεση $p = 76 \text{ cm Hg}$, όταν ο ανελκυστήρας είναι ακίνητος, ισορροπείται απ' το βάρος στήλης υδραργύρου, διατομής έστω 1 cm^2 και ύψους $h = 76 \text{ cm}$.

Η ατμοσφαιρική πίεση p εκφράζεται τότε με τη σχέση:

$$p = 1 \cdot h \cdot \gamma \cdot g \quad (\text{dyn/cm}^2) \quad (1)$$

α) Όταν ο ανελκυστήρας ανεβαίνει με επιτάχυνση α , δημιουργεί στον υδράργυρο αντίθετη αδρανειακή δύναμη, με αποτέλεσμα το φαινόμενο βάρος B_1 της στήλης υδραργύρου ν' αντιστοιχεί σε φαινόμενη επιτάχυνση της βαρύτητας

$$g_1 = g + \alpha.$$

Αν h_1 είναι τότε το νέο ύψος της στήλης υδραργύρου, είναι προφανές ότι το φαινόμενο βάρος της B_1 θα ισορροπεί την ίδια ατμοσφαιρική πίεση p . Επομένως θα είναι:

$$p = 1 \cdot h_1 \cdot \gamma \cdot g_1 \quad (\text{dyn/cm}^2) \quad (2)$$

Απ' τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει διαδοχικά

$$h \cdot \gamma \cdot g = h_1 \cdot \gamma \cdot g_1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = h \frac{g}{g_1} = h \frac{g}{g + \alpha}$$

Θέτοντας τα δεδομένα βρίσκουμε $h_1 = 76 \frac{981}{981 + 100} = 69 \text{ cm}$.

β) Όταν ο ανελκυστήρας κινείται ομαλά, δεν εκδηλώνεται αδράνεια του υδραργύρου και επομένως το ύψος της στήλης επανέρχεται στη θέση ηρεμίας, δηλαδή είναι

$$h = 76 \text{ cm.}$$

γ) Όταν όμως ο ανελκυστήρας ανεβαίνει με επιβράδυνση α' , τότε η φαινόμενη επιτάχυνση της βαρύτητας είναι αντίστοιχα

$$g_2 = g - \alpha'$$

Αν το νέο ύψος της στήλης υδραργύρου είναι h_2 , τότε θα έχουμε πάλι

$$p = 1 \cdot h_2 \cdot \gamma \cdot g_2 \text{ (dyn/cm}^2\text{)} \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (3) βρίσκουμε

$$h \cdot \gamma \cdot g = h_2 \cdot \gamma \cdot g_2 \implies h_2 = h \frac{g}{g_2} = h \frac{g}{g - \alpha'}$$

Θέτοντας πάλι τα δεδομένα βρίσκουμε

$$h_2 = 76 \frac{981}{981 - 200} = 95,5 \text{ cm.}$$

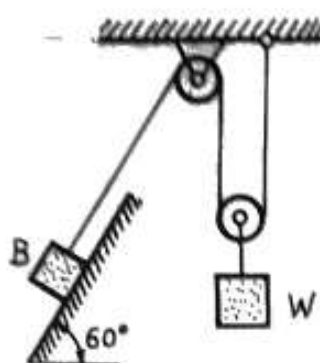
[6.] Το σύστημα του σχήματος αποτελείται από σώμα βάρους $B = 200 \text{ kg}$ που ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας 60° , με τη βοήθεια ελκτικής δύναμης S που προέρχεται από βάρος $W = 300 \text{ kg}$ σε κινούμενη τροχαλία.

Αν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$, ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος B και κεκλιμένου επιπέδου είναι $0,2$, ενώ το βάρος και η αντίσταση τριβής της τροχαλίας αγνοούνται, να υπολογιστούν:

α) η δύναμη S του σώματος και

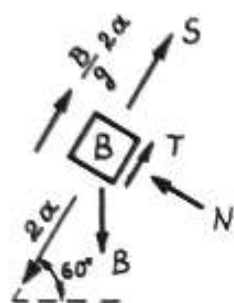
β) η κατακόρυφη μετατόπιση h του βάρους W στα 5 πρώτα secs.

Λύση 1η



α) Αν a είναι η κατακόρυφη επιτάχυνση του βάρους W που φέρει η κινητή τροχαλία, είναι φανερό ότι, λόγω διάταξης του συστήματος, η επιτάχυνση του σώματος B θα είναι $2a$.

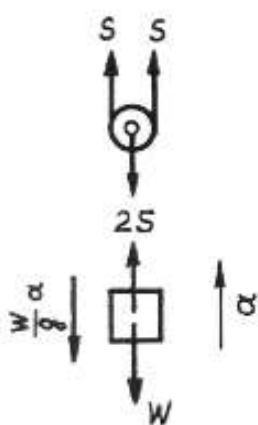
Απομονώνοντας το σώμα B του κεκλ. επιπέδου κατά τη διάρκεια της κίνησής του, παρατηρούμε ότι οι δυνάμεις που ενεργούν σ' αυτό είναι:



i) Το βάρος του B , που δημιουργεί την αντίδραση N του κεκλ. επιπέδου κάθετα στη διεύθυνση τριβής, η οποία αντίδραση με τη σειρά της δημιουργεί τη δύναμη τριβής T .

ii) Η δύναμη S του σώματος και

iii) η αδρανειακή δύναμη $\frac{B}{g}a$, της οποίας η φορά είναι αντίθετη, όπως πάντα, με την κίνηση του σώματος.



Προτού γράψουμε της εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων, καθορίζουμε τη φορά της κίνησης ως εξής.

Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει τριβή στο κεκλιμένο επίπεδο, τότε το αλγεβρικό άθροισμα των δυνάμεων που δρουν στο σώμα B κατά τη διεύθυνση του κεκλιμ. επιπέδου σε στατική ισορροπία, είναι

$$200 \sin 60^\circ - \frac{300}{2} = 23,2 \text{ kg},$$

με φορά προς τα κάτω.

Επομένως το σώμα Β τείνει να γλιστρίσει στο κεκλιμένο επίπεδο, χωρίς ωστόσο και η δύναμη τριβής, που αντισταθείται στην κίνηση και είναι

$$200 \cdot \sin 60^\circ \cdot 0,2 = 20 \text{ kg},$$

να μπορεί να το συγκρατήσει, αφού είναι $23,2 > 20$.

Άρα η κίνηση του σώματος Β έχει καθοριστεί, και είναι προς τα κάτω.

Οι εξισώσεις που εκφράζουν τώρα την κίνηση των δύο σωμάτων, είναι:

Για το σώμα Β (διεύθυνση του κεκλ. επιπέδου)

$$200 \sin 60^\circ - 20 - S = \frac{200}{9,81} 2a \quad (1)$$

Για το σώμα W (διεύθυνση κατακόρυφη).

$$2S - 300 = \frac{300}{9,81} a \quad (2)$$

Πολλάζοντας και τα δύο μέλη της (1) επί 2 και προσθέτοντας στη συνέχεια τη (2) κατά μέλη, παίρνουμε

$$6,4 = \frac{1100}{9,81} a \quad \text{ή} \quad a = 0,0571 \text{ m/sec}^2.$$

Έτσι η τιμή της S, που προκύπτει π.χ. απ' τη (2), είναι

$$\underline{S = 150,8 \text{ kg.}}$$

β) Κατά τη διάρκεια των 5 πρώτων δευτερολέπτων της κίνησης, το σώμα W θα μετατοπιστεί κατακόρυφα, βάσει της σχέσης (2) της θετ. 145

$$h = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

κατά

$$h = 0 + 0 \cdot 5 + \frac{1}{2} 0,0571 \cdot 5^2$$

$$\text{ή} \quad \underline{h = 0,713 \text{ m.}}$$

Λύση 2η

Μετά τον καθορισμό της κίνησης του συστήματος, απ' την εξίσωση της στατικής του ισορροπίας, προκύπτει ότι η κινούμενη το σύστημα δύναμη, κατά τη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου, είναι

$$200 \sin 60^\circ - 200 \cos 60^\circ \cdot 0,2 - \frac{300}{2} = 3,2 \text{ kg}.$$

Σαν σύστημα φυσικά νοείται το σώμα Β και το μισό του σώματος W, δυνάμεις, που αλληλωςτε συμμετέχουν στη δημιουργία της κινούμενης δύναμης.

Αν λοιπόν α και 2α είναι οι επιταχύνσεις των σωμάτων W και Β αντίστοιχα, η εξίσωση κίνησης του συστήματος, θα είναι:

$$3,2 = \frac{200}{9,81} 2\alpha + \frac{300}{2 \cdot 9,81} \alpha,$$

απ' όπου προκύπτει

$$\alpha = 0,0571 \text{ m/sec}^2.$$

Η δύναμη S του σώματος δεν εμφανίζεται, γιατί είναι πιά εσωτερική δύναμη στο σύστημα.

Αυτή θα βρεθεί αν πάρουμε χωριστά την εξίσωση της κίνησης για το σώμα Β ή W αντίστοιχα, όπως και στην πρώτη λύση.

Επειδή τα πειράματα έδειξαν ότι η τάση ενός ελατηρίου - εφόσον αυτή δεν υπερβαίνει το όριο ελαστικότητάς του - είναι ανάλογη προς την επιμήκυνση, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, για μετάθεση x του σώματος απ' τη θέση της στατικής του ισορροπίας, η συνολική τάση στο ελατήριο θα είναι

$$S = W + kx$$

όπου k είναι συντελεστής αναλογίας ανάμεσα στην επιμήκυνση του ελατηρίου και την αντίστοιχη β' αυτό τάση, καλούμενος και σταθερά του ελατηρίου. παριστάνει δε όπως είναι γνωστό την τάση στην οποία πρέπει να υποβληθεί το ελατήριο ώστε να επιμηκυνθεί τούτο κατά τη μονάδα του μήκους. Δηλαδή

$$k = \frac{W}{\delta_{στ}}$$

Συμβολίζοντας με $\ddot{x}$ την επιτάχυνση του σώματος, που ως τώρα παριστάναμε με α , μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση της κίνησής του

$$\frac{W}{g} \ddot{x} = W - (W + kx) \quad \text{ή} \quad \frac{W}{g} \ddot{x} = -kx \quad (1)$$

Απ' την εξίσωση αυτή βλέπουμε ότι για θετικές, δηλαδή προς τα κάτω μεταθέσεις η επιτάχυνση της κίνησης είναι αρνητική, ενώ για αρνητικές (προς τα άνω) μεταθέσεις, αυτή είναι θετική.

Αποκτά δηλαδή το σώμα κίνηση που είναι πάντοτε επιταχυνόμενη προς τη θέση της στατικής του ισορροπίας, με δύναμη που είναι ανάλογη προς την απομάκρυνσή του.

Για απλοποίηση της εξίσωσής (1), αν θέσουμε

$$\frac{\kappa \cdot g}{W} = p^2,$$

τότε καταλήγουμε στη μορφή

$$\ddot{x} + p^2 x = 0,$$

η οποία είναι η διαφορική εξίσωση για τις ελεύθερες ταλαντώσεις ενός υλικού σημείου.

Η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης, έχει, όπως προκύπτει απ' τη μαθηματική ανάλυση, τη μορφή:

$$x = C_1 \sin p t + C_2 \eta \mu p t, \quad (2)$$

όπου C_1 και C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Εκλέγοντας κατάλληλα τις τιμές αυτών των σταθερών, μπορούμε να προσαρμόσουμε τη γενική αυτή εξίσωση προς οποιεσδήποτε δοσμένες αρχικές συνθήκες που έχουν σαν αποτέλεσμα την κίνηση του σώματος W .

Παρακάτω θα εξετάσουμε τρεις τέτοιες περιπτώσεις.

10.2 Περίπτωση 1η, με αρχική μετάθεση χωρίς αρχική ταχύτητα.

Ας υποθέσουμε ότι δίνουμε αρχικά στο σώμα μια μετάθεση $x_0 > 0$ απ' τη θέση της στατικής ισορροπίας, και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο, χωρίς αρχική ταχύτητα.

Τότε οι αρχικές συνθήκες που εκφράζουν την κίνηση του σώματος παίρνουν την παρακάτω μαθηματική μορφή:

$$\text{Για } t = 0, \quad \text{είναι } x = x_0 \quad \text{και } v = \dot{x} = 0$$

Αλλά τότε θα είναι

$$\sin p t = 1 \quad \text{και} \quad \eta \mu p t = 0.$$

Άρα η εξίσωση (2) γίνεται $x_0 = C_1$.

Παραγωγίζοντας τη (2) ως προς t , παίρνουμε:

$$\dot{x} = -\rho C_1 \eta \mu \rho t + \rho C_2 \epsilon \nu \rho t \quad (3)$$

η οποία είναι η γενική εξίσωση της κίνησης που εκφράζει την ταχύτητα συνάρτησει του χρόνου.

Θέτοντας λοιπόν στην (3) τις αρχικές συνθήκες

$$t = 0 \quad \text{και} \quad \dot{x} = 0,$$

παίρνουμε:

$$0 = C_2.$$

Άρα λοιπόν η γενική εξίσωση (2) της κίνησης του σώματος, μετά τη διαμόρφωσή της σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες, γίνεται

$$x = x_0 \epsilon \nu \rho t, \quad (4)$$

και το σώμα W γράφει αληθή αρμονική κίνηση.

Απ' την εξίσωση (4), παίρνουμε με διαδοχικές παραγωγίσεις τις εκφράσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος συνάρτησει του χρόνου. Δηλαδή:

$$\dot{x} = -x_0 \rho \eta \mu \rho t$$

$$\ddot{x} = -x_0 \rho^2 \epsilon \nu \rho t$$

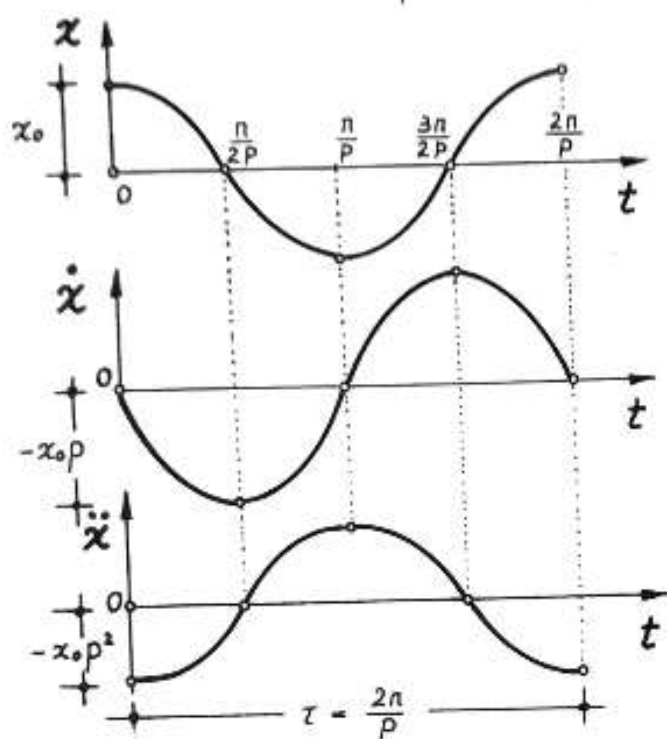
Επομένως τα διαγράμματα που εκφράζουν την κίνηση του σώματος, δηλαδή τη μεταβολή της μετάθεσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης συνάρτησει του χρόνου, παριστάνουν ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου.

Στο πρώτο απ' τα διαγράμματα αυτά, που φαίνονται στην επόμενη σελίδα, βλέπουμε ότι η απόλυτα μέγιστη τιμή της μετάθεσης, η οποία ονομάζεται και πλάτος ταλάντωσης είναι $|x_0|$, ενώ ο χρόνος που απαιτείται για έναν πλήρη κύκλο κίνησης του σώματος (πλήρη ταλάντωση) είναι $\frac{2\pi}{\rho} \text{ sec.}$

Ο χρόνος αυτός προκύπτει απ' το γεγονός ότι το γινόμενο ρt εκφράζει γωνία, η οποία για μια πλήρη ταλάντωση (πήγαιν' - έλα ε' όλο το μήκος της διαδρομής), είναι 2π .

Στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται με το γράμμα τ και ονομάζεται περίοδος ταλάντωσης. Είναι λοιπόν

$$\tau = \frac{2\pi}{\rho} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{\kappa \cdot g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{στ}}{g}}$$



Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής ρ έχει διάσταση αριθμού που έχει διαιρεθεί δια δευτερολέπτων.

Πραγματικά, απ' την αρχή ήδη τέθηκε

$$\rho^2 = \frac{\kappa \cdot g}{W} = \frac{\frac{\text{δύναμη}}{\text{μήκος}} \cdot \frac{\text{μήκος}}{\text{sec}^2}}{\text{δύναμη}} = \frac{1}{\text{sec}^2}$$

$$\text{Άρα } \rho = \frac{1}{\text{sec}},$$

και συνεπώς το ρ έχει την ίδια διάσταση προς τη γω-

νιακή ταχύτητα ω , η οποία καθορίζει τη γωνία στροφής ανά μονάδα χρόνου.

Αν λοιπόν αναφερθούμε στο σχήμα της βελ. 161 και κατασκευάσουμε εκεί μια περιφέρεια με κέντρο το κέντρο βάρους του σώματος στη θέση της στατικής του ισορροπίας και ακτίνα ίση προς το πλάτος της κίνησης, παρατηρούμε, ότι κατά την κατακόρυφη κίνηση του σώματος, η οριζόντια προβολή του κέντρου βάρους του στην περιφέρεια, τη διαγράφει (την περιφέρεια) με σταθερή ταχύτητα ρ rad/sec.

Άρα το ρ παριστάνει τον αριθμό των ακτινίων τα οποία

διανύει σε ένα δευτερόλεπτο πάνω στον κύκλο αναγωγής η οριζόντια προβολή του κέντρου βάρους του κινουμένου σώματος πάνω στην περιφέρεια που προαναφέραμε.

Αν τις παραπάνω εκφράσεις της περιόδου τ , μπορούμε να πάρουμε και το πλήθος των ταλαντώσεων του σώματος W στη μονάδα του χρόνου. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται συχνότητα της ταλάντωσης και συμβολίζεται με το f . Είναι λοιπόν

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{P}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa \cdot g}{W}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{στ}}}$$

10.2 Περίπτωση 2η, με αρχική ταχύτητα χωρίς αρχική μετάθεση

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση κατά την οποία, δίνουμε στο σώμα, στη θέση της στατικής του ισορροπίας (όπου $x=0$), μια αρχική ταχύτητα v_0 .

Οι αρχικές συνθήκες της κίνησης γίνονται τώρα ως εξής:

Για $t=0$, είναι $x=0$ και $\dot{x}=v_0$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στις εξισώσεις (2) και (3), όπου επίσης είναι $\sin \pi r t = 1$ και $\pi m r t = 0$, βρίσκουμε αντίστοιχα:

$$(2) \Rightarrow 0 = C_1$$

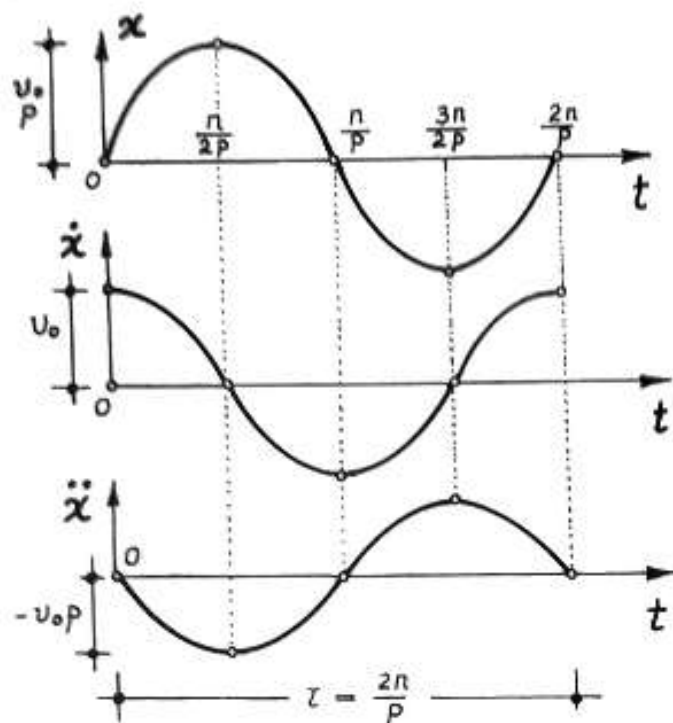
$$(3) \Rightarrow v_0 = \rho C_2 \quad \text{ή} \quad C_2 = \frac{v_0}{\rho},$$

οπότε η εξίσωση της κίνησης του σώματος, μετά τη διαμόρφωσή της προς τις αρχικές συνθήκες, γίνεται

$$x = \frac{v_0}{\rho} \pi m r t,$$

οπότε το σώμα εκτελεί πάλι απλή αρμονική κίνηση.

Φυσικά οι εκφράσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος συναρτήσει του χρόνου θα παρθούν πάλι με διαδοχικές παραγωγίδες της τελευταίας σχέσης. Δηλαδή:



$$\dot{x} = v_0 \sin \rho t$$

$$\ddot{x} = -v_0 \rho \cos \rho t$$

Στο σχήμα φαίνονται τα διαγράμματα $x-t$, $\dot{x}-t$ και $\ddot{x}-t$ της κίνησης του σώματος, η οποία είναι πάλι αρμονική.

Έτσι βλέπουμε ότι η κίνηση έχει την ίδια περίοδο όπως και προηγούμενα

$$\tau = \frac{2\pi}{\rho}$$

που είναι ανεξάρτητη απ' τις αρχικές συνθήκες και ορίζεται μόνο απ' τη σταθερά k και το βάρος W του σώματος.

Το πλάτος όμως της κίνησης, v_0/ρ , εξαρτάται επί πλεον και απ' την αρχική ταχύτητα.

10.3 Περίπτωση 3η, με αρχική ταχύτητα και αρχική μετάθεση

Θεωρούμε τώρα τη γενικότερη περίπτωση, κατά την οποία δίνουμε στο σώμα αρχική ταχύτητα v_0 όταν αυτό βρίσκεται σ' απόσταση x_0 απ' τη θέση της στατικής του ισορροπίας.

Οι αρχικές συνθήκες της κίνησης, θα είναι τότε:

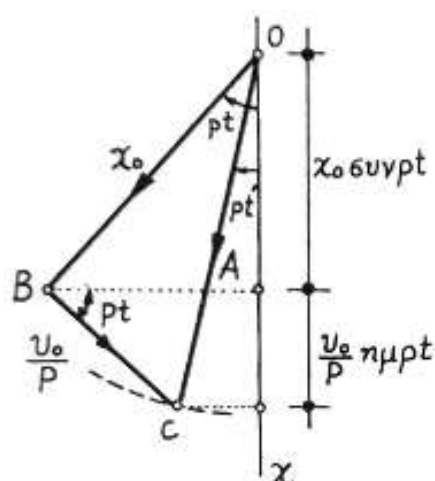
Για $t = 0$, είναι $x = x_0$ και $\dot{x} = v_0$.

Με το σκεπτικό των προηγούμενων δύο περιπτώσεων, οι αρχικές αυτές συνθήκες διαμορφώνουν τη γενική εξίσωση (2) της βελ. 163 στην εξίσωση

$$x = x_0 \sin pt + \frac{v_0}{p} \eta \mu pt$$

Είναι φανερό ότι το διάγραμμα $x-t$ της κίνησης αυτής, θα προκύψει σαν αλγεβρικό άθροισμα των τεταγμένων των δύο προηγούμενων διαγραμμάτων, ενώ η κίνηση του σώματος θα είναι πάλι απλή αρμονική.

Για τον καθορισμό του πλάτους ταλάντωσης στη γενική αυτή περίπτωση, εργαζόμαστε ως εξής:



Απ' την αρχή O των συντεταγμένων φέρνουμε διάνυσμα $OB = x_0$ που να σχηματίζει γωνία pt με τον άξονα Ox , οπότε είναι φανερό ότι η προβολή του πάνω στον άξονα αυτό παριστάνει τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της παραπάνω εξίσωσης.

Στη συνέχεια απ' το άκρο B του διανύσματος OB φέρνουμε

άλλο, $BC = \frac{v_0}{p}$, κάθετο στο OB , οπότε η προβολή του στον άξονα Ox παριστάνει τον δεύτερο όρο του δεξιού μέλους της ίδιας εξίσωσης.

Άρα η προβολή του διανύσματος $\bar{A} \equiv OC = OB + BC$ πάνω στον άξονα Ox θα δώσει το άθροισμα των δύο όρων του δεξιού μέλους της εξίσωσης, η οποία, αν pt' είναι η γωνία μεταξύ του A και του Ox , γράφεται

$$x = A \sin pt' \quad (1)$$

διότι μας ενδιαφέρει η προβολή του A στον Ox .

Πραγματικά λοιπόν η εξίσωση (1) παριστάνει αρμονική κίνηση με πλάτος

$$A = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{v_0}{\rho}\right)^2}$$

και χρόνο t' που μετρείται απ' τη στιγμή κατά την οποία η παλλόμενη μάζα περνάει από μια ακραία θέση της διαδρομής της.

Έτσι λοιπόν συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση κατά την οποία δίνουμε στο σώμα W και αρχική μετάθεση και αρχική ταχύτητα, η κίνηση που ακολουθεί θα είναι η ίδια μ' εκείνη που θα είχε το σώμα αν δίνονταν σ' αυτό μόνο ο αρχική μετάθεση

$$A = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{v_0}{\rho}\right)^2}.$$

10.5 Παραδείγματα

1. Βάρος W που είναι δεμένο στην άκρη ελαστικού νήματος, προκαλεί σ' αυτό στατική επιμήκυνση $\delta_{\text{στ}} = 10 \text{ cm}$.

Αν το σώμα ανυψωθεί μέχρι μηδενικής τάσης του νήματος και αφεθεί στη συνέχεια ελεύθερο, να ευρεθούν:

α) Η μέγιστη επιμήκυνση του νήματος κατά την κίνηση που ακολουθεί και

β) Η συχνότητα της κίνησης.

Λύση

Αν θεωρήσουμε τη θέση της στατικής ισορροπίας σαν αρχή των μεταθέσεων, με θετική την προς τα κάτω κατα-

κόρυφη κατεύθυνση, τότε τη στιγμή που το σώμα αφήνεται ελεύθερο ($t=0$), με μηδενική τάση του νήματος, η αρχική μεταθέση του σώματος απ' τη θέση της στατικής του ισορροπίας θα είναι

$$x_0 = -\delta_{στ}, \quad (1)$$

και η αρχική του ταχύτητα

$$v_0 = 0$$

Άρα η εξίσωση κίνησης του σώματος, σύμφωνα με την πρώτη περίπτωση, θα είναι

$$x = -\delta_{στ} \cos \rho t.$$

Για τιμή της γωνίας $\rho t = \pi$, όταν δηλαδή το σώμα θα βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο, θα είναι $\cos \rho t = -1$,

οπότε η μεταθέση θα παίρνει τη μέγιστη τιμή

$$x_{\max} = +\delta_{στ} \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τις ιδιότητες (1) και (2), προκύπτει ότι η ολική επιμήκυνση του νήματος λόγω απότομης εφαρμογής του βάρους W στο άκρο του, είναι ακριβώς διπλάσια απ' την επιμήκυνση εκείνη που παράγεται με βαθμιαία αύξηση της τάσης του μέχρι της τιμής W , στη θέση της στατικής ισορροπίας.

Η συχνότητα της κίνησης θα υπολογιστεί απ' την αντίστοιχη σχέση της βελ. 166

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{στ}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1000}{10}}$$

$$\text{Άρα } f = 1,59 \text{ ταλαντώσεις / sec.}$$

2. Όταν ο δίσκος, που βρίσκεται στο κάτω άκρο του ελατηρίου του οχήματος, δεν έχει κανένα βάρος, η περίοδος των κατακορύφων ταλαντώσεών του είναι τ_0 .

Η περίοδος αυτή γίνεται τ_1 όταν ο δίσκος έχει γνωστό βάρος P και τ_2 όταν έχει μόνο το άγνωστο βάρος W , το οποίο ζητείται να υπολογιστεί.

Λύση

Όπως είναι γνωστό, η περίοδος μίας ταλάντωσης δίνεται απ' τη σχέση

$$\tau = \frac{2\pi}{\rho}, \quad \text{όπου} \quad \rho^2 = \frac{\kappa \cdot g}{W}$$



Αν επομένως Δ είναι το βάρος του δίσκου όταν αυτός είναι κενός, τότε, για τις διάφορες περιπτώσεις φορτίων, θα έχουμε αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{\kappa g}} \quad \text{ή} \quad \tau_0^2 = \frac{4\pi^2}{\kappa g} \Delta \quad (1)$$

$$\tau_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta + P}{\kappa \cdot g}} \quad \text{ή} \quad \tau_1^2 = \frac{4\pi^2}{\kappa g} (\Delta + P) \quad (2)$$

$$\tau_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta + W}{\kappa \cdot g}} \quad \text{ή} \quad \tau_2^2 = \frac{4\pi^2}{\kappa g} (\Delta + W) \quad (3)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την (1) απ' την (2), καθώς επίσης την (1) απ' την (3), παίρνουμε αντίστοιχα

$$\tau_1^2 - \tau_0^2 = \frac{4\pi^2}{\kappa g} P \quad (i)$$

$$\tau_2^2 - \tau_0^2 = \frac{4\pi^2}{\kappa g} W, \quad (ii)$$

οπότε διαιρώντας τις (i) και (ii) κατά μέλη, προκύπτει

$$W = \frac{\tau_2^2 - \tau_0^2}{\tau_1^2 - \tau_0^2} \rho.$$

3. Βάρος W συνδέεται, όπως φαίνεται στο σχήμα, με δύο ελατήρια που έχουν αντίστοιχα σταθερές K_1 και K_2 , σχηματίζοντας τις διατάξεις (α) και (β).

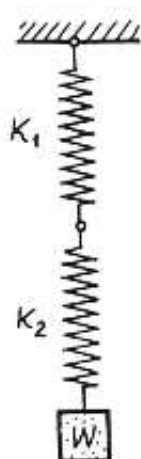
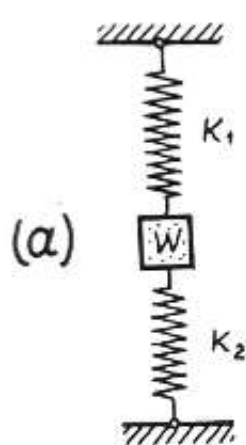
Να υπολογιστεί η περίοδος της ταλάντωσης χωριστά για κάθε διάταξη.

Λύση

Η περίοδος ταλάντωσης για κάθε μια απ' τις περιπτώσεις (α) και (β), δίνεται, όπως είναι γνωστό, με τον τύπο:

$$\tau = \frac{2\pi}{\rho},$$

$$\text{όπου } \rho^2 = \frac{K g}{W}.$$



(β)

$$\text{Άρα } \tau = 2\pi \sqrt{\frac{W}{K \cdot g}} \quad (i)$$

Προέχει επομένως ο υπολογισμός της σταθεράς του συστήματος των ελατηρίων, η οποία, όπως

είναι φανερό, είναι διαφορετική για κάθε περίπτωση.

Για τη διάταξη (α), έχουμε μεταβίβαση μέρους του βάρους W στο ένα ελατήριο και το υπόλοιπο στο άλλο.

Αν επομένως δ είναι η στατική επιμήκυνση, η οποία όπως φαίνεται απ' τη διάταξη είναι κοινή και στα δύο ελατήρια, θα έχουμε:

$$W = K_1 \delta + K_2 \delta = (K_1 + K_2) \delta \quad (i)$$

Αν όμως υπήρχε δυνατότητα αντικατάστασης του συστήματος

των δύο ελατηρίων με ένα μόνο, ιδανικό ελατήριο, σταθεράς έστω k_α , τότε θα είχαμε τη σχέση

$$W = k_\alpha \cdot \delta \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι

$$k_\alpha = k_1 + k_2$$

Αν έλθουμε τώρα στη διάταξη (β) και αγνοήσουμε το βάρος του ελατηρίου k_2 , διαπιστώνουμε ότι το βάρος του σώματος μεταβιβάζεται ολόκληρο και στο ένα ελατήριο και στο άλλο.

Αν λοιπόν δ_1 είναι η στατική επιμήκυνση του ενός ελατηρίου και δ_2 του άλλου, θα έχουμε:

$$\delta_1 = \frac{W}{k_1} \quad (3) \quad \text{και} \quad \delta_2 = \frac{W}{k_2} \quad (4)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (3) και (4) κατά μέλη, θα πάρουμε τη συνολική στατική επιμήκυνση δ_β του συστήματος, την οποία θα πρέπει να έχει ένα άλλο ιδανικό ελατήριο, σταθεράς έστω k_β . Άρα θα είναι:

$$\delta_\beta = \delta_1 + \delta_2 = W \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = \frac{W}{k_\beta},$$

$$\text{οπότε} \quad \frac{1}{k_\beta} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \text{ή} \quad k_\beta = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις συνολικές σταθερές k_α και k_β που βρήκαμε για τα ελατήρια των διατάξεων (α) και (β) αντίστοιχα στη σχέση (i), παίρνουμε την περίοδο ταλάντωσης χωριστά για κάθε περίπτωση. Δηλαδή:

$$\tau_\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{W}{(k_1 + k_2)g}}$$

$$\tau_\beta = 2\pi \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)W}{k_1 \cdot k_2 \cdot g}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11ο

ΕΡΓΟ - ΕΝΕΡΓΕΙΑ

11.1 Έργο

Όταν ε' ένα σώμα που μπορεί να μετακινείται ε' οριζόντιο επίπεδο, ενεργεί μια σταθερή οριζόντια δύναμη, τότε το σημείο εφαρμογής της δύναμης μετακινείται κατά τη διεύθυνση και τη φορά της.

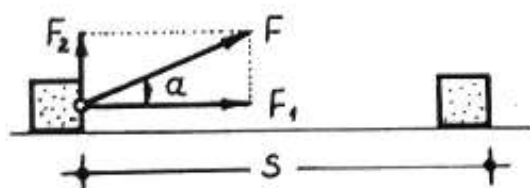
Γενικά, όταν μια δύναμη μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνσή της, λέμε ότι η δύναμη αυτή παράγει έργο.

Το έργο W μίας δύναμης εκφράζεται με το γινόμενο της δύναμης F επί το διάστημα S κατά το οποίο μετακινήθηκε το σημείο εφαρμογής της δύναμης κατά τη διεύθυνσή της. Δηλαδή

$$W = F \cdot S$$

Το έργο είναι μονόμετρο φυσικό μέγεθος και εκφράζεται συνήθως σε $\text{kg} \cdot \text{m}$.

Σε πολλές περιπτώσεις ο δρόμος τον οποίο διαγράφει το σημείο εφαρμογής της δύναμης σχηματίζει γωνία α με τη διεύθυνση της δύναμης.



Αναλύοντας τότε τη δύναμη F σε δύο κάθετες συνιστώσες, δηλαδή την F_1 κατά τη διεύθυνση της μετακίνησης

του σημείου εφαρμογής της F , και την F_2 κάθετη της F_1 , παρατηρούμε ότι η συνιστώσα F_1 δεν παράγει έργο, επειδή δεν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνσή της.

Επομένως στην περίπτωση αυτή έργο παράγει μόνο η συνιστώσα F_1 , η οποία προφανώς είναι

$$F_1 = F \cdot \cos \alpha.$$

Όταν λοιπόν η δύναμη F μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά διάστημα S , τότε το έργο που παράγει η F είναι:

$$W = F_1 \cdot S = F \cdot S \cdot \cos \alpha.$$

Αν η γωνία α είναι οξεία ($\alpha < 90^\circ$), τότε το έργο της δύναμης είναι θετικό. Στην περίπτωση αυτή η δύναμη βοηθάει στην κίνηση του σώματος πάνω στο οποίο ενεργεί και γι' αυτό το έργο της δύναμης F είναι κινητήριο έργο.

Αν όμως η γωνία α είναι αμβλεία ($\alpha > 90^\circ$), τότε το έργο της δύναμης F είναι αρνητικό, οπότε η δύναμη αντιδράει στην κίνηση του σώματος πάνω στο οποίο ενεργεί και το έργο της δύναμης F είναι τότε αντιστάμενο έργο.

Τέλος, αν η γωνία α είναι ορθή ($\alpha = 90^\circ$), τότε το έργο της δύναμης F είναι μηδέν, επειδή η δύναμη είναι κάθετη προς το δρόμο της και επομένως δεν παράγει έργο.

11.2 Έργο βάρους σώματος

Όταν η δύναμη σχηματίζει γωνία α με τη διεύθυνση της μετατόπισης και το σημείο εφαρμογής της δύναμης μετατοπίζεται κατά διάστημα S , τότε το έργο που παράγεται είναι

$$W = (F \cdot \sin \alpha) \cdot S.$$

Η σχέση αυτή γράφεται και

$$W = F \cdot (S \cdot \sin \alpha).$$

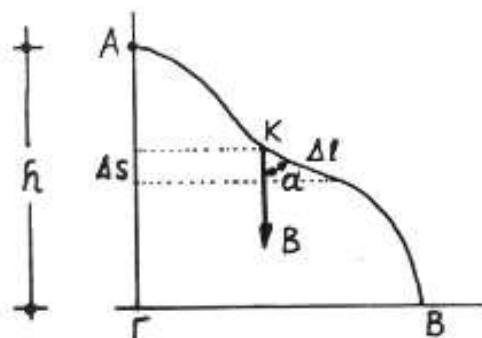
Αλλά $S \cdot \sin \alpha$ είναι η προβολή της μετατόπισης S πάνω στη διεύθυνση της δύναμης.

Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στην περίπτωση αυτή, το έργο που παράγεται απ' τη δύναμη F είναι ίσο με το γινόμενο της δύναμης F επί την προβολή της μετατόπισης S πάνω στη διεύθυνση της δύναμης.

Το βάρος B ενός σώματος είναι δύναμη κατακόρυφη, που μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει σταθερή ένταση σε αρκετή απόσταση απ' την επιφάνεια της Γης.

Έστω ότι το κέντρο βάρους K ενός σώματος, που έχει βάρος B , κατεβαίνει από ύψος h κατά μήκος οποιασδήποτε τροχιάς.

Αναλύοντας την τροχιά του κέντρου βάρους του σώματος σε στοιχειώδη τμήματα, διαπιστώνουμε, ότι το καθένα απ' αυτά μπορεί να θεωρηθεί ευθύγραμμο.



Αν λοιπόν Δl είναι το στοιχειώδες μήκος ενός από τα τμήματα αυτά και α η γωνία που σχηματίζει με τη διεύθυνση του βάρους B , τότε, κατά τη μετακίνηση του κέντρου βά-

ρους κατά το διάστημα Δl , παράγεται, απ' το βάρος B του σώματος ένα στοιχειώδες έργο ίσο με

$$\Delta W = B \cdot \Delta l \cdot \sigmaυνα = B \cdot \Delta S,$$

διότι $\Delta l \cdot \sigmaυνα$ είναι η προβολή του στοιχειώδους τμήματος πάνω στην κατακόρυφη διεύθυνση.

Το ολικό έργο W της δύναμης B κατά τη μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της απ' το σημείο A στο B είναι το αλγεβρικό άθροισμα των παραγόμενων στοιχειωδών έργων. Δηλαδή

$$W = \sum (B \cdot \Delta S)$$

Αν όμως ληφθεί υπόψη ότι το αλγεβρικό άθροισμα των στοιχειωδών μετατοπίσεων πάνω στην κατακόρυφο ισούται με την κατακόρυφη απόσταση των ακραίων σημείων, έπεται ότι το παραγόμενο απ' το βάρος ενός σώματος έργο είναι ανεξάρτητο της τροχιάς του και ισούται με το γινόμενο του βάρους του σώματος επί την κατακόρυφη απόσταση των ακραίων σημείων της τροχιάς που διαγράφει. Δηλαδή:

$$W = B \cdot h.$$

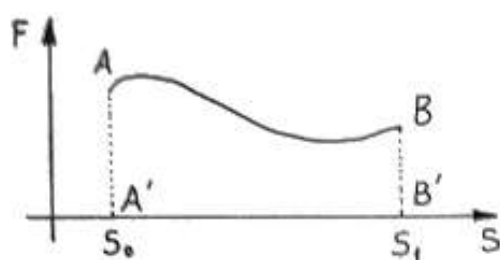
11.3 Έργο μεταβλητής δύναμης

Αν η δύναμη η οποία έχει σταθερή διεύθυνση και φορά, μετακινώντας το σημείο εφαρμογής της πάνω στη διεύθυνσή της κατά διάστημα S δεν έχει σταθερή ένταση αλλά μεταβάλλεται συναρτήσκει της μετατόπισης, τότε το έργο που παράγει η δύναμη αυτή δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί απ τη σχέση

$$W = F \cdot S$$

με σταθερή τη δύναμη F .

Η καμπύλη των μεταβολών της δύναμης συναρτήσει της μετακίνησης του σημείου εφαρμογής της, παριστάνει τότε, σε σχέση με τον άξονα S της μετατόπισης, μια επιφάνεια, το



εμβαδόν της οποίας ισούνται αριθμητικά με το έργο που παράγεται απ' τη μεταβλητή δύναμη.

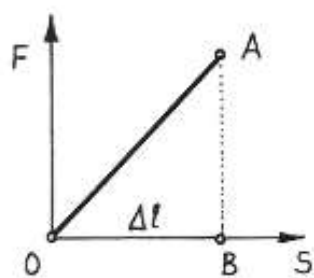
Δηλαδή
$$W = \int_{S_0}^{S_1} F \cdot dS$$

11.4 Έργο τάσης

Είναι γνωστό ότι για να τεντώσουμε το ελατήριο ενός δυναμόμετρου εφαρμόζουμε σ' αυτό μια δύναμη που έχει σταθερή διεύθυνση και φορά. Η δύναμη αυτή είναι ανάλογη της επιμήκυνσης του ελατηρίου και ισχύει η σχέση

$$F = k \cdot \Delta l$$

όπου k η σταθερά του ελατηρίου.



Έστω ότι κατά τη σταδιακή εφαρμογή μίας δύναμης στο ελατήριο ενός δυναμόμετρου προκαλούμε σ' αυτό επιμήκυνση Δl .

Κατά τη διάρκεια της μετατόπισης η δύναμη μεταβάλλεται, όπως προαναφέραμε, σταδιακά συνεχώς από μηδέν μέχρι μίας τιμής F , σύμφωνα με την παραπάνω σχέση.

Στην περίπτωση αυτή η μεταβολή της δύναμης σε σχέση με τη μετατόπιση παριστάνεται με την ευθεία OA η οποία περνάει απ' την αρχή των αξόνων.

Επομένως το έργο το οποίο παρήγαγε η μεταβλητή δύναμη κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της

κατά Δl , ισούνται αριθμητικά, σύμφωνα με το περιεχόμενο της προηγούμενης ενότητας, με το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου OAB και ονομάζεται έργο τάσης. Είναι δε

$$W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει και κατά τη συμπίεση του ελατηρίου κατά Δl .

11.5 Μηχανική ενέργεια

Στερεώνουμε το ένα άκρο σπειροειδούς ελατηρίου, ενώ στο άλλο άκρο του τοποθετούμε σώμα το οποίο μπορεί να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Σέρνουμε το σώμα ώστε το ελατήριο να επιμηκυνθεί ελαστικά και ακινητοποιούμε το σώμα.

Αν στη συνέχεια αφήσουμε το σώμα ελεύθερο, παρατηρούμε ότι το ελατήριο παίρνει πάλι το αρχικό του μήκος, αλλά τότε παράγει ορισμένο έργο, γιατί μετακινεί το σώμα κατά ένα διάστημα ίσο προς την επιμήκυνση.

Όποτε λοιπόν το ελαστικά παραμορφωμένο ελατήριο έχει την ικανότητα να παράγει έργο.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το ελατήριο περικλείει **ενέργεια**.

Την ενέργεια αυτή χρησιμοποιούμε για τη λειτουργία διαφόρων μηχανισμών (ωρολογίων κ.λ.π.).

Γενικότερα όμως λέμε ότι ένα σώμα (ή σύστημα σωμάτων) περικλείει ενέργεια, όταν τούτο είναι ικανό να παράγει έργο.

Η ενέργεια αυτή μετριέται με το έργο που μπορεί να εκτελέσει το σώμα.

11.6 Δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας

Από ύψος h αφήνουμε να πέσει πάνω στην επιφάνεια της Γης σώμα που κινείται ελεύθερα κάτω απ' την επίδραση του βάρους του.

Κατά την πτώση του σώματος το βάρος του B παράγει, όπως είναι γνωστό, έργο

$$W = B \cdot h$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο απ' την τροχιά που διαγράφει το κέντρο βάρους του σώματος, εξαρτώμενο μόνο απ' την κατακόρυφη απόσταση των δύο ακραίων σημείων της τροχιάς που διαγράφεται.

Όταν επομένως το σώμα βρίσκεται σ' ορισμένο ύψος h σε σχέση μ' ένα οριζόντιο επίπεδο, τότε μπορεί να παράγει έργο.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σώμα τούτο έχει ενέργεια η οποία ονομάζεται δυναμική ενέργεια.

Αυτή ισούται με το έργο το οποίο παράγει το βάρος του σώματος κατά την ελεύθερη πτώση του, απ' την αρχική θέση μέχρι το θεωρούμενο οριζόντιο επίπεδο. Δηλαδή

$$W_{\text{δυν}} = B \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

Η ικανότητα που έχει ένα σώμα να παράγει έργο, αποδεικνύεται και απ' το ότι το σώμα, όταν αφήνεται να πέσει ελεύθερα, μπορεί να ανυψώσει σε ύψος h ένα άλλο σώμα το οποίο έχει το ίδιο βάρος, με την προϋπόθεση βέβαια ότι δεν υπάρχουν τριβές στην τροχαλία ούτε αντίσταση του αέρα κατά την κίνηση.

11.7 Δυναμική ενέργεια λόγω ελαστικής παραμόρφωσης

Όταν ένα πειροειδές ελατήριο παθαίνει ελαστική επιμήκυνση κατά Δl , τότε, όπως αναφέραμε στην ενότητα 11.4 παράγεται έργο

$$W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l$$

Το έργο αυτό (έργο τάσης) είναι το έργο μίας μεταβλητής δύναμης, η οποία κατά τη διάρκεια της επιμήκυνσης μεταβάλλεται γραμμικά συναρτηθεί της επιμήκυνσης.

Η μεταβολή της έντασης της δύναμης δίνεται απ' την εξίσωση

$$F = k \cdot \Delta l,$$

όπου ο συντελεστής k εξαρτάται απ' τη φύση και τις διαστάσεις του ελατηρίου.

Άρα, κατά την ελαστική επιμήκυνση του ελατηρίου, το έργο που παράγεται απ' τη μεταβλητή δύναμη, είναι:

$$W = F \cdot \Delta l = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2.$$

Το έργο αυτό αποταμιεύεται μέσα στο ελατήριο που επιμήκυνθηκε με τη μορφή δυναμικής ενέργειας, επειδή το παραμορφωμένο ελατήριο έχει την ικανότητα να παράγει έργο.

11.8 Κινητική ενέργεια

Είναι γνωστό ότι το νερό ενός καταρράκτη μπορεί να κινήσει ένα μύλο, ο άνεμος μπορεί να μετακινήσει ιστιοφόρο πλοίο, το βλήμα ενός πυροβόλου μπορεί να γκρεμίσει

τοίχο κ.ά.

Άρα ένα κινούμενο σώμα έχει την ικανότητα να παράγει έργο, δηλαδή περικλείει ενέργεια.

Η ενέργεια αυτή οφείλεται στην κίνηση του σώματος και γιαυτό ονομάζεται κινητική ενέργεια.

Καλούμε επομένως κινητική, την ενέργεια που έχει ένα κινούμενο σώμα λόγω της ταχύτητάς του.

Ας θεωρήσουμε ένα υλικό σημείο με μάζα m , το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές και αρχικά ηρεμεί.

Αν στο υλικό σημείο ενεργήσει η σταθερή δύναμη F , τότε αποκτά τούτο ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση κατά τη διεύθυνση και τη φορά της F .

Η επιτάχυνση είναι προφανώς

$$a = \frac{F}{m}$$

Με το πέρασμα χρόνου t απ' την εκκίνησή του, το υλικό σημείο έχει διανύσει διάστημα

$$S = \frac{1}{2} a t^2,$$

ενώ έχει αποκτήσει ταχύτητα $v = a \cdot t$.

Όποτε λοιπόν μέσα στο χρόνο t η δύναμη F έχει παράγει έργο

$$W = F \cdot S = m \cdot a \cdot \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} m (a \cdot t)^2 = \frac{1}{2} m v^2.$$

Το έργο αυτό ονομάζεται έργο επιτάχυνσης.

Αν στο τέλος του χρόνου t σταματήσει να ενεργεί η δύναμη F , τότε το υλικό σημείο εξακολουθεί να κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα v .

Στην περίπτωση αυτή το υλικό σημείο έχει κινητική ενέργεια, που είναι το έργο επιτάχυνσης το οποίο έχει ήδη αποταμιευτεί στο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα υλικό σημείο.

Όστε τελικά η κινητική ενέργεια ενός υλικού σημείου με μάζα m που κινείται με σταθερή ταχύτητα v , είναι ίση με το έργο επιτάχυνσης, το οποίο παρήγαγε μια σταθερή δύναμη F , για να αποκτήσει το υλικό σημείο ταχύτητα v .

11.9 Μεταβολή της κινητικής ενέργειας

Θεωρούμε στερεό σώμα με μάζα m το οποίο αρχικά ηρεμεί, οπότε και η κινητική του ενέργεια είναι μηδέν.

Το σώμα τούτο αφήνεται να πέσει ελεύθερα χωρίς αρχική ταχύτητα.

Με το πέρασμα κάποιου χρόνου απ' την εκκίνησή του το σώμα έχει κατεβεί κατά ένα ύψος h και έχει αποκτήσει ταχύτητα που δίνεται απ' τον τύπο

$$h = \frac{v^2}{2g} \quad \text{ή} \quad v^2 = 2g \cdot h \quad (1)$$

Πολλ/ζοντας και τα δύο μέλη της (1) επί $\frac{m}{2}$ παίρνουμε

$$\frac{1}{2} m v^2 = m \cdot g \cdot h = B \cdot h \quad (2)$$

Το πρώτο μέλος της (2) εκφράζει τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος κατά τη διάρκεια του χρόνου που μεσολάβησε.

Το γινόμενο $B \cdot h$ εκφράζει το έργο το οποίο έχει ήδη παραχθεί απ' το βάρος B του σώματος κατά τη διάρκεια αυτού του χρόνου.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι ίση με το έργο της δύναμης B , η οποία (δύναμη) εφαρμόζεται στο σώμα κατά τη διάρκεια της ελεύθερης πτώσης του.

Το παραπάνω συμπέρασμα είναι συνέπεια ενός γενικώτε-

ρου νόμου μεταβολής της κινητικής ενέργειας κατά τον οποίο "η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός στερεού σώματος, μέσα σ' ορισμένο χρόνο, είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των εξωτερικών δυνάμεων, που ενεργούν πάνω στο σώμα κατά τη διάρκεια του χρόνου τούτου". Δηλαδή

$$W_{\text{τελ}} - W_{\text{αρχ}} = \Sigma W ,$$

$$\eta \quad \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \Sigma W .$$

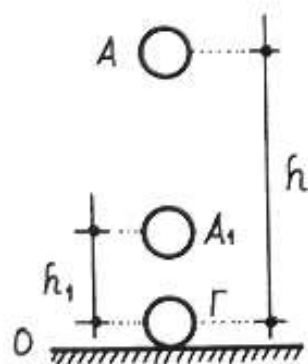
11.10 Μετατροπές της μηχανικής ενέργειας

Μια ελαστική σφαίρα από χάλυβα αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος h πάνω σε μια ελαστική πλάκα από χάλυβα.

Παρατηρούμε ότι η σφαίρα, μετά την κρούση της πάνω στην πλάκα, πηδά προς τα πάνω, ανεβαίνοντας περίπου στο ίδιο ύψος h .

Εξετάζοντας το φαινόμενο από την αρχή, διαπιστώνουμε ότι η σφαίρα πέφτει ελεύθερα χωρίς αρχική ταχύτητα. Στη θέση Α η σφαίρα έχει μόνο δυναμική ενέργεια

$$W_{\text{δυν}} = m g \cdot h$$



Κατά την πτώση της σφαίρας η δυναμική της ενέργεια συνέχεια ελαττώνεται.

Όμως η ταχύτητα της σφαίρας αυξάνεται συνέχεια με αποτέλεσμα ν' αυξάνεται αντίστοιχα και η κινητική της ενέργεια.

Στη θέση Γ η σφαίρα έχει αποκτήσει ταχύτητα, που σύμφωνα με τη σχέση (1) της προηγούμενης βελίδας είναι

$$v = \sqrt{2 g \cdot h}$$

Άρα στη θέση Γ η σφαίρα έχει κινητική ενέργεια

$$W_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m 2gh = m \cdot g \cdot h$$

Παρατηρούμε ότι η κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι ίση με την αρχική δυναμική της ενέργεια.

Κατά την πτώση λοιπόν της σφαίρας από το ύψος h , ολόκληρη η δυναμική της ενέργεια μετατράπηκε, στη διάρκεια της διαδρομής της, σε κινητική ενέργεια.

Στις θέσεις Α και Γ η σφαίρα έχει την ίδια μηχανική ενέργεια, με διαφορετική όμως μορφή.

Σε μια ενδιάμεση θέση Α₁, η σφαίρα έχει:

$$\text{Δυναμική ενέργεια} \quad W_{\text{δυν}} = m \cdot g \cdot h_1$$

$$\text{Κινητική} \quad \text{--} \text{--} \quad W_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m v_1^2.$$

$$\text{Και επειδή} \quad v_1 = \sqrt{2g(h-h_1)},$$

$$\text{θα είναι} \quad W_{\text{κιν}} = m \cdot g \cdot (h - h_1).$$

Στη θέση Α₁, η ολική μηχανική ενέργεια την οποία έχει η σφαίρα, είναι ίση με το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας της σφαίρας. Άρα είναι:

$$W_{\text{ολ}} = W_{\text{δυν}} + W_{\text{κιν}} = m \cdot g \cdot h_1 + m \cdot g \cdot (h - h_1) = m \cdot g \cdot h.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι στη θέση Α₁ η ολική μηχανική ενέργεια της σφαίρας είναι ίση με την αρχική δυναμική ενέργεια που είχε η σφαίρα στη θέση Α.

Άρα κατά την πτώση της σφαίρας, η αρχική δυναμική της ενέργεια μετατρέπεται σταδιακά σε κινητική ενέργεια.

Η αντίστροφη μετατροπή συμβαίνει, όταν η σφαίρα εκβενδονίζεται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα.

11.11 Παραδείγματα

1. Κιβώτιο βάρους $B = 50 \text{ kg}^*$ δέρνεται με τη βοήθεια σχοινιού πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu = 0,30$.

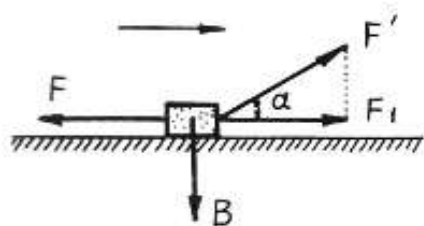
Αν το κιβώτιο μετακινηθεί κατά 20 m με σταθερή ταχύτητα, να υπολογιστεί το έργο που δαπανάται,

- όταν το σχοινί διατηρείται οριζόντιο και
- όταν σχηματίζει γωνία 30° με το οριζόντιο επίπεδο.

Λύση

α) Η δύναμη τριβής που ασκείται στο κιβώτιο, είναι:

$$F = \mu \cdot B = 0,3 \cdot 50 = 15 \text{ kg}^*$$



Επειδή το κιβώτιο μετακινείται κατά διάστημα $S = 20 \text{ m}$ με σταθερή ταχύτητα, έπεται ότι η οριζόντια κινούσα δύναμη F_1 είναι ίση και αντίθετη με τη

δύναμη τριβής, που υπολογίστηκε ήδη σε 15 kg^* .

Άρα το ζητούμενο έργο θα είναι

$$W_1 = F_1 \cdot S = 15 \cdot 20 = 300 \text{ kg}^* \cdot \text{m}.$$

β) Όταν το σχοινί σχηματίζει γωνία $\alpha = 30^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο, επειδή το κιβώτιο κινείται πάλι με σταθερή ταχύτητα κατά 20 m , η δύναμη τριβής είναι πάλι η ίδια.

Ενεργεί επομένως τώρα η δύναμη F' , της οποίας η οριζόντια συνιστώσα F_1 είναι ίση και αντίθετη προς τη δύναμη τριβής F .

Άρα το δαπανώμενο έργο είναι πάλι το ίδιο. Δηλαδή

$$W_2 = 15 \cdot 20 = 300 \text{ kg}^* \cdot \text{m}.$$

Όμως η κινούμενη δύναμη F' , είναι:

$$F' = \frac{F_1}{\sin 30^\circ} = \frac{15}{0,866} = 17,32 \text{ kg}^*.$$

2. Ο σωλήνας πυροβόλου όπλου έχει μήκος $0,80\text{m}$ και εκτοξευώνει βλήμα βάρους 4kg^* με ταχύτητα 420 m/sec .

Να υπολογιστούν

α) Η δύναμη που ωθεί το βλήμα μέσα στο σωλήνα, αν υποτεθεί ότι αυτή είναι σταθερή και

β) Ο χρόνος κίνησης του βλήματος μέσα στο σωλήνα.

Λύση

α) Το βλήμα διανύει μέσα στο σωλήνα του πυροβόλου διάστημα $S = 0,80\text{m}$ κάτω απ' την επίδραση σταθερής δύναμης F , η οποία προκαλεί στο βλήμα επιτάχυνση a . Μέσα στο σωλήνα η δύναμη F παράγει έργο

$$W_F = F \cdot S$$

Σύμφωνα όμως με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, το έργο της δύναμης F αποταμιεύεται στο βλήμα με τη μορφή κινητικής ενέργειας W_K , η οποία είναι:

$$W_K = \frac{1}{2} m v^2.$$

Έτσι παίρνουμε την εξίσωση

$$F \cdot S = \frac{1}{2} m v^2,$$

απ' όπου προκύπτει

$$F = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot S} = \frac{B \cdot v^2}{2 \cdot g \cdot S} = \frac{4 \cdot 420^2}{2 \cdot 10 \cdot 0,8} = 44.100 \text{ kg}^* = 44,1 \text{ tn}^*$$

β) Η επιτάχυνση a του βλήματος θα βρεθεί απ' τη θεμελιώδη εξίσωση

$$F = \frac{B}{g} a \quad \rightarrow \quad a = \frac{F \cdot g}{B}$$

$$\text{ή} \quad a = \frac{44.100 \cdot 10}{4} = 11.025 \text{ m/sec}^2$$

Άρα ο ζητούμενος χρόνος κίνησης του βλήματος μέσα στο βωλήνα του πυροβόλου είναι

$$t = \frac{v}{a} = \frac{420}{11025} = 0,0038 \text{ sec.}$$

[3.] Σώμα βάρους 5 kg^* βάλλεται κατακόρυφα προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα 10 m/sec . Όταν φθάνει σε ύψος 5 m πάνω απ' το έδαφος, έχει κινητική ενέργεια $200 \text{ kg}^* \cdot \text{m}$.

Να υπολογιστεί το ύψος h απ' όπου ρίχτηκε το σώμα.

Λύση

Αν A είναι το σημείο απ' όπου ρίχτηκε το σώμα, τότε η μηχανική (ολική) ενέργεια του σώματος λόγω θέσης και κινητικής κατάστασης, είναι

$$W_{ολ} = W_{Δ} + W_{κ} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m v^2.$$

Όταν το σώμα φτάει σε ύψος $h_1 = 5 \text{ m}$ πάνω απ' το έδαφος, τότε έχει δυναμική ενέργεια $W_{Δ} = m \cdot g \cdot h_1$, και κινητική ενέργεια $W_{κ} = 200 \text{ kg}^* \cdot \text{m}$.

Στο ύψος h_1 , επειδή το σώμα έχει την ίδια ολική ενέργεια με την αρχική του σημείου A , θα έχουμε:

$$m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m v^2 = m \cdot g \cdot h_1 + W_{κ} \quad (1)$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της (1) διά $m \cdot g$, και λύνοντας ως προς h , βρίσκουμε:

$$h = h_1 - \frac{W_k}{m \cdot g} - \frac{v^2}{2g} = 5 - \frac{200}{5} - \frac{10^2}{2 \cdot 10} = 40 \text{ m.}$$

4. Σφαίρα μάζας $m = 100 \text{ gr}$ εκκρενδονίζεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $v_0 = 20 \text{ m/sec}$.

Να υπολογιστούν:

α) Το ύψος στο οποίο φτάνει η σφαίρα.

β) Όταν η σφαίρα ξαναχτυρίζει στο έδαφος, χάνει το μισό της ενέργειας την οποία είχε πριν απ' την κρούση της πάνω στο έδαφος. Σε πόσο ύψος ανεβαίνει η σφαίρα, μετά την πρώτη κρούση της στο έδαφος.

γ) Γνωρίζοντας ότι η σφαίρα μετά την κρούση της στο έδαφος χάνει το μισό της ενέργειάς της, να βρεθεί ποιος ρυθμός ακολουθεί η ελάττωση του ύψους στο οποίο φτάνει η σφαίρα μετά από κάθε της αναπήδηση, και

δ) Να αποδειχτεί ότι μετά από ορισμένο χρόνο t , η σφαίρα μένει ακίνητη στο έδαφος και να υπολογιστεί ο χρόνος t .

Λύση

α) Η σφαίρα ανεβαίνει με κίνηση ομαλά επιβραδυνόμενη και φτάνει σε ύψος

$$h_0 = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{400}{2 \cdot 10} = 20 \text{ m.}$$

β) Όταν η σφαίρα βάλλεται προς τα πάνω, έχει κινητική ενέργεια:

$$W = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{g} v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,1}{10} 20^2 = 2 \text{ kg}^* \cdot \text{m.}$$

Όταν η βφαίρα ξαναγυρίζει και έρχεται σε πρώτη κρούση με το έδαφος, η μισή ενέργειά της, δηλαδή $1 \text{ kg} \cdot \text{m}$, χάνεται γιατί μετατρέπεται σε θερμότητα.

Έτσι η βφαίρα ξαναπηδά κατακόρυφα με τη μισή εναπομένονσα ενέργεια του $1 \text{ kg} \cdot \text{m}$ και φτάνει σε ύγος h_1 που προδιορίζεται απ' την εξίσωση

$$m \cdot g \cdot h_1 = W_1$$

$$\text{ή } h_1 = \frac{W_1}{m \cdot g} = \frac{W_1}{B} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ m},$$

δηλαδή το μισό του αρχικού της ύγους.

γ) Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι τα ύψη στα οποία φτάνει διαδοχικά η βφαίρα, ελαττώνονται συνεχώς με ρυθμό

$$h_0 = 20 \text{ m}, \quad h_1 = \frac{h_0}{2} = 10 \text{ m}, \quad h_2 = \frac{h_1}{2} = 5 \text{ m}, \quad h_3 = 2,5 \text{ m} \dots$$

δ) Η διάρκεια ^{πρώτης} ανόδου της βφαίρας είναι

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} = 2 \text{ sec}$$

Αυτή βέβαια είναι ίση με τη διάρκεια της καθόδου και επομένως η πρώτη άνοδος και κάθοδος της βφαίρας διαρκεί

$$t_1 = 2 \cdot t = 2 \cdot 2 = 4 \text{ sec}.$$

Με το ίδιο σκεπτικό βρίσκουμε ότι οι επόμενες κρούσεις της βφαίρας διαρκούν συνολικά (άνοδος + κάθοδος), ξέχωρα η καθεμιά

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}}, \quad t_3 = 2\sqrt{\frac{2h_2}{g}} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

$$\text{Έτσι παίρνουμε} \quad \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} = \sqrt{\frac{h_0}{h_0/2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{Άρα} \quad t_2 = \frac{t_1}{\sqrt{2}}$$

Όμοια, βρίσκουμε ότι

$$t_3 = \frac{t_2}{\sqrt{2}} \quad \kappa.ο.κ.$$

Όστε η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων της σφαίρας στο έδαφος μεταβάλλεται ως εξής:

$$t_1, \quad t_2 = \frac{t_1}{\sqrt{2}}, \quad t_3 = \frac{t_2}{\sqrt{2}} = \frac{t_1}{(\sqrt{2})^2}, \quad t_4 = \frac{t_3}{\sqrt{2}} = \frac{t_1}{(\sqrt{2})^3} \dots\dots$$

Άρα η συνολική διάρκεια κίνησης της σφαίρας είναι

$$t_{ολ} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \dots\dots$$

$$\eta \quad t_{ολ} = t_1 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \dots\dots \right).$$

Η παράσταση που είναι μέσα στην παρένθεση είναι φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος, με πρώτο όρο $a=1$ και λόγο

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Άρα το άθροισμα Σ των όρων της πρόοδου αυτής θα δοθεί απ' το γνωστό τύπο

$$\Sigma = \frac{a}{1-\kappa} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1),$$

και επομένως ο συνολικός χρόνος κίνησης της σφαίρας, μέχρι αυτή να σταματήσει (όπως φάνηκε απ' τη φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο), είναι

$$t_{ολ} = t_1 \cdot \Sigma$$

$$\eta \quad t_{ολ} = 4 [\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)] = 13,64 \text{ sec.}$$